Судьба моя – я сам.
А.Леонов.

ОТЧЕГОМЫ

РАСШИРЯЕМ КРУГОЗОР

В. Д. СМИРНОВ

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ФИЗИКА

С-ПЕТЕРБУРГ 2018

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

УДК 530.1
ББК 22.31
С50

Смирнов В.Д.
ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ФИЗИКА.—Санкт-Петербург:
Свое издательство, 2017.—768с.

Эта единая теория (ДФ) впервые аксиоматизирует всю теоретическую физику, причём не дифференциальными уравнениями (требующими дополнительных условий), а диофантовым уравнением спектра единого поля, задающим и метрику пространства-времени, и дифференциальное уравнение поля, и само поле, имеющее точечные особенности. Эта детерминированная теория не отменяет квантовую механику, а дополняет её то есть включает возможность статистического абстрагирования релятивистской квантовой теорией, объясняет происхождение и связи фундаментальных физических величин, согласие которых с опытом позволяет говорить о детерминированной структуре Вселенной. Теория даёт понятия элементарных частиц, их взаимодействий и масс. Плоское 4-пространство теории обеспечивает интегральные законы сохранения, включая гравитационное взаимодействие. Все единицы измерения представимы в безразмерном виде.

Ключевые слова: детерминизм, время, вселенная, большой взрыв, тёмная масса, чёрная дыра, аккреционный диск, квазар, квантовая гравитация, точечный заряд, гравитон, emdrive, фундаментальная частица, нейтрино, электрон, кварк.

Электронная версия с исправлениями на дату
03.04.2018 бумажного издания с номером:
ISBN 978-5-4386-1212-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I
ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

ЧАСТЬ II
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Для знакомства с философией этой книги достаточно прочесть первую и последнюю главу. Если не возникнет чувства отторжения, то есть смысл почитать остальное.

Зарождение этой книги можно отнести к 8 сентября 1965 года, когда книга Г.И.Ашкенази “Цвет в природе и технике”, навела меня на мысль, что если такое качественное явление как цвет вполне можно описать количественно, то не исключено, что и вообще все явления поддаются количественному объяснению. Стремление к математизации физических понятий привело меня в 1974 году (по-моему неизбежно) к детерменистскому мировоззрению и попытке представить всю структуру Вселенной одним диофантовым уравнением. Развитием этой идеи явилась предлагаемая книга.

Книга предназначена для не слишком догматичного читателя, но уважающего систематические знания. Она содержит математизированную физическую теорию, претендующую на то, что она правильно отображает наблюдаемый нами Мир. Своим происхождением книга во многом обязана замечательному курсу теоретической физики Ландау, Лифшица, Питаевского, Берестецкого и другим публикациям, часть из которых приведена в списке литературы. Прошу извинения у читателя, которому изложение может показаться занудно подробным, но кажется, что экономия бумаги себя не оправдывает, так как иногда приводит к слишком большим затратам сил и времени на восстановление промежуточных выкладок, а без этого не возникает чувства уверенности в прочитанном материале. Кроме того, подробные выкладки позволяют легко развивать разработки автора. В настоящее время, когда полиграфический набор благодаря компьютерам резко упростился, кажется простительным более подробный стиль изложения. Трудности набора математических выражений удаётся легко преодолеть с помощью программы Дональда Кнута TEX, унифицирующей технологию набора как текста так и формул только с клавиатуры при автоматическом соблюдении полиграфических правил, что при небольшой тренировке позволяет быстро и достаточно хорошо набирать тексты с обилием математических выкладок. Сокращение числа формул, допустимое в популярном изложении, не только не облегчает более глубокое понимание, а делает его невозможным. Поэтому необходимо не сокращать формулы, а максимально их раскрывать, обнажая смысл.

Во второй части книга получает логическое завершение, на основе которого делаются далёкие философские выводы. Не исключено, что теория содержит ошибки, но я надеюсь, что их исправление не разрушит её главную суть. На данный момент текст книги достаточно устоялся для публикации.

Зависимость глав книги последовательная. После заголовка главы́ обычно в нескольких словах выражается её смысл. В концы глав помещаются какие-либо

мудрые высказывания по вкусу автора. Поскольку эта книга имеет мировоззренческий характер, она содержит лирические фрагменты, не свойственные физической литературе. Если эта книга чем-то показалась интересной, Вы можете свободно разослать этот pdf-файл своим друзьям, не опасаясь нарушить авторское право, так как электронный вариант этим правом не защищён (public domain).

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В КНИГЕ:

4-радиус-вектор $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$,
$\mathbf{v}$ – 3-вектор скорости,
$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – 3-ускорение,
u^μ – 4-скорость, (конкретный смысл определяет контекст),
u^0 – временна́я компонента 4-вектора скорости (релятивистский фактор скорости), или просто **темп**,
w^μ – 4-ускорение.
w – модуль 4-ускорения или плотность вероятности (в зависимости от контекста).
3-тензорные индексы – латинские,
4-тензорные индексы – греческие,
Элемент 4-объёма $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$,
Оператор Даламбера $\Box = \partial^2/\partial x^\mu\, \partial x_\mu = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$,
Коэффициент в 1-мерном преобразовании Фурье: 1,
U – единое поле или потенциальная энергия (в зависимости от контекста),
$\mathcal{E} = P^0, W = S^0$ – энергия и её плотность,
P^μ, S^μ – 4-импульс и его плотность,
$\mathcal{E}_0 = \pm|P^\mu| = m$ – энергия покоя (масса),
$W_0 = e$ – плотность энергии покоя,
p – давление,
T° – абсолютная температура,
T – возраст Вселенной (или события),
s – интервал,
$t = x^0$ – время,
q – элементарный заряд,
e – экранированный вакуумом элементарный заряд,
между единицами длины и времени всюду предполагается релятивистская связь $c = 1$, что позволяет для массы и энергии использовать одни и те же практические единицы; все теоретические единицы – безразмерные.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

Без правил ничего нельзя понять!

Язык – общественное средство отображения (понимания) Мира.

§1. Познание.

> Софизм идеалистической философии состоит в том, что ощущение принимается не за связь сознания с внешним миром, а за перегородку, стену, отделяющую сознание от внешнего мира, – не за образ соответствующего ощущению внешнего явления, а за “единственно сущее”.
>
> [Ленин с. 37]
>
> ... понятие материи ... не означает гносеологически ничего иного, кроме как: объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им.
>
> [Ленин с. 246]

1. Мышление. Приведённые цитаты дают вполне удовлетворительное определение **материи**. Предлагаемая теория также не приемлет идеализма в данном Лениным понимании, однако не отрицает идеализма в смысле идеальности Мира, при условии, что он объективен. Это не противоречит идее Бога в смысле идеальных (математических) законов природы.

Ощущения и их части, которые мы способны различать, назовём **образами**. Способность материи вызывать (возбуждать) в уме некоторый образ назовём **феноме́ном**. То есть каждому образу соответствует феноме́н (вообще говоря, не один), хотя не каждому феноме́ну соответствует образ. Ощущение всегда связано с феноменом некоторым процессом **отображения**, различные стадии которого мы назовём (обобщая) тоже **образами**. Любые операции с образами назовём **мышлением**.

Мы способны упрощать образы, то есть заменять сложную структуру образа более простой, оставляя в ней наиболее важные для нас детали. Этот процесс упрощения, называемый **абстрагированием**, может осуществляться в различной степени. Поэтому одному и тому же феноме́ну могут соответствовать несколько различных по степени детальности образов. Например, *цветущая яблоня* может рассматриваться как *яблоня* или *дерево* или *растение* или даже вообще как *феноме́н*. В этом ряду детальность образов убывает. Итак, процесс абстрагирования приводит к тому, что возникновение в мышлении одного образа может сопровождаться возникновением других образов, являющихся упрощениями (**абстракциями**) первого.

Абстрагирование одного образа другим можно рассматривать как отображение первого образа вторым. Каждый образ будем считать, в частности, абстракцией самого себя.

Если мы ощущаем два различных феноме́на, то возникают их образы, среди различных абстракций которых можно найти абстракцию общую для обоих этих феноме́нов. Возьмём, например, цветущую яблоню и опавшую берёзу. Абстрагируя образы этих двух феноме́нов, можно получить, например, яблоню и берёзу. Абстрагируя далее, получим дерево и дерево. То есть на этой ступени абстрагирования образы уже не различимы. Мы получили общую абстракцию – дерево. Можно указать и другие общие абстракции, например, лиственное дерево, растение и другие.

Итак, несколько различных образов могут иметь общие абстракции. Это позволяет **классифицировать** образы, то есть объединять образы, имеющие общие абстракции и изучать с их помощью соответствующие феноме́ны не каждый отдельно, а все вместе.

Процесс абстрагирования относится только к образам и никак не к сответствующим им феноме́нам. Поэтому ясно, что образы нельзя отождествлять с соответствующими феноме́нами, что характерно для субъективного идеализма. Являясь материальными состояниями мыслящего мозга, образы, конечно, являются феноме́нами, но они могут иметь очень мало общего с отображаемыми феноме́нами.

2. Сознание. Для общения друг с другом и для расширения возможностей сохранения образов (**памяти**), мы используем различные вспомогательные средства воздействия на своё мышление. Например, для возбуждения достаточно абстрактного образа данного феноме́на не обязательно ощущать именно этот феноме́н, а можно воспользоваться некоторыми другими феноме́нами, значительно более доступными, но дающими ту же абстракцию (рисунки, фотографии, кино, радио, телевидение и другие).

Такие вспмогательные средства воздействия на наше мышление мы будем называть **внешними моделями**. Вообще **моделями** назовём внешние модели и образы, причём последние также будем называть **внутренними моделями**.

Среди внешних моделей мы будем рассматривать и такие, которые совсем не похожи на моделируемый феноме́н и, тем не менее, возбуждают в нашем мышлении образ моделируемого феноме́на. Происходит это благодаря специальной тренировке нашего мышления (**заучиванию значения**), в результате которой возникает более или менее устойчивая связь между ощущением такой модели, которую мы также будем называть **знаком**, и образом моделируемого феноме́на. Эта связь, называемая **ассоциативной**, заключается в том, что ощущение знака, после заучивания его значения, вызывает в нашем мышлении процесс (**интерпретацию** знака), приводящий к ощущению образа требуемого феноме́на (возможно и не только его).

Феноме́ны, предназначаемые нами для использования в роли знаков, будем называть **символами**. Основное требование, предъявляемое к символам – удобство обращения с ними. Обычно в роли символов используются наиболее доступные, обладающие достаточным разнообразием форм, легко вопсризводимые и запоминающиеся феноме́ны. Например, буквы, слова, компактные графические структуры, звуки и тому подобное.

В процессе мышления мы способны совершать над образами некотрые преобразования и получать при этом (**воображать**) новые образы (как, например, при абстрагировании). Различные преобразвания (**операции**) возможны и над внешними моделями. То есть между моделями существуют **связи**, **зависимости**. Образы, непосредственно связанные с ощущением феноме́на, будем называть **восприятиями**, а образы, полученные из восприятий после мыслительных операций над ними, будем называть **представлениями**. Наиболее абстрактные, связанные с использованием знаков представления будем называть **понятиями**. Между восприятиями, представлениями и понятиями трудно провести чёткую границу, однако это и не очень существенно. Совокупность понятий, используемых человеком (или сообществом), составляет его **знания**.

Мышление (отображение Мира) на уровне понятий, тесно связанное с использованием знаков и обменом с их помощью знаниями, мы будем называть **сознанием**. Для человека возникновение сознания связано с появлением второй сигнальной системы (речи) и социализацией человека. Понятие сознание используется и в другом смысле, как ощущение себя, но в этом смысле оно применимо не только к людям.

3. О логике. Оперируя моделями, мы стремимся, в конечном итоге, извлечь для себя определенное указание к действию в направлении удовлетворения наших потребностей. Только в этом и заключается полезность мышления. То есть мы способны реагировать на ощущения, отвечать на них действием, реакцией. Так или иначе результатом ощущения является изменение нашего состояния.

Если учесть, что модели могут иметь самые различные материальные формы (состяния нервной сети, звуки, графические структуры и т. п.) и могут

пребразовываться различными способами, то становится ясно, что в процессе оперирования моделями можно получить определенный, а не произвольный результат только в том случае, если это оперирование присходит по **правилам**, а не произвольно.

Какие-либо правила оперирования моделями будем называть **логикой**.

Благодаря логике модели, полученные по её правилам из исходных моделей, зависят от них, а значит в итоге зависят и от соответствующих феноме́нов. То есть **логика обеспечивает зависимость моделей от материи** (отображение материи, связь с материей, **смысл** моделей). В этой связи моделей с материей и заключается вся польза моделей.

Легко видеть, что может быть много различных логик. Однако, не все логики одинаково удобны, одинаково полезны.

4. Виды логик. Правила оперирования образами выражаются в форме определённой структуры человеческого мозга и автоматически вырабатываются методом естественного отбора в процессе развития человека как биологического вида и методом условных рефлексов в процессе жизни каждого человека, то есть **методом проб и ошибок**. Эти правила образуют логику, которую мы назовём **интуицией**.

Использование людьми внешних моделей позволяет им передавать модели друг другу (**общаться**). Особенно ценным для этого является использование знаков, позволяющее обойтись наиболее доступными средствами.

Но чтобы обмениваться знаковыми моделями необходимо выработать общие правила их применения (логику оперирования ими). Это осуществлено людьми в форме **языка** (его правил). Правила языка закреплены в интуиции людей. Овладение каждым человеком языковыми правилами происходит рефлекторно в результате живого общения с другими людьми, владеющими этими правилами и личного опыта. Таким образом, язык – исключительно общественное (**социальное**) явление.

Язык состоит не только из правил оперирования символами (**грамматики**), но и из самих символов вместе с их значениями (**семантики**, или **смысла**). Понятия языка обычно образуют **структуру понятий**, то есть множество понятий, связанных между собой понятиями. Именно в этой структуре отображается внешний мир.

С помощью языка ребёнок быстро овладевает основными, жизненно важными знаниями, накопленными обществом, то есть сознанием, становясь тем самым сознательным человеком. В своём дальнейшем развитии человек приобретает более специальные знания, определяющие его собственное место в жизни.

Такой язык, правила которого вырабатываются стихийно в результате живого взаимодействия людей друг с другом и природой, будем называть **живым языком**. Методом проб и ошибок логика живого языка хорошо отработана и в привычных человеку ситуациях его не подводит. Однако, стремительное развитие техники и науки, вторжение их в область необычных феноме́нов, делают часто логику живого языка бессильной, приводят к неоднозначному пониманию моделей различными людьми, к потере взаимопонимания.

Поэтому возникает необходимость создания **строгого языка**, то есть создания описания правил использования знаков, которое практически исключало бы неоднозначность понимания этих правил. Для описания этих правил мы вынуждены, не имея иных средств, воспользоваться живым языком. Несмотря на свои недостатки, живой язык **вполне пригоден** для описания правил строгого языка, так как предметы, подлежащие описанию в этих правилах – символы, очень обычны и доступны (таковыми мы их нарочно выбираем). В символах нас интересуют только их очевидные внешние признаки.

Целесобразно правила строгого языка выработать из правил живого языка, придав им сответствующую форму и устранив возможные неоднозначности понимания.

Описание правил строгого языка живым языком мы будем называть **грамматикой** (**логикой**) строгого языка. Общественное отображение Мира в структуре строгого языка будем называть **наукой**.

Теорией будем называть достаточно полную модель какого-либо феноме́на, построенную по правилам строгого языка. Слова в роли знаков теории называют также **терминами**. Понятия теории образуют **структуру понятий**, то есть множество понятий, связанных между собой понятиями. Мы будем говорить, что **понимаем** феномен, если наши знания о нём включены в единую структуру понятий (**мировоззрение**).

Язык современной науки ещё не вполне оформился, его правила ещё не зафиксированы вполне определённой грамматикой, то есть это ещё не вполне строгий язык, но язык этот уже доказал на примере крупнейших научных достижений свою состоятельность, способность удовлетворять насущные потребности людей. Наибольшей строгости, по-видимому, достиг **язык современной математики**. Однако в предлагаемой ниже теории мы не будем стремиться к использованию наиболее строгого языка, а ограничимся доступным автору языком, заботясь лишь о том, чтобы получить пригодную для практического применения теорию, обьясняющую основные факты современной физики. Логику математики как наиболее абстрактного (общего, всеобъемлющего) языка, будем называть **единой**.

5. Метод противоречий в логике. [08.07.03] В единой структуре понятий (теории, мировоззрении) правила логики могут допускать существование подструктур (формул и так далее), называемых, вообще говоря, **предложениями**, которые сами, по правилам этой логики, либо являются понятиями, либо не являются. Соответственно такие предложения будем называть **истинными** или **ложными**. Или, что то же самое, – **правильными** или **неправильными**.

Истинность или ложность предложений может либо просто объявляться (**определяться**), если предложение содержит вновь вводимое понятие, либо **выводится** по правилам логики, если это в них предусмотрено. Предложение содержащее вновь вводимое понятие обьявляется (**называется**) истинным, при этом вновь вводимое понятие называется **определённым**.

Если в соответствии с правилами логики предложение (понятие) оказалось одновременно истинными и ложным, то в теории существует **противоречие**, лишающее эти понятия **познавательной ценности** (**смысла**). Поэтому целесообразно либо переопределить это предложение, либо изменить правила логики (последнее для хорошей логики очень редко используется). В этом заключается **метод противоречий** в логике. Критерием **хорошей логики** является успешность её длительного и универсального практического применения.

Логика, в которой не возникает противоречий бесполезна, так как в теориях, построенных по её правилам, возможно всё, то есть она не даёт определённых ответов ни на какие конкретные вопросы. Такую логику назовём **инфинитной** в отличие от **финитной**. Так же бесполезна логика, в которой противоречия не устранимы (**противоречивая логика**). Кроме того логика должна позволять определять неограниченно развивающуюся структуру понятий (**конструктивная**, или **индуктивная логика**).

Логика современной математики выросла из логики живого языка и хорошо себя зарекомендовала. Противоречия, возникающие при её использовании, преодолимы и часто служат стимулом для развития теории. Принципами **математической логики** как раз являются **финитность, не противоречивость, индуктивность.**

Здесь уместно определить понятие идеи. **Идея** – это новорожденное (вновь определённое понятие), которое прежде, чем стать настоящим понятием, должно пройти испытание на выживаемость (проверку на непротиворечивость). Уничтожение идей (критика) почти столь же важно, как и их создание.

§2. Принципы познания.

1. Принцип детерминизма. Мы будем держаться представления о безоговорочной детерминированности (предопределённости) всех явлений. Повседневная жизнь, однако, показывает, что явления весьма существенно зависят от воли (желаний) людей. Есть ли здесь противоречие? Мы считаем, что нет. Хотя явление есть функция каких-то фундаментальных причин, предопределяющих его, зависимость эта часто опосредована и одним из промежуточных аргументов сложной функции, которой является явление, может быть воля человека, определяемая свойствами именно этого человека. Многие философы считают, что свобода воли не противоречит детерминизму (и даже ведет к нему). [Садбери, с. 290]. Хотя любое Ваше действие контролируется законами природы, эти законы вовсе Вас не игнорируют, а включают Вашу индивидуальность как частное условие. В этом суть свободы воли. Если кто-то думает, что предопределённость событий делает нашу активность бессмысленной, то на наш взгляд это совсем не верно, так как направленная активность является необходимым условием наших успехов. Иными словами, существует **судьба**, но “на судьбу надейся, а сам не плошай”.

В современной науке возобладала точка зрения, отрицающая детерминизм (см., например, [Блохинцев]). И для этого есть серьёзные основания, коренящиеся

в принятой интерпретации понятия вектора состояния в квантовой механике. Его вероятностная интерпретация хорошо согласуется с опытом и поэтому её невозможно отрицать. Однако эту вероятность, как и в классической статистике, детерминистский подход должен обьяснить недостатком информации о системе, наличием так называемых **скрытых параметров**, существование которых квантовая механика не исключает [Садбери, с. 272].

Отрицание детерминизма вызывает гносеологические трудности. С точки зрения детерминизма, всё, что может осуществится – осуществляется, что не осуществляется – значит не может. То есть детерминизм допускает лишь необходимость и не допускает, в строгом смысле, возможность. Без детерминизма в каждой ситуации нам предоставляется множество возможностей. Сколько же этих возможностей осуществляется?

– Если все, то мир разветвляется, теряя объективность. Ветвь выбирает субъект. Что тогда есть воля субъекта?

– Если одна, то почему именно эта? Кто её выбирает? Если природа – значит это необходимость и значит нет других возможностей, то есть мир детерминирован. Если не природа, то сверхестественная сила – Бог. Что тогда есть божья воля?

– Если подмножество всех возможностей, то возникают трудности либо первого вида, либо второго.

С точки зрения детерминизма этих трудностей нет, но взамен он требует активной позиции; его правоту можно доказать лишь конструктивно, создавая непротиворечивое детерминистское мировоззрение.

2. Принцип Оккама. Математика, развившаяся из повседневных практических потребностей людей, безусловно так или иначе отражает объективную реальность, самые общие и потому важные отношения. Каждое математическое понятие обладает богатым набором свойств и отношений с другими понятиями. Все эти понятия – уже существующие и вновь создаваемые, строятся по общим правилам, а потому связаны друг с другом и, через друг друга, с объективной реальностью. Мы говорим лишь о математических понятиях потому, что именно для них существуют достаточно твёрдые и эффективные правила оперирования.

Все возможные понятия построить и рассмотреть нельзя, поэтому из всего потенциального многообразия понятий рассматриваются лишь некоторые. То есть не следует думать, что, кроме вводимых понятий невозможны никакие другие, просто, эти другие понятия **пока** (или **вообще**) не играют роли в используемом нами способе отражения объективной реальности. А этот способ зависит от способа существования нашего сознания, от всей истории его развития.

В связи со сказанным, мы определяем не все возможные понятия, а лишь **основные** (, или **познавательно ценные**), руководствуясь стремлением наиболее просто получить практически полезную теорию.

Таким образом, конструируя нашу теорию, мы будем стремиться обойтись минимальным числом понятий, чтобы кратчайшим путем достичь практически полезных для нас результатов.

Такой принцип построения теории известен под названием **принципа** (**бритвы**) **Оккама**. Этот принцип, обусловленный потребностями **человека** можно было бы назвать ещё **антропным принципом построения теории**. (Вообще об антропных принципах смотри [Казютинский].) Антропный принцип отображения Мира в целом даёт **антропное представление Мира**. Оно не исключает другие резко отличающиеся представления Мира другими существами, но все такие представления (если они правильные) могут быть приведены в соответствие друг другу, хотя и не обязательно взаимнооднозначное, поскольку важность (познавательная ценность) тех или иных понятий для различных существ различна. Отсюда следует трудность взаимопонимания различных существ, которая, однако, может быть преодолима, если существа имеют достаточную способность к развитию представлений.

Таким образом, кроме правильности теории (построения её понятий в соответствии с принятыми правилами), для людей важна полезность (**познавательная ценность**) теории и её понятий. Познавательную ценность могут иметь и не правильные (ошибочные) теории, если ошибки достаточно легко устранимы или не существенны. Познавательная ценность теории зависит не толко от её **структуры** (взаимосвязи понятий) и правильности, но и от выбранного способа установления соответствия между понятиями и феноме́нами (то есть от **интерпретации**). Интерперетация понятий некоторой теории её авторами и другим человеком может быть соответствующей (то есть человек их **понимает**) и не соответствующей – не понимает. Понимание (**правильная интерпретация**) достигается в процессе **обучения**, включающего использование интуиции, личного опыта проб и ошибок, живого общения и обратных связей, когда обучающий делает различные проверки понимания обучаемого. В процессе применения теории интерпретация её понятий может изменяться (обычно в сторону лучшего понимания, то есть большей полезности понятий, хотя не всегда).

3. Принцип релятивизма и правда. Познавательная ценность понятий особенно велика, когда они не зависят от конкретного наблюдателя, то есть удовлетворяют **принципу релятивизма**. Логика каждого наблюдателя отображает внешний мир в понятиях этого наблюдателя, в том числе общественные (языковые) понятия находят отображение в личных понятиях. В структуре языковых понятий долго живут только общественно полезные (то есть релятивистские) понятия, которые и определяют смысл понятия **правда (истина, объективность)**, то есть понятие правды социально. Релятивистские понятия, вырабатываемые наиболее строгими правилами (логикой), по-необходимости использующие наиболее простые символы с наиболее абстрактным смыслом, генерирующие друг друга по простым правилам в любом количестве, имеющие наиболее абстрактный смысл (чи́сла), образуют **математику**.

§3. Роль математики в познании.

1. Существование. Современное понимание существования двоякое. С одной стороны это физическое понятие, означающее возможность обнаружения объекта наблюдателем. С другой строны это математическое понятие, означающее возможность построить в рамках используемой логики символьную конструкцию с заданными свойствами. Например, существование числа, удовлетворяющего заданному уравнению, существование математического объекта, удовлетворяющего заданному определению и т. п.

Если встать на точку зрения, что математика отражает объективную реальность, то между математическим и физическим пониманием существования разница не значительна. Чтобы вообще устранить эту разницу достаточно построить такие математические понятия, которые вполне отражали бы физические понятия, такие как пространство, время, физические поля, частицы, вещество, планеты, живые существа и, наконец, человека, то есть единственного известного нам наблюдателя, для которого всё, что он ощущает и есть **физика**. Если бы нам удалось развить математику до такого уровня, то тем самым мы устранили бы разницу между математическим и физическим понятиями существования. Это трудная задача, поэтому она до сих пор и не решена. И многие не верят в возмжность её решения. Однако, не доказано, что это не возможно, а поэтому есть смысл пытаться. Успешное решение этой задачи, означало бы, что вся материальность, вся объективность, вся независимсть от нашего сознания реального мира обусловлена объективностью, абсолютностью математических законов, которые одни и те же, на каком бы языке и с помощью какой бы символики мы их ни формулировали. Именно в этом **материальность идеальных** математических отношений.

2. Что изучает физика. Задачей математики является строгое (логичное) отображение наиболее общих свойств материи, по-возможности, не зависящее от наблюдателя. Мы говорим "по-возможности" потому, что средства отражения всё же определены наблюдателем и выбор объектов изучения в немалой степени диктуется интересами наблюдателя (то есть человека). Сам человек тоже является в перспективе объектом изучения математики, всё более конкретизирующей понятия по мере своего развития. Таким образом, математика – наиболее общая наука, изучающая в перспективе всё, что только возможно. Все остальные науки могут рассматриваться как специальные разделы математики, которые, однако, пока не включены в математику только потому, что не удовлетворяют её высоким стандартам строгости. Физика, например, уже сливается во многом с математикой. **Физику** мы будем считать специальной областью математики, которая **изучает наиболее общие свойства материи** именно **с точки зрения человека**. Другими словами, физика изучает мир в представлениях, удобных для человека и выбирает объекты изучения в соответствии с общими интересами человека. Если же сосредоточиться на специальных интересах, то получим подразделы типа химии, биологии и т. д. Таким образом, физика (да и вся наука в целом) является **антропным представлением**

Мира. Приведём цитаты, демонстрирующие, что развиваемые здесь взгляды не возникли на пустом месте и могут найти некоторую поддержку в научном мире:

"...Как я убеждён, при помощи составленных здесь уравнений будут разъяснены сокровеннейшие, до сих пор скрытые явления внутри атома, и на их основе должно оказаться возможным вообще свести все физические постоянные к математическим постоянным."

[Гильберт]

"...Если мы выразим настоящую эпоху, $2 \cdot 10^9$ лет, в единицах времени, определённых через атомные константы, то получим число порядка 10^{39}, которое определяет настоящее в абсолютном смысле. Не может ли так случиться, что все настоящие события соответствуют свойствам этого большого числа и, даже более общо, что вся история Вселенной соответствует свойствам всей последовательности натуральных чисел? На первый взгляд кажется, что Вселенная чересчур сложна для того, чтобы такое соответствие могло иметь место. Но я думаю, что такое возражение не может выдвигаться, ибо число 10^{39} *невероятно* сложно именно потому, что оно столь огромно. У нас есть краткий способ его записи, но это не должно закрывать нам глаза на то, что оно должно иметь чрезвычайно сложные свойства.

Значит, есть возможность, что древняя мечта философов связать всю Природу со свойствами целых чисел будет когда нибудь осуществлена. ..."

[Дирак]

3. Замечания о множествах. В основаниях математики лежит понятие множества. Принимая традиционные способы использования этого понятия в математике, мы лишь заметим, что настаиваем на таком определении множества, которое **не допускает возможности множеству быть своим собственным элементом** (что, разумеется, не запрещает множеству принадлежать самому себе).

Ясно, что при этом не может существовать множества всех множеств, так как оно должно включать и себя в качестве своего элемента. Это сразу устраняет такое противоречие как антиномия Кантора [Френкель, с. 19]. Также устраняется и антиномия Рассела [Френкель, с. 16], в которой речь идет о множестве всех множеств, не являющихся собственными элементами. Приняв наше условие, получаем, что множеством всех множеств не являющихся собственными элементами является множество всех множеств, а такового не существует.

Следуя ван дер Вардену (слегка модифицируя формулировку), понятие множества мы определили бы так: Объектами математики являются наиболее общие понятия (например, числа). Свойство, которым обладает или не обладает каждое такое понятие в отдельности, приводит к понятию **множества**, или **класса**; **элементы множества** – это те самые понятия, которые обладают данным свойством. Понятие множества можно рассматривать как абстракцию его элементов, в частности, **бесконечность** – как абстракцию очень больших чисел. Элементы этой абстракции сами этой абстракцией (то есть бесконечностью) не являются.

4. Бесконечность и познаваемость Мира. Математика позволяет индуцировать сколь угодно много понятий, что соответствует представлению о бесконечно сложном Мире. Однако сам принцип индукции понятий означает их иерархическую взаимосвязь (структуру), то есть упорядоченность от простого к сложному, что позволяет людям постепенно наращивать свои знания (познавать Мир) и развиваться самим. Развитие Мира ощущается людьми как **время**. Субъективному ощущению времени человеком, как мы увидим ниже, можно дать объективное соответствие в форме **возраста Вселенной**. Такой процесс развития в принципе бесконечен, то есть апокалиптические представления о Мире не обоснованы. Наше нынешнее состояние развития вовсе не вершина цивилизации, а лишь скромное начало бесконечной перспективы.

5. Богатство мира чисел. Одним из простейших понятий математики является число. Числа определены таким образом, что между ними существует бесконечное множество различных связей, отношений. Например, мы можем говорить о сумме, разности, произведении, частном и других действиях над числами, результатом которых опять является число. Каждое число индивидуально и очень богато свойствами и отношениями с другими числами. Например, каждое натуральное число может быть единственным образом разложено в произведение простых чисел или может быть разложено (вообще говоря, не однозначно) в сумму четырёх квадратов. А в сумму трёх квадратов можно разложить уже не каждое натуральное число. Интересны отношения натуральных чисел как решений диофантовых уравнений. В силу неполноты системы натуральных чисел относительно арифметических операций, решения диофантовых уравнений очень нетривиальны. Они изучаются в **теории чисел**. Всё это мы говорим к тому, что **мир чисел весьма богат** и что имеет смысл попытаться с их помощью отобразить физический мир. Сочетая в себе индивидуальность и бесконечное разнообразие, числа и их множества могут отображать как абстрактные так и конкретные феномены.

Для наглядной иллюстрации богатства мира чисел мы предлагаем обратить внимание на пример так называемого **множества Манделброта**. Оно очень нетривиально, хотя определяется на комплексной плоскости очень простой рекуррентной формулой

$$z_{i+1} = z_i^2 + z_0. \tag{1}$$

Оказывается, что при заданном z_0 последовательность точек z_i либо ограничена окружностью радиуса 2, либо не ограничена. В первом из этих случаев точка z_0 принадлежит множеству Манделброта. Множество Манделброта принадлежит к так называемым **фрактальным множествам** (иначе говоря, к **множествам с дробной размерностью** (2.8.1.1)). Это множество, хотя и ограничено окружностью радиуса 2, оно **структурно бесконечно**, то есть рассматривая его со всё большей и большей степенью увеличения, мы увидим всё больше и больше подробностей. Хотя множество Манделброта не имеет прямого отношения к предлагаемой теории, оно эффектно демонстрирует, что очень сложным миром (например,

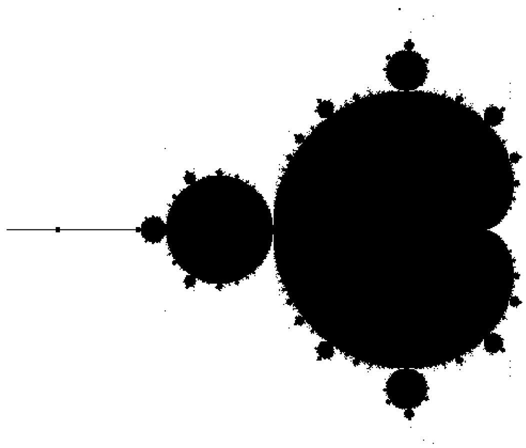


Рис. 101.1. Множество Манделброта (глобальный вид).

Манделбродией) может управлять очень простой закон (Бог, Судьба и т. п.). На рисунке 1.1 с помощью компьютерной программы изображена вся Манделбродия, а на рисунке 1.2 мы видим один из её фрагментов при увеличении в 1000 раз. Увеличивая дальше, можно увидеть всё новые и новые формы структурных элементов.

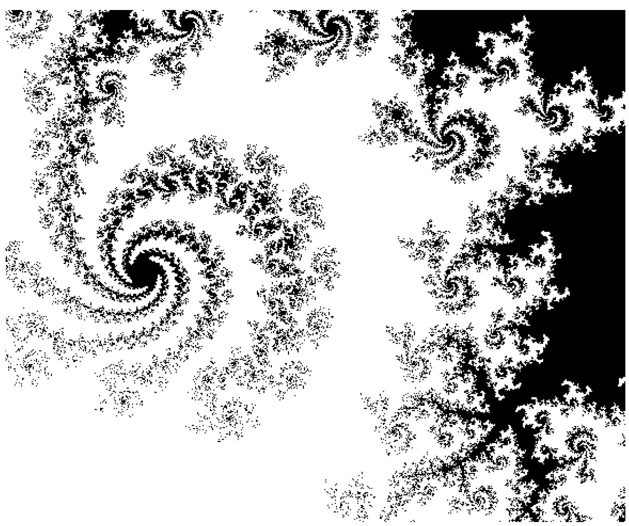


Рис. 101.2. Фрагмент множества Манделброта (увеличение в 1000 раз).

6. Вероятность события. Повторяя k раз эксперимент данного класса, мы, вообще говоря, можем m раз, где

$$0 \leqslant m \leqslant k, \tag{1}$$

получить результат каждого эксперимента в виде события заданного класса. Отношение

$$f_k = \frac{m}{k} \tag{2}$$

назывваается **частотой** такого события в серии из k экспериментов. Очевидно

$$0 \leqslant f_k \leqslant 1. \tag{3}$$

Если с ростом числа экспериментов k частоты $f_1, f_2, \ldots, f_k \ldots$, начиная с некоторого номера $k = n$ вплоть до $k = N > n$, удовлетворяют условию

$$|\langle f_{k-1}\rangle - \langle f_k\rangle| < \varepsilon, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon \ll 1 \tag{5}$$

– заранее заданное, достаточно малое положительное число,

$$N \gg n \tag{6}$$

– заранее заданное достаточно большое число,

то средняя частота

$$P = \langle f_k\rangle = \frac{\sum\limits_{k}^{N} f_k}{N} \tag{7}$$

называется **вероятностью** событий заданного класса в условиях эксперимента данного класса.

Числа ε и N характеризуют **качество** (**точность**) **вероятности**, которое тем выше, чем сильнее неравенства (5) и (6).

Понятие вероятности предполагает существование **случайности**, **хаоса**. Но, с точки зрения детерминизма, в Мире нет хаоса. Хаос есть лишь в наших представлениях о Мире. Тем не менее понятие хаоса полезно, как всякое понятие, абстрактно отображающее феномены Мира. На нём основан **статистический метод** познания.

7. Информация. **Информация** – субъективное понятие, характеризующее результат (исход) некоторого наблюдения, если наблюдатель достоверно не знает этот исход заранее. (Под **наблюдением** будем понимать ожидание ощущений в течение некоторого времени.) Тогда, узнав исход этого наблюдения, наблюдатель получает **информацию**.

Информация может быть охарактеризована количественно, если наблюдатель знает вероятности всевозможных исходов наблюдения. Понятие вероятности определяется аксиоматически, то есть набором известных его свойств, включающих экспериментальные. Существование конкретной вероятности требует экспериментальной проверки. **Количество информации** J, приносимое наблюдателю реализовавшимся исходом, вероятность которого P, принято определять в виде логарифма (обычно по основанию 2) от P, взятого со знаком “$-$”.

$$J = -\log_2 P.$$

Так как $P \leqslant 1$, то J всегда положительно.

При таком определении, количество информации оказывается **аддитивной** величиной, в том смысле, что количество информации от нескольких независимых

событий исхода складывается, так как вероятность такого множества событий равна произведению вероятностей каждого из них

$$J = -\log_2 P = -\log_2(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n) =$$

$$= -\log_2 P_1 - \log_2 P_2 - \ldots - \log_2 P_n = J_1 + J_2 + \cdots + J_n.$$

Поскольку символы принадлежат заранее определённому конечному множеству, то наблюдение символа даёт вполне определённое количество информации. То есть количество информации, передаваемое последовательностью символов имеет вполне объективный смысл.

Если между некоторыми понятиями и последовательностями символов удаётся установить взаимно однозначное соответствие, то эти понятия тоже можно характеризовать количеством информации.

Заметим, что в детерменистской теории понятие вероятности не имеет никакого мистического налёта. Это вполне объективное понятие, связанное со средним значением некоторой величины во временно́м ряду.

С понятием информации связано понятие **энтропии** (H), означающее среднее значение информации всех возможных исходов наблюдения данного класса [Боровков, с. 224]

$$H = \sum_i J_i p_i = -\sum_i p_i \log_2 p_i.$$

8. Познавательная ценность математики и теорема Гёделя. По поводу теоремы Гёделя можно, например, прочитать [Манин]:

“Успехи математики и математизированных областей знания приводили многих глубоких мыслителей к надежде на существование нескольких универсальных законов, из которых все остальные истины могут быть выведены чисто теоретически. В европейской традиции эти надежды связаны с именами Лейбница и Декарта. До сих пор их продолжают высказывать некоторые физики, задумывающиеся над структурой наших знаний о природе.

После работы Гёделя, однако, мы можем быть уверенными в беспочвенности этих надежд. Если даже оставить в стороне вопрос, насколько сложен мир, мы знаем, что метод дедуктивных выводов недостаточно мощен. Его не хватает даже на то, чтобы вывести из конечного числа принципов все истинные утверждения о целых числах, формулируемые на языке школьной алгебры: таков смысл теоремы Гёделя.”

Сказанное здесь несомненно верно, но это не должно обескураживать нас относительно возможностей математического отображения Мира. Ведь **построение** физической теории средствами математики на основе некоторых универсальных принципов вовсе не является **дедуктивным выводом** из этих принципов. Конструируя теорию, мы создаём некоторую структуру понятий, способную отобразить Мир. Эта теоретическая конструкция имеет смысл только при подходящем сопоставлении с Миром. “Великие мыслители”, должно быть, имели в виду именно такой “чисто теоретический” способ получения “остальных

истин" из "универсальных законов". Конечно, "метод дедуктивных выводов недостаточно мощен", но такое основное математическое понятие как множество, может иметь достаточную **мощность**, чтобы отобразить любое, ничем не ограниченное количество понятий, объединённых в сколь угодно сложную структуру. В этом смысл неограниченной познавательной ценности математики. Все правильные математические теории можно приспособить для отображения каких-то материальных объектов (хотя бы взаимоотношений между соответствующими символами и нами). Проблемы физики лишь в интерпретации этих теорий.

Математика, как способ построения сколь угодно сложных понятий, так или иначе отражающих объективную реальность, уже сейчас может претендовать на звание Теории Всего. Уже сейчас математика генерирует множество фундаментальных физических понятий, например понятия пространства, времени, аналитической механики, квантовой механики, групповые представления частиц. Конечно математика это язык. Но язык это всегда не просто словарь. Язык становится языком только после сопоставления с объективной реальностью. В этом смысле любая теория, в том числе физика – это язык. Среди множества теорий (языков) математика обладает наибольшей общностью (абстрактностью), при максимальной строгости. Возможности математики раскрываются постепенно по-мере построения новых непротиворечивых понятий, вытекающих как из уже построенной структуры математики (**дедукция**), так и из потребностей человеческой практики (**индукция**). В структуре математики можно определить место и для физики и для других наук, которые, однако, ещё не вполне удовлетворяют требованиям математики по строгости правил построения. Особенность физики в её антропности, то есть в прибли́женности её понятий к наиболее общим потребностям именно человека.

§4. О культуре.

1. Культура. Совокупность понятий используемых человеком (или сообществом) мы определили как его знания. Все потребности, знания и умения образуют **культуру**. Культуру больших сообществ (стран и даже всего человечества) часто называют **цивилизацией**. Источником культуры являются естественные потребности человека из которых возникают знания, умения и связанные с ними вторичные – **культурные потребности**, из которых возникают новые знания и умения, новые культурные потребности и так далее до бесконечности.

Все знания, организованные по правилам строгого языка, как мы уже говорили, образуют **науку**. Наука подразделяется на **науки**. Таким образом наука является частью культуры. Наука не включает всех знаний, то есть можно говорить о **ненаучных знаниях**. Плодами науки являются умения, наиболее мощным проявлением которых являются промышленные технологии,

обслуживающие потребности людей. Наука является инструментом приспособления к трудностям жизни.

Отношения абстрагирования создают иерархическую (древовидную) организацию понятий, то есть понятия могут быть более общими или менее общими, более конкретными и менее конкретными. Наиболее общие представления человека (или сообщества) о его месте, смысле существования, принципах поведения в Мире и о его устройстве образуют **мировоззрение**. Как и вообще знания, мировоззрение может быть научным и ненаучным. Наиболее важная, общая (социальная) часть мировоззрения человека содержится в живом языке. То есть язык – это гораздо больше, чем инструмент. В нём отображаются весьма важные отношения, существующие в окружающей человека среде.

Под **математизацией мировоззрения** мы будем понимать создание научного мировоззрения, то есть развитие и постепенное (по мере повышения строгости) включение мировоззрения в состав точных наук и даже математики.

Мировоззрение всегда играло в обществе важную роль так как влияло на поведение людей, на их имущественные, а следовательно и властные отношения, на политику властей. Общественная важность мировоззрения породила такой феномен культуры как **философия**. Философия (этимологически – любовь к мудрости) давно занимает лучшие умы человечества. Существует очень много взглядов на определение философии, что позволяет и нам иметь свой собственный взгляд. Мы не можем определить философию как науку (разве, что в историческом смысле), а будем рассматривать её лишь как творческий процесс, то есть как поиск наилучшего с точки зрения философа мировоззрения.

Представления о том, что такое хорошо, а что такое плохо выражаются в различных нормах жизни, вырабатываемых самой жизнью методом проб и ошибок. Личные нормы жизни человека это его **совесть**. Общественные нормы выражаются в **этике**, **морали** и **нравственности**. С ними связано понятие **справедливости**. Нормы, обеспечиваемые государством называются **государственными законами**. **Государство** предназначено для обеспечения организации (логики поведения) общества. Область культуры, где решаются актуальные и перспективные вопросы общественных отношений, называется **политикой**.

Человек, как сложный высокочувствительный организм, может находится в различных душевных состояниях (**настроениях**). Кратковременные душевные состояния обычно называют **эмоциями**. Нормы настроений и эмоций мы будем называть **эстетикой**. Эти нормы очень важны с точки зрения психического здоровья людей. Они обслуживаются такой частью культуры как **искусство**. В искусстве важную роль играет **творческий процесс**, то есть процесс поиска произведения искусства, удовлетворяющего абстрактно воображаемому произведению – **эстетическому идеалу**. Искусство является эффективным инструментом управления настроениями, стремлениями и потребностями людей.

Отметим, что **творческий процесс** означает вообще всякое созидание нового. То есть творчество присуще любым видам культурной деятельности. Необходимые

элементы творчества это во-первых: **цель**, то есть ожидаемый феномен (**идеал**), определяемый абстрактно желаемыми свойствами, во-вторых: **попытка** (**проба, идея**), то есть создание пробных реализаций идеала (**генерация идей**), в-третьих: **критика**, то есть отбор экземпляров, удовлетворяющих свойствам идеала. Второй и третий элементы творчества объединяются понятием **поиск**. Один и тот же человек редко сочетает в себе все необходимые элементы творчества в лучшем виде. Поэтому **творческие люди** могут в разной степени характеризоваться во-первых как **мечтатели, фантазёры**, то есть указатели целей, обладающие развитым воображением, во-вторых как **генераторы идей** (даже их, на первый взгляд, "бредовые идеи" могут оказаться ценными), в-третьих **критики**, способные из потока идей отсеять негодные.

Нормы физического состояния людей обслуживаются **физкультурой** и **здравоохранением**.

Культура вырабатывается в человеческом обществе тысячелетиями, идентифицирует его, то есть потеря её равносильна гибели этого общества. Поэтому здоровое общество делает всё, чтобы сохранить и развить культуру. Эта задача решается прежде всего в форме **библиотек**, **музеев**, **архивов** и **образования**, то есть передачи культуры новому поколению людей. В этом первостепенна роль **учителя**.

О культуре можно говорить бесконечно. Мы же закончим упоминанием о такой важной части культуры как религия. Религия даёт ответы на самые интимные вопросы мировоззрения, не требуя большого образования. Религиозные знания предлагаются на веру в виде, не требующем большой мыслительной работы. В этом широкая привлекательность религии. Авторитет религии поддерживается её консерватизмом, древностью её традиций и обрядов. Древность религиозных взглядов доказывает их жизнеспособность, то есть значимость в жизни людей. Культурная ценность религии сохраняется в её нормах жизни и имеет большое психологическое и историческое значение. В конкретных религиях Бог воплощён в конкретных идеалах. Религий существовало много, но далеко не все из них выжили. Они медленно эволюционируют и взаимодействуют. Естественный отбор религий и традиций обеспечивает для наиболее устойчивых (долгоживущих) из них общественную значимость, основанную на жизненном опыте, игнорировать которую неразумно. В условиях конкуренции культур, опора на устоявшуюся религию может иметь жизненно важное значение для любой культуры.

Консерватизм и отсталость религиозных знаний – не только их недостаток, но и достоинство, так как такие знания проходят долгий отбор на совместимость с психикой основной части общества, что важно для его здоровья.

Опасность вражды различных религий очевидна. Основой единения религий является единство Мира (Бога), который они отображают. Необходимо осознать, что представления различных религий отображают в конечном итоге одно и то же и поэтому могут в основе переводиться с языка понятий одной религии на язык понятий другой.

С религией нельзя смешивать **оккультизм**, под которым мы будем понимать ненаучные и нерелигиозные представления, нарочито таинственные, основной целью которых является извлечение выгоды из невежества людей и их естественного желания легко избежать какие-то трудности жизни или безвыходные ситуации, где остаётся уповать лишь на чудо. Оккультизм обычно маскируется под религию или науку, паразитируя на некоторых их представлениях и терминах, используя их в произвольном смысле. Например, астрология паразитирует на астрономии, сектантство – на конкретной религии. Вне всякой связи с их определением, затасканы такие термины как энергия, биополе и другие.

Наш мир иерархичен, то есть существование чего-то сложного опирается на существование более простого. Всё сложное существует благодаря простому. В частности, существование живого опирается на существованее минерального, существование человека нуждается в существовании животных. Культура рухнет без опоры на религию. Игнорирование своих корней, происхождения, традиций, своей принадлежности системе – гибельно. Не даром в эмбрионе запечатлена история происхождения вида.

2. Сознание как культурное явление. Животные отражают Мир в своей личной памяти практически индивидуально, если не считать элементы подражания и поведенческие инстинкты, передаваемые генетически. Человек же кроме этого, посредством языка, широко использует социальное отражение Мира (имеет **сознание**). **Сознание** – это способность с помощью языка пользоваться культурой, то есть социальным отражением Мира.

3. Наивная концепция Мира. Ограничиваясь очень наивными понятиями, современную картину Мира мы кратко нарисовали бы так:

Время началось ярчайшей вспышкой реликтового электромагнитного излучения (света). От этого Начала свет вечно разливается поровну во все стороны, образуя расширяющуюся Вселенную в форме шара. Время и пространство связаны между собой так, что любое место во Вселенной можно считать её центром. Яркость реликтового света убывает по мере расширения Вселенной. Когда реликтовый свет был ещё очень яркий из него выделилось горячее вещество, которое затем остывало. Вещество под действием всемирного тяготения конденсируется в звёзды и планеты, вращающиеся вокруг звёзд. Пары́ вокруг некоторых планет, остывая пролились на них дождём. Возникли реки и океаны. В океанах идёт достаточно быстрая химическая эволюция вещества. Некоторые частицы вещества имеют такие свойства (признаки), что могут стимулировать в окружающей среде реакции, продукты которых имеют такие же признаки. Это – простейшее живое вещество. Живое без конца распадалось и рождало живое, на него похожее, но чуть-чуть другое. Что лучше приспособлено к жизни выживало в большем числе и вытесняло собой то, что хуже приспособлено. Так жизнь развивалась и развилась до нашего существования и дальше развиваться будет.

Не очень простая (но зато гораздо более подробная и строгая) теория, которую мы ниже предлагаем, согласна с этой наивной концепцией.

4. Руководящая идея этой книги. Ге́ном этой теории является лишь **идея детерминизма** (предопределённости всех событий). Если последовательно развивать эту идею, то она как бы сама обрастает всеми необходимыми понятиями, организует их в единую структуру, впитывающую житейский и научный опыт и дающую новые результаты. Детерминизм – это единственная догма всей книги. Оценку этой догме, как всякому гену, даст сама жизнь: выживет или не выживет. Принятый здесь метод познания – генерация идей и сопоставление их с научным опытом с целью **элиминации лжи**.

§5. Краткое изложение основных идей.

(Понимать это краткое изложение в первом чтении не обязательно.)

1. Проблемы электродинамики и пути их решения. Классическая электродинамика является релятивистской теорией и доказала на практике свою состоятельность. Однако в микроскопических масштабах возникают проблемы. Признаком неблагополучия электродинамики в микромасштабах считается самоускорение заряженной микрочастицы под действием реакции собственного излучения, что нарушает закон сохранения энергии. Экспериментальные исследования взаимодействия электрона с другими частицами приводят к представлению о точечности его заряда. Однако, в этом случае энергия его электромагнитного поля получается бесконечной.

Причиной этого неблагополучия считается неквантовый характер электродинамики, в которой отсутствует постоянная Планка $\hbar$. Этих трудностей позволяет избежать квантовая электродинамика, но и она не отвечает на все электродинамические вопросы. Например, не известно почему квантуется сам заряд, то есть почему все элементарные заряды одинаковы по модулю и почему они именно такие? Почему устойчив заряд, хотя его части отталкиваются? “…если рассматривать отдельные элементы его [электрона] заряда и считать справедливым закон Кулона, то непонятно, почему электрон существует несмотря на громадные силы взаимного отталкивания этих элементов заряда” [Беллюстин, с. 124]. В общем и квантовая электродинамика не полна.

До возникновения проблем взаимодействия заряда с собственным электромагнитным полем классическая электродинамика кажется безупречной. Возникает впечатление, что между ней и квантовой электродинамикой остаётся незаполненный пробел. В этой теории мы предлагаем заполнить этот пробел. Начнём с проблемы не сохранения энергии при самоускорении заряда. Она возникает лишь в том случае, если считать массу заряда постоянной. Если же энергия, требуемая на самоускорение обеспечивается соответствующей потерей массы заряда, то закон сохранения энергии будет выполняться. Убывание также самого точечного заряда (за счёт непрерывно истекающего тока) позволяет нейтрализовать расходимость значения электромагнитной массы точечного заряда расходимостью отрицательной энергии истекающего тока в потенциале этого заряда. Более того, одно лишь

требование релятивистской ковариантности 4-импульса точечного заряда приводит к связи его массы с кривизной мировой линии в данной точке

$$m = \frac{2}{3}q^2\frac{d(w_\nu w^\nu)/ds}{w_\mu w^\mu}, \tag{1}$$

где $w^\mu = d^2x^\mu/ds^2$ – 4-х-мерное ускорение. То есть масса точечного заряда приобретает **геометрический смысл**. При этом возникает дифференциальное уравнение пульсаций массы (**массовое уравнение**) и **уравнение движения точечного заряда**.

Встав на этот путь, мы должны объяснить – что такое элементарный заряд. В самой электродинамике это понятие не определяется. Электродинамика, однако, содержит требование сохранения заряда и его релятивистской инвариантности. Это сохранение возможно только в том случае, если 4-ток j^μ (временно́й компонентой которого является плотность заряда) представи́м в форме

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u), \tag{2}$$

где u – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая уравнению Клейна-Гордона- Фока

$$\Box u = -k^2 u, \tag{3}$$

где k^2 – вещественная функция. Действительно, без условия (3) форма (2) возможна для любого 4-вектора j^μ, а при условии (3) легко показать, что необходимо

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \tag{4}$$

то есть имеем закон сохранения заряда. Если j^μ – общий 4-ток во всём 4-пространстве, то скалярную функцию u будем называть **единым полем**. Называя это поле единым, мы указываем на то, что уравнение (3) является общим для всего 4-пространства. Поэтому должно быть

$$k^2 = \text{const}.$$

Единое поле для заданного значения k назовём **космосом**. Тогда спектр волновых векторов k^μ фурье-разложения единого поля (**единый спектр**) должен лежать на гиперсфере 4-радиуса $k = \sqrt{k^\mu k_\mu}$ спектрального пространства, то есть

$$k^\mu k_\mu = k^2 = N. \tag{5}$$

Находясь на детерминистских позициях, будем искать происхождение такого спектра в отношениях между числами. Здесь возникает мысль, что этот спектр задаётся диофантовым уравнением вида (5) (возможно при **дополнительных условиях**), то есть компоненты 4-вектора k^μ и число N в (5) должны быть целыми в некоторой **основной системе координат**. При этом спектр,

состоящий из **разрешённых** (находящихся на конечных расстояниях друг от друга) **спектральных точек**, не тривиален и статистически симметричен в преобразованиях Лоренца. Важно, что такой спектр объясняет **происхождение метрики** наблюдаемого пространства-времени.

Различным значениям числа N соответствуют различные единые поля, то есть различные возможные космосы. Поэтому число N будем называть **космическим номером**. Значение космического номера для данного наблюдателя определяется **антропным принципом**, то есть принадлежностью наблюдателя к данному космосу.

Решения диофантова уравнения необходимо брать в поле целых чисел, так как в более широких полях (например, в поле рациональных чисел) соответствующее единое поле не будет определённым в силу неопределённости преобразования Фурье для не изолированных спектральных точек.

Мощным методом анализа единого поля является использование законов сохранения. Так называемый **Лагранжев формализм** даёт универсальный способ отыскания сохраняющихся величин и уравнений их движения, что составляет **суть механики**. Величины, сохранение которых является следствием инвариантности уравнений движения при сдвигах и вращениях, называются соответственно **импульсом** и **моментом импульса** (**теорема Нётер**).

Релятивистская инвариантность уравнения (3) обеспечивает, по теореме Нётер, законы сохранения импульса и момента импульса.

Симметрии единого спектра порождают соответствующие симметрии в координатном представлении единого поля, что приводит к понятию **Вселенной**, ограниченной изотропным конусом одной 4-точки (**Начала**). В пространстве Вселенная изображается расширяющимся во времени шаром радиуса T, где T – **возраст Вселенной**.

Уравнение (3) даёт модель точечного заряда в виде решения

$$u = A\cos(\omega t + \varphi)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\varepsilon i r \varkappa}, \qquad (6)$$
$$\varepsilon = \pm 1, \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^2.$$

К решениям этого типа существует **синтетический подход**, дающий такие модификации этого решения, которым соответствует криволинейное движение точечного заряда.

Согласно (2) и (6) из особой точки, содержащей медленно убывающий заряд, вытекает слабый пульсирующий ток, что приводит к медленному убыванию (по степенному закону) точечных зарядов и к их микропульсации. Плотность энергии этого тока в электромагнитном поле может иметь отрицательные значения и зависит от калибровки потенциала. Оказывается, что подходящим выбором калибровки можно взаимно уничтожить энергию электромагнитного поля, сопутствующего точечному заряду и энергию истекающего из точечного заряда тока. При этом энергия точечного заряда определяется только его массой, которая может быть определена как параметр формы мировой линии точечного заряда (**протистона**).

Мы покажем, что 4-ток Вселенной состоит из двух частей различного характера: дискретного времениподобного 4-тока точечных зарядов и истекающих из них пространственноподобных сплошных 4-токов. Плотности сплошных 4-токов пренебрежимо малы по сравнению с дискретными. В силу пространственноподобности сплошных 4-токов их скорость сверхсветовая. При этом они не могут переносить энергии. Равенство абсолютных значений точечных зарядов обеспечивается их естественным нормированием в едином поле. Непрерывно теряя заряд и энергию, точечные заряды ускоряются, вследствие чего, при космологически большом возрасте Вселенной, скорости точечных зарядов ультрарелятивистские. Это приводит к практической невозможности их взаимной нейтрализации (в отличие от сплошных 4-токов). Поэтому общий (нулевой) заряд Вселенной распадается на две равные (по модулю) сохраняющиеся части, состоящие только из положительных и только из отрицательных точечных зарядов. Число зарядов в каждой такой части растёт с возрастом Вселенной и может быть найдено из анализа корелляции функции (6) и единого поля.

Решение уравнений эволюции массы и движения протистона (с учётом возмущения микропульсациями заряда), даёт мировую линию протистона, фрагментированную на Г-образные детерминированные отрезки (**полушаги**). Один конец каждого полушага **кривой**, а другой практически **прямой**. Все полушаги гладко стыкованы друг с другом в **пары** своими кривыми концами и лежат в одной плоскости, образуя **шаг**. Шаги стыкованы друг с другом своими прямыми концами, но при неоднозначно определённой ориентации плоскостей шагов. Поэтому мировая линия, будучи детерминированной на каждом шаге, на большом числе шагов **макроскопически свободна** (как некоторая цепь). Для исследования движения протистона за счёт этой макроскопической свободы эффективен статистический метод, который с использованием Лагранжева формализма приводит к понятию **силы Лоренца**.

Каждому шагу протистона соответствует по одному акту излучения и поглощения, что связано с заполненностью Вселенной шумоподобным электромагнитным полем (**протошумом**).

Заряд и масса протистона убывают с возрастом Вселенной. При этом растёт число протистонов и растут их средние скорости, так что протистоны образуют **ультрарелятивистский газ** (вообще говоря, это плазма, которую можно считать газом из-за слабости взаимодействия частиц очень большой массы). Этот газ (вместе с протошумом) является универсальной средой, находящейся в некотором термодинамическом равновесии (**физический вакуум**), нарушения которого проявляются как гравитационные явления. Оказывается, возбуждения этой среды подчиняются волновым законам квантовой механики, что заполняет пробел между классической и квантовой механикой.

2. Основные понятия детерминированной физики (ДФ). Теперь изложим кратко другой (конструктивный) подход к основным физическим понятиям.

Наиболее общим и, вместе с тем, наиболее элементарным математическим

понятием является натуральное число. Каждое натуральное число представимо своим бесконечным множеством способов в виде комбинации других чисел посредством математических операторов. Иными словами, это число порождает свой **частный мир** собственных представлений. Это число N назовём **номером частного мира**.

Частный мир будем называть **космосом**, если он порождается представлениями своего **номера** в виде:

$$N = k^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2, \tag{1}$$

где n_μ – целые числа, а знак k имеет смысл:

$$k/|k| = (-1)^{n_0}. \tag{2}$$

Каждое такое представление числа N будем называть **спектральной точкой космоса**. Множество всех спектральных точек космоса будем называть **космическим спектром**, или **спектральным представлением космоса**.

Космический спектр принадлежит **спектральному пространству**, являющемуся расширением множества **целых** спектральных точек n_μ до множества **действительных** точек 4-х-мерного **спектрального пространства**.

Бесконечное множество спектральных точек распределено в спектральном пространстве весьма нетривиально (см. рис. 103.4) и тем самым предопределяет весьма нетривиальные свойства космоса, являясь образно говоря его “книгой судеб” или “скрижалями истории”.

Представляя мировой спектр суперпозицией δ-функций (**плотностью космического спектра**) и применяя к ней обратное 4-х-мерное преобразование Фурье, получим представление космоса **единым полем** в **пространстве-времени** (X^μ). Условие (2) необходимо делает это поле комплексным и нетривиальным.

Легко видеть, что единое поле удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока (**КГФ**)

$$\Box u = -k^2 u, \tag{3}$$

которое определяет универсальные (не зависящие от времени и места) свойства (**законы**) единого поля. Эти законы удовлетворяют **принципу относительности**, смысл которого в том, что уравнение (3) ковариантно в **преобразованиях Пуанкаре** (то есть в трансляциях и преобразованиях Лоренца).

Космический спектр обладает рядом симметрий, порождающих в частности центр симметрии (**Начало**) в пространстве-времени. Изотропный конус Начала назовём **границей Вселенной**. Времениподобную полость этого конуса будем называть **Вселенной**. При этом в плоском пространственном сечении **мгновенная Вселенная** представляется линейно расширяющимся во времени шаром.

Интервал от данной точки до Начала будем называть **абсолютным временем** этой точки или **возрастом мгновенной Вселенной**, имеющей центр в этой точке. Множество всех точек с одинаковым абсолютным временем будем называть **абсолютным пространством** (**Вселенной**).

Усредняя плотность мирового спектра, по его гиперсферическому носителю, получим **регулярную компоненту космического спектра**. Если из космического спектра вычесть регулярную компоненту, то оставшаяся компонента имеет нерегулярный характер и мы будем называть её **флуктуационной** или **шумовой**. Регулярной и шумовой компонентам плотности космического спектра соответствуют **регулярная** и **шумовая** (**флуктуационная**) **компоненты единого поля**.

Мы покажем, что регулярная компонента единого поля во Вселенной имеет характер почти синусоидальной, почти плоской комплексной волны, затухающей обратно пропорционально возрасту Вселенной, которую назовём **глобальной волной**. Её можно разложить на **“+”** и **“−”-компоненты** (в смысле знака частоты). Можно считать, что вне Вселенной глобальной волны нет, так как там она убывает по экспоненте.

Космический спектр и однозначно связанное с ним единое поле будем называть **фундаментальными представлениями космоса в пространстве-времени**. Они определяют само пространство-время и являются по определению наиболее полными (конкретными) представлениями космоса в пространстве-времени.

Счётное множество всех космосов в некотором смысле даёт полное представление Мира. Возможны и принципиально другие (не космические) представления Мира, но это будут уже не пространственно-временны́е представления. В любом случае их можно связать с космическими представлениями в силу единства математической логики.

Дополнительное условие (2) обеспечивает комплексный характер единого поля, что, как увидим, делает возможным 4-токовое представление единого поля.

3. 4-токовое представление космоса. От представления космоса единым полем u можно однозначно перейти к представлению космоса **плотностью 4-тока** j^μ по формуле

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u \bigtriangledown^\mu u^* - u^* \bigtriangledown^\mu u). \qquad (1)$$

Легко показать, что из (1.3) вытекает **закон сохранения заряда** q, **плотность** которого ϱ является временно́й компонентой 4-тока

$$j^\mu = (\varrho, \mathbf{j}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{j}$ – **плотность тока**.

Этот закон записывается в форме уравнения неразрывности

$$\bigtriangledown^\mu j_\mu = 0. \qquad (3)$$

Условие сохранения заряда во всех точках приводит к такой организации 4-тока единого поля, что заряд единого поля в подавляющем количестве сосредоточен в отдельных точках (**протистонах**). В этих точках сосредоточены **особенности единого поля**.

Если попытаться применить к протистону механические понятия, то неизбежно возникает **понятие электромагнитного поля**, определяемое распределением протистонов и имеющее на протистонах особенности (сингулярности).

Применение статистических методов к исследованию движения протистона приводит к понятию **волновой функции**, позволяющему применять очень эффективные методы функционального анализа.

Исследование этих основных (фундаментальных и статистических) представлений Мира составляет содержание теории.

4. Фундаментальные причины конденсации вещества, в том числе гравитационной неустойчивости. Спектр единого поля дискретен и бесконечно широк. При большом возрасте Вселенной фазы плоских компонент этого спектра практически не коррелируют (хаотизированы). Поэтому совпадение в одной точке гребней большого числа волн тем менее вероятно, чем больше их число. То есть, чем больше амплитуда группы волн, тем она реже встречается (тем менее она вероятна). Кроме того группе из заданного числа плоских волн соответствует конечное время существования (расплывание группы). Однако, если рассматривать **метаболирующую** (то есть обменивающуюся компонентами со средой) группу, определяя её тем множеством плоских компонент, которые находятся в данный момент в фазе (в смысле только знака) к максимуму амплитуды (в смысле квадрата модуля комплексной функции), то возможно существование метаболирующей группы, не только не расплывающейся, но даже конденсирующейся и достигающей некоторого статистического равновесия в среде остальных плоских волн. Такой метаболический механизм групповой конденсации, поддающийся не точному, а лишь статистическому анализу, является фундаментальной причиной конденсации вещества. Этот статистический анализ формализуется в виде **квантовой теории**, включающей все виды взаимодействия.

5. Обзор теории. Физика описывает наиболее общие свойства Мира, важные не только для конкретного человека, но и для всего человечества. Эта общность (абстрактность) предполагает независимость этих свойств от точки зрения, то есть от преобразований систем отсчёта (систем координат [Корн, 14.1-2]). В этом **суть принципа относительности**. Свойства Мира, удовлетворяющие принципу относительности называются **законами природы**. Поэтому законы природы удовлетворяют принципу относительности просто по определению. Физические объекты (их свойства), рассматриваемые независимо от положения во времени и пространстве, тоже можно считать законами природы. Математически Мир отображается различными полями. Весьма общим отображением свойств полей являются дифференциальные уравнения. Принцип относительности эквивалентен **инвариантности** (неизменности) дифференциальных уравнений полей в различных преобразованиях координат.

В технике (в частности – в механике и электродинамике) накоплен огромный опыт, свидетельствующий об инвариантности наблюдаемых свойств феноменов относительно сдвигов в пространстве и времени (то есть – 4-трансляций)

и относительно вращений в 4-х-мерном пространстве-времени (то есть – преобразований Лоренца). Частным случаем преобразований Лоренца являются обычные вращения в пространстве. Эта инвариантность требует объединения пространства и времени в единое 4-мерное пространство (пространство-время) с определённой (псевдоэвклидовой прямой) метрикой. Псевдоэвклидова прямая метрика не имеет кривизны (прямолинейна). Это согласуется с механическими законами сохранения, которые не могут существовать в пространстве криволинейной метрики (по крайней мере сразу все).

Дифференциальные уравнения используются для обобщения законов природы. Они позволяют нам отличать поля, которые возможны в природе от не возможных. Если поле в данный момент известно, то его дифференциальное уравнение позволяет вычислить – как это поле ведёт себя в другие моменты (до и после). Конкретные поля Мира описать дифференциальными уравнениями не возможно – возникает **проблема начальных условий**. То есть для вычисления конкретного поля необходимо знать начальные условия, которые само уравнение дать не может. Их надо находить из опыта или предполагать заданными. Поэтому дифференциальные уравнения ничего не говорят о происхождении конкретных полей. Они ничего не могут сказать о происхождении Мира. Однако для нашего детерминистского подхода Мир сам является законом природы.

Детерминистский подход вынуждает искать другие формы отображения мировых полей. Вспомним, что для полей кроме координатного представления существуют и другие представления, например – спектральное. В частности, квантовая механика, будучи весьма общей теорией, обходится спектрами, содержащими лишь счётное множество спектральных точек (в матричном представлении). Достаточно универсальным способом задания счётных множеств являются Диофантовы уравнения. Возникает вопрос – не существует ли такое Диофантово уравнение, спектр которого в координатном представлении давал бы некоторое единое поле, исчерпывающим образом отображающее наш Мир?

Ответить на этот вопрос можно лишь построив и исследовав такое уравнение. Как же его строить? В качестве преобразования от координатного представления в спектральное и обратно используем наиболее известное преобразование Фурье и обратное ему. Очевидно, это преобразование ставит в соответствие псевдоэвклидовому координатному 4-пространству псевдоэвклидово спектральное 4-пространство. Поэтому искомое Диофантово уравнение должно содержать 4 переменные, принимающие, как обычно для Диофантовых уравнений, целочисленные значения. Связь же этих переменных выберем как у координат разных 4-векторов с одинаковыми целочисленными квадратами модулей $k^2 = N$. При этом в координатном представлении получается единое поле, удовлетворяющее уравнению Клейна-Гордона-Фока (КГФ), с постоянным коэффициентом равным k^2.

Это, конечно, не вывод Диофантова уравнения Мира, но это определение понятия спектральных точек (космического, или единого метрического спектра) и соответствующего единого поля. Важно лишь чтобы сделанное определение было

познавательно ценным, что мы ниже будем демонстрировать. Иные определения мирового спектра мы не исключаем, однако их путь к моделированию феноменов Мира будет иным (иные способы интерпретации). Важно, что и любая другая система понятий, в силу единства математической логики, может быть поставлена в соответствие нашей системе понятий и в этом смысле ей равноценна, хотя может быть не равноценна в смысле удобства применения. Нам достаточно найти лишь один достаточно простой вариант. Любая правильная теория в какой-то мере полезна, хотя степени удобства теорий (простоты интерпретации) могут быть разными (вплоть до бесполезности).

Так как каждому значению N соответствует своё единое поле, представляющее космос, то существует счётное множество космосов со своими космическими спектрами. Мы живём в одном из таких космосов со значением N, определяемым антропным принципом.

Космический спектр счётен. Являясь множеством точек в 4-пространстве, он имеет определённую форму и симметрии, которые переносятся и на координатное представление, порождая понятия Вселенной, Антивселенной, Начала Вселенной, возраста Вселенной, экварианотов Вселенной и другие, рассматриваемые ниже. При этом Вселенная выглядит как линейно расширяющийся со временем шар.

В ДФ есть место и для недетерминированных феноменов, которые можно условно отнести к бесконечно большим значениям возраста Вселенной. То есть они существуют, но не достижимы человеком.

С единым полем просто связано 4-векторное поле (4-плотность тока), обладающее свойством неразрывности (заряд сохраняется). Кроме непрерывной плотности 4-тока единое поле имеет особенности в виде мировых линий точечных зарядов. Существование таких зарядов легко доказывается на примере соответствующих стационарных решений. Однако, более интересны аналогичные нестационарные решения, которые можно получить, используя развиваемый в теории синтетический подход. Нестационарным решениям соответствуют кривые мировые линии точечных зарядов (протистонов). Требование неразрывности 4-тока на особенностях определяет их поведение.

Мы покажем, что из точечных зарядов (протистонов) истекает слабый пульсирующий сферически симметричный ток, одинаковый для всех протистонов. Величина заряда всех протистонов одинакова и медленно (по степенному закону от возраста Вселенной) уменьшается. Заряд истекающих 4-токов исчезающе мал по сравнению с зарядом протистонов, так как не накапливается из-за взаимной нейтрализации. Отметим что эти непрерывные 4-токи пространственноподобны. Таким образом практически наблюдаемыми являются лишь точечные заряды протистонов. За счёт слабого истекающего пульсирующего 4-тока по́ля (1.6) существуют **микропульсации заряда протистона**.

Заметим, что взаимоуничтожение зарядов противоположных знаков не означает взаимоуничтожения соответствующих компонент единого поля (они лишь становятся в сумме вещественными), поэтому закон сохранения заряда

примени́м как к положительным так и к отрицательным зарядам независимо друг от друга, то есть имеет место **закон сохранения зарядов каждого знака** в отдельности. При этом легко вычисляется средняя плотность зарядов каждого знака для всей Вселенной.

Уравнение движения протистонов можно получить лишь введя механические представления. Основой абстрактной механики, пригодной для любых величин (обобщённых координат), является Лагранжев формализм. Суть его в том, что любые дифференциальные уравнения 2-го порядка можно представить в Лагранжевой форме, то есть дифференциальному уравнению можно поставить в соответствие такую функцию обобщённых координат и их производных по координатам (плотность функции Лагранжа, или просто – лагранжиан), которая удовлетворяет уравнению Лагранжа (в математических терминах – Эйлера). Через лагранжиан универсальным способом определяется понятие тензора плотности энергии-импульса. Таким образом **математические понятия получают физический смысл**. Теорема Нётер показывает, что инвариантность уравнения КГФ в преобразованиях Лоренца и Пуанкаре порождает 10 сохраняющихся величин (интегралов движения), связанных с тензором плотности энергии-импульса. Кроме того мы уже имеем 11-ый интеграл движения – заряд, сохранение которого можно рассматривать как следствие так называемой **калибровочной инвариантности электродинамики**. Сохраняющиеся величины имеют большую познавательную ценность и представляют **суть механики**.

4-ток удаётся представить как замкнутую механическую систему лишь включая в неё другой 4-вектор (4-потенциал), зависящий от 4-тока (при этом 4-потенциал назовём **калибровочным полем** по отношению к 4-току). Тогда получается Лагранжиан, из которого (при условии сохранения 4-тока) следуют уравнения Максвелла. 4-потенциал уравнениями Максвелла определяется не однозначно, поэтому допускает различные доопределения (**калибровки**). Существует такая калибровка (**корпускулярная**), которая позволяет устранить расходимость энергии электромагнитного поля, сопутствующего протистону, путём компенсации энергии этого поля в окрестности протистона отрицательной энергией истекающего из протистона 4-тока. Вдали от протистона (где его 4-ток пренебрежимо мал) калибровка потенциала не влияет на энергию и может быть любой. Поэтому поле излучения можно рассматривать при любой калибровке.

Таким образом энергия электромагнитного поля, сопутствующего протистону вместе с энергией истекающего из протистона тока, равна нулю. Масса же протистона как точечной заряженной материальной частицы пока по величине не определена. Поэтому мы можем воспользоваться этой неопределённостью величины массы протистона, чтобы устранить противоречия электродинамики, возникающие при рассмотрении движения точечного заряда под действием реакции собственного излучения. Возникающее при этом самоускорение обычно рассматривается как абсурд, свидетельствующий об ограниченности электродинамики. При этом масса точечного заряда считается постоянной. То есть масса как бы находится за рамками

электродинамики. Мы покажем, что если массу определить в соответствие с законом сохранения энергии-импульса, то есть включить в единую механическую систему заряд-электромагнитное поле, то всё встаёт на место – уравнение движения протистона становится осмысленным. При этом масса становится геометрическим понятием так как инвариантно определяется производными **мировой линии протистона**, то есть её формой. Возникает **дифференциальное уравнение массы**.

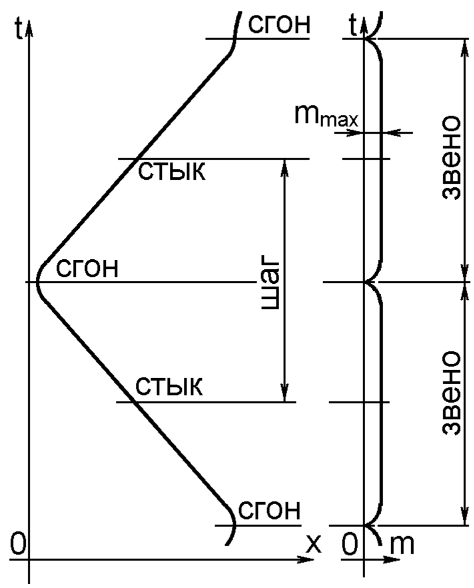


Рис. 101.3.

Анализ уравнения массы показывает, что на определённом отрезке (полушаге) мировой линии протистон (вместе со своим полем радиации) движется сам по себе независимо ни от каких внешних причин, то есть его масса изменяется детерминированно либо от максимального значения до нуля по закону гиперболического тангенса, либо наоборот. В первом случае полушаг назовём **испускающим**, а во втором – **поглощающим**. Два соседних полушага: испускающий и, за ним, поглощающий образуют в одной плоскости **шаг**. А два соседних полушага: поглощающий и, за ним, испускающий образуют **звено**, лежащее (вообще говоря) в двух плоскостях. Таким образом на всей мировой линии масса пульсирует. На концах шага масса почти постоянна (**квазистационарность концов шага**), но резко спадает до нуля в середине шага. Соседние шаги мировой линии гладко стыкуются по общей касательной, но их взаимная ориентация не детерменирована в рамках электродинамики. Эта недетерминированность возникает в силу не фундаментальности (абстрактности) 4-токового представления Мира. Шаги являются жёсткими элементами цепи, имеющими возможность взаимного 4-поворота на стыках.

Если бы заряд не испытывал микропульсаций, то вся мировая линия протистона была бы одним бесконечным шагом (плоской **автоидой**), но благодаря возмущению уравнения массы под действием микропульсаций заряда, квазистационарное

состояние к концу шага становится всё более неустойчивым и наконец переходит в квазистационарное состояние начала следующего шага, устойчивость которого растёт до середины шага, а затем опять падает и так далее. Каждый шаг в своей середине (**сгоне**) весьма резко изогнут и почти прямой на концах.

Таким образом мировая линия протистона составлена из множества одинаковых по форме шагов. В местах стыков соседние шаги ориентированы неоднозначно (имеет место **лабильность стыков**). Вблизи середины каждого шага (на сгоне) протистон сначала излучает порцию энергии (**первичный квант**) электромагнитного излучения (**квиз**), а затем поглощает такую же порцию энергии (**квап**). При этом его масса в середине шага имеет нулевое значение, которое быстро стремится к максимальному асимптотически постоянному значению m_m при удалении от середины шага. Квизы и квапы образуют первичную радиацию протистонов. Излучение и поглощение имеют совершенно одинаковые механизмы и отличаются лишь направлением во времени. Вопрос о причинной связи радиации и ускорения протистона относителен и в рамках детерминированной теории большого значения не имеет. Первичные кванты образуют поле на микроуровне.

На макроуровне, в отличие от микроуровня, мировая линия протистона становится не жёсткой, благодаря лабильности стыков шагов. Взаимодействие на макроуровне удобно рассматривать статистически с помощью **квантового понятия силы Лоренца**. Эта сила есть ничто иное как отношение изменения 4-импульса на отрезке мировой линии, состоящем из n шагов, к интервалу этого отрезка при нормированном среднем значении массы.

Единое поле на микроуровне можно представить состоящим из нескольких различных по характеру компонент: во-первых статистически однородный и 4-изотропный во всём пространстве шум с белым бесконечно широким спектром – **0-вакуум**, во-вторых шумовое поле общей радиации протистонов с очень широким, но конечным спектром, убывающее за пределами Вселенной (так как вне Вселенной нет протистонов) – **Δ-вакуум**, в-третьих статистически неравновесное макроскрпическое поле, обычно много меньшее первых двух компонент. Электромагнитное взаимодействие протистонов с третьей компонентой хорошо описывается с помощью понятия силы Лоренца.

Важным понятием теории является газ протистонов (**прогаз**), который является равновесным только в изначальной (реликтовой) системе отсчёта, временная ось которой для каждой точки 4-пространства определяется как луч, выходящий из Начала Вселенной. С учётом электромагнитного поля прогаз образует **проплазму**. Вычисления показывают, что логарифм плотности энергии проплазмы можно отождествить с потенциалом гравитационного поля. При этом можно определить гравитационную постоянную, которая является постоянной лишь локально, изменяясь существенно с возрастом Вселенной. Градиент гравитационного потенциала вызывает силу, действующую на протистон в направлении этого градиента. Сила эта не зависит от знака заряда протистона и может быть отождествлена с гравитационной силой.

Без учёта гравитационной силы статистически прогаз изотропен и однороден, что по теореме Нётер приводит к сохранению 4-импульса (в статистическом смысле), то есть к инерциальному движению частиц, но это движение испытывает ускорение в гравитационных полях. При этом с помощью новых (**прикладных**) единиц измерения можно ввести такую (**гравитационную**) метрику пространства-времени, что механика вырождается в **геометризованный вариант теории гравитации** (аналогично ОТО или РТГ). В этой метрике инерциальное движение происходит вдоль геодезических линий. Но если в ОТО пространство принципиально кривое, то в ДФ кривым является лишь пространство 2-й метрики. (ДФ – теория биметрическая. См.[Гинзбург. О теории относительности. Стр. 182]). Учитывая гравитационное поле, всегда можно перейти к прямому пространству-времени. Поэтому в ДФ всегда существуют интегралы движения, что в ОТО возможно только с оговорками.

Мы покажем, что протистоны движуться с ультрарелятивистскими скоростями. Зная кинематику расширения Вселенной, с учётом гравитационного взаимодействия протистонов, можно провести статистический расчёт средней скорости протистона, демонстрирующий **космологическое самоускорение протистонов**, которое за время существования Вселенной приводит к ультрарелятивистским скоростям протистонов.

Расчёт гравитационной постоянной делается аналогично тому как рассчитывается критическая плотность массы расширяющейся Вселенной в любой модели гравитации. То есть мы можем сделать обратное вычисление: по известной нам кинематике расширения Вселенной и средней плотности массы Вселенной, вычислить необходимое при этом значение гравитационной постоянной.

Оказывается, что свойства протистонов в едином поле допускают релятивистское статистическое описание 4-векторной **волновой функцией**, квадрат модуля которой имеет смысл модуля 4-вектора плотности потока вероятности местоположения **простона**, определяемого как одно звено мировой линии протистона. Исследование движения протистонов с помощью волновой функции простонов познавательно ценно, так как возможно использование очень эффективных методов функционального анализа. Для волновой функции естественно возникает понятие постоянной Планка. Тогда ДФ в полной мере может являтся основанием релятивистской квантовой теории, готовые результаты которой поэтому могут использоваться и в ДФ. Квантовая теория элементарных частиц является статистической теорией коротко живущих сверх тяжёлых сингулярностей (простонов) детерминированного единого вакуумного поля. Элементарная квантовая частица является статистически стационарным самосвязанным состоянием одного простона, обмениваемого (метаболирующего) с вакуумом согласно волновой функции частицы.

Как и любая квантовая теория, релятивистская квантовая механика в ДФ не даёт возможности проследить мировую линию каждого протистона, но даёт важные статистические законы распределения параметров элементов мировых линий

протистонов (то есть простонов). Но ДФ содержит в себе **скрытые параметры** (диофантово уравнение космического спектра), позволяющие прямые вычисления единого поля в любой заданной точке 4-пространства, минуя квантовую теорию.

Простейшей квантовой частицей является **вакуумный гравитон** и его античастица. Нейтрализуя друг друга, они проявляются лишь виртуально, но антигравитонов чуть меньше, чем гравитонов, некомпенсированные экземпляры которых проявляются реально. Гравитон является как бозоном так и фермионом (суперсимметричен) и имеет несколько зарядовых (в том числе дробных по заряду) состояний. Вакуумные гравитоны имеют очень малую массу (порядка долей эВ) и огромный для микромира размер (около сантиметра). Их форма – сфера (пузырь с очень тонкой стенкой). Имея огромные для микромира размеры при очень малой напряжённости полей, пузыреобразные вакуумные гравитоны очень слабо наблюдаемы аналогично нейтрино, но их заряженные состояния резонансно взаимодействуют с электромагнитными волнами сантиметрового диапазона, поэтому такое МГД-взаимодействие способно объяснить результаты опытов с EM-drive Шоера, реализуя тем самым **детектор тёмного вещества** (II.7.8.3.*).

Однако существуют редкие линзообразные стационарные возмущения таких пузырей (**тонусные гравитоны**), в том числе микроскопические (почти точечные) с массой около 3000Гэв – **тяжелоны**. Тяжелоны могут гравитационно связываться в тесные пары, вращаясь друг относительно друга с ультрарелятивистскими скоростями, образуя почти точечную фундаментальную частицу, где гравитационная связь сильнее электромагнитной силы. При этом дефект масс огромен (**аннигиляция**) и реализует весь спектр масс наблюдаемых фундаментальных частиц.

Построенной теории оказывается достаточно, чтобы связать между собой все фунаментальные физические постоянные и единицы измерения и перейти к одной единственной единице измерения всех физических величин, выражаемой через возраст Вселенной. При этом фундаментальные величины получаются вполне разумными при $N = 67$ (II.7.6.6.8). Тем самым достигаются **логическая замкнутость теории** и цели этой книги.

⋆⋆⋆

Подобно тому как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике.

Джордж Сантаяна.

Глава 2. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ И ТЕНЗОРАХ

Тензоры – хороший способ абстрагирования понятий от положения во времени и пространстве.

§1. Линейные преобразования.

1. Линейные преобразования. Функцию (оператор) A, линейную относительно векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ n-мерного векторного пространства называют **линейным преобразованием** в этом пространстве

$$A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b}, \quad A(c\mathbf{a}) = cA\mathbf{a}.$$

Удобные применения (хотя не часто) находит также запись оператора не слева от аргумента (**левый оператор**), а справа (**правый оператор**), то есть, вообще говоря, надо различать такие операторы. Таким образом, вектор $\mathbf{a}'$, являющийся результатом преобразования, можно записать в виде

$$\mathbf{a}' = A_{\text{left}}\, a$$

или

$$\mathbf{a}' = a\, A_{\text{right}}.$$

Не трудно показать [Аквис, с. 90], что если в линейном векторном пространстве задан базис, то между линейными преобразованиями в n-мерном пространстве и квадратными матрицами порядка n существует взаимнооднозначное соответствие.

При этом преобразуемые векторы можно изобразить либо матрицей столбцом, умножаемым на левую матрицу (левый оператор), либо матрицей строкой, умножаемой на правую матрицу (правый оператор)

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_k (A_{ik}\, a_k)$$

(суммы образуют строку по свободному индексу i)

или

$$\mathbf{a}' = \begin{matrix} (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \sum_k (A_{ik}\, a_k)$$

(суммы образуют столбец по свободному индексу i).

То есть оба эти **матричные представления линейного преобразования** тождественны друг другу, отличаясь в записи **транспонированием** представляющих матриц и порядком их умножения

$$(A_{ik})(a_k) = (a_k)(A_{ki}).$$

2. Геометрический смысл линейных преобразований.

Можно показать [Аквис, с. 97], что **определитель $|A|$ матрицы линейного преобразования представляет собой коэффициент изменения объёма при линейном преобразовании**. Имеется в виду объём параллелепипеда, построенного на n векторах как на рёбрах. При этом знак $|A|$ зависит от взаимной ориентация векторов. Если $|A| = 0$, то n-мерный объём вырождается в m-мерный объём, где $m < n$, то есть векторы, определяющие этот объём **линейнозависимы**. При этом **преобразование называется вырожденным**.

Число m определяет **ранг** матрицы A, то есть наибольший порядок отличного от нуля определителя, содержащегося в этой матрице (в смысле разложения её определителя в сумму). Ранг матрицы также равен числу её линейнонезависимых строк (или столбцов). Понятие ранга инвариантно относительно выбора базиса линейного векторного пространства.

Таким образом, линейное преобразование ранга $m < n$ переводит n-мерное пространство в m-мерное (например, проектирование). Ясно, что это преобразование однозначно; обратное же преобразование неоднозначно, то есть для него не существует однозначного оператора.

Доказывается, что **каждое невырожденное преобразование A имеет обратное преобразование** A^{-1}. Ясно, что $AA^{-1} = E$, где E – тождественное

преобразование, изображаемое **единичной матрицей**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(Иногда единичную матрицу обозначают I или просто 1.)
Последовательно выполняемым нескольким линейным преобразованиям соответствует произведение соответствующих матриц (линейные преобразования образуют группу). Вообще говоря, произведение матриц некоммутативно. **Определитель** (и ранг) произведения матриц равен произведению их определителей (рангов).

3. Условие сохранения в линейном преобразовании скалярного произведения. Так как матрицу строку можно умножить на матрицу столбец, то умножая матричные представления двух векторов, получим их **скалярное произведение**

$$(a_i)(b_i) = \mathbf{ab}.$$

Условие сохранения (**инвариантности**) скалярного произведения в линейном преобразовании можно записать в виде

$$(a_i)(b_i) = (a'_k)(b'_k) \equiv (a_k)(A_{ki})(A_{ik})(b'_k),$$

которое выполняется в том и только в том случае, если матрица, обратная матрице преобразования совпадает с транспонированной матрицей преобразования, то есть

$$A^{-1} = A' \tag{1}$$

или

$$A'A = AA' = E.$$

Такая матрица называется **ортогональной**.

4. Собственные векторы и собственные значения. Вектор $\mathbf{x}_i$ называется **собственным вектором** линейного преобразования A, если

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i, \tag{1}$$

где λ_i – некоторое действительное число, называемое **собственным значением преобразования** A. Таким образом линейное преобразование не изменяет направления собственных векторов (или только на обратное), а может лишь изменить в λ_i раз их модули.

Можно показать, что различным собственным значениям соответствуют линейнонезависимые собственные векторы.

В базисе, состоящем из собственных векторов при различных собственных значениях, матрица A линейного преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(диагональная матрица).

Справедливо и обратное: при таком виде матрицы преобразования, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – действительные числа, все векторы данного базиса собственные. Таким образом собственные векторы играют важную роль в теории линейных преобразований: если существует базис из собственных векторов, то в этом базисе преобразование имеет наиболее простое координатное представление и может быть определено с помощью одних лишь собственных значений, соответствующих базисным векторам. [Аквис, с. 148].

Если A – матрица линейного преобразования, E – единичная матрица, λ – число, то многочлен относительно λ:

$$|A - \lambda E|$$

называется **характеристическим многочленом линейного преобразования** A относительно λ.

Характеристический многочлен можно построить не только относительно λ, но и относительно самой матрицы A. Они оба имеют применения.

Уравнение

$$|A - \lambda E| = 0$$

называется **характеристическим** (или **вековым**) уравнением преобразования A.

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Собственные значения преобразования A **удовлетворяют его характеристическому уравнению**. [Аквис, с. 137].

5. О бесконечномерных линейных преобразованиях.

Обобщением n-вектора как величины, состоящей из n компонент (n-**компонентной величины**), является величина, состоящая из бесконечного числа компонент, например, функция (бесконечномерный вектор с несчётным числом компонент). Компонентами являются значения функции, а значения аргумента нумеруют компоненты.

Большинство понятий, применимых к конечномерным векторам, обобщаются и на **функции**, рассматриваемые как векторы в бесконечномерном линейном пространстве.

§2. Изменение векторных элементов пространства в преобразованиях координат.

1. Скалярное произведение 4-векторов. Общее понятие вектора даётся в курсах линейной алгебры. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями этого раздела математики. Здесь же кратко рассмотрим частный случай n-вектора, как упорядоченного множества n чисел (**координат n-вектора**), например 4-вектора:

$$v^\alpha = (v^0,\ v^1,\ v^2,\ v^3), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Если каждой паре векторов v^α, w^β из линейного векторного пространства сопоставлено вещественное число

$$(v^\alpha,\ w^\beta),$$

то это число называется **скалярным произведением** этих векторов, если только оно удовлетворяет следующим условиям:

$$(v^\alpha,\ w^\beta) = (w^\beta,\ v^\alpha) \tag{2}$$

– **коммутативность скалярного произведения**

$$\left.\begin{array}{c}(v^\alpha + w^\alpha,\ y^\gamma) = (v^\alpha,\ y^\gamma) + (w^\alpha + y^\gamma)\\ (a\ v^\alpha,\ w^\beta) = a(v^\alpha,\ w^\beta)\end{array}\right\} \tag{3}$$

– **линейность скалярного произведения**.

Линейное векторное пространство с заданным в нём скалярным произведением называется **эвклидовым** (**псевдоэвклидовым**), если скалярное произведение определено положительно (не определено положительно).

Скалярное произведение вектора самого на себя называется **скалярным квадратом вектора**.

В частности, скалярное произведение может задаваться как **квадратичная форма**:

$$(v^\alpha,\ w^\beta) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} h_{\alpha\beta}\ v^\alpha w^\beta, \tag{4}$$

при этом скалярный квадрат имеет вид

$$(v^\alpha,\ v^\beta) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} h_{\alpha\beta}\ v^\alpha v^\beta. \tag{5}$$

Так как по обоим индексам производится суммирование, то это просто число. Условия (2), (3) очевидно выполняются.

Из коммутативности скалярного произведения следует

$$h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}. \tag{6}$$

Для сокращения записей часто используется **соглашение о суммировании Эйнштейна**, согласно которому в каждом члене выражения, содержащем дважды один и тот же **индекс** один раз в верхней позиции и один раз в нижней, производится суммирование по этому индексу.

По этому соглашению, например, формулы (4), (5) могут быть записаны в виде

$$(v^\alpha,\ w^\beta) = h_{\alpha\beta}\ v^\alpha w^\beta, \tag{7}$$

$$(v^\alpha,\ v^\beta) = h_{\alpha\beta}\ v^\alpha v^\beta. \tag{8}$$

Если члены выражения содержат данный индекс по одному разу, то суммирование не производится и этот индекс в каждом члене должен занимать одинаковую позицию – сверху или снизу (**правило баланса индексов**).

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то эти векторы называются **ортогональными**. В эвклидовом пространстве ортогональны самим себе лишь нулевые векторы. В **псевдоэвклидовом пространстве** существуют ненулевые векторы (**светоподобные**), которые ортогональны самим себе. Векторы нулевой длины (**длина вектора** есть корень квадратный из скалярного квадрата вектора) называются **изотропными**. То есть светоподобные векторы являются изотропными. В таком пространстве скалярный квадрат вектора может быть как положительным (тогда вектор называется **времениподобным**), так и отрицательным (тогда вектор называют **пространственноподобным**). Длина в псевдоэвклидовом пространстве обычно называется **интервалом**.

2. Преобразования координат. Переход от одной системы координат к другой (штрихованной) можно записать в виде зависимости штрихованных координат от нештрихованных (**преобразование координат**)

$$x'^\alpha = f(x^\alpha). \tag{1}$$

Дифференцируя эту функцию и отбрасывая члены порядка малости выше первого, получим

$$\begin{aligned}
dx'^0 &= a^0_0\ dx^0 + a^0_1\ dx^1 + a^0_2\ dx^2 + a^0_3\ dx^3 \\
dx'^1 &= a^1_0\ dx^0 + a^1_1\ dx^1 + a^1_2\ dx^2 + a^1_3\ dx^3 \\
dx'^2 &= a^2_0\ dx^0 + a^2_1\ dx^1 + a^2_2\ dx^2 + a^2_3\ dx^3 \\
dx'^3 &= a^3_0\ dx^0 + a^3_1\ dx^1 + a^3_2\ dx^2 + a^3_3\ dx^3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты

$$a^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{3}$$

являются функциями точек пространства.

Или в краткой записи

$$dx'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta}\; dx^{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\; dx^{\beta}. \tag{4}$$

Эта формула показывает как преобразуются **векторные элементы** dx^{β} **пространства** в данной точке при переходе в штрихованную систему координат.

Не трудно видеть, что в формуле (4) a^{α}_{β} можно рассматривать как элементы квадратной матрицы, строки которой нумеруются индексом α, а столбцы – индексом β. При этом dx^{β}, dx'^{α} – элементы матриц-столбцов.

В матричной записи (4) можно записать так (верхним считаем индекс строки)

$$(dx'^{\alpha}) = (a^{\alpha}_{\beta})(dx^{\beta}) = (\sum_{\beta} a^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta}) \tag{5}$$

(суммы в квадратных скобках образуют строку со свободным индексом α)

или так

$$(dx'^{\alpha})' = (dx^{\beta})'(a^{\alpha}_{\beta})' = (\sum_{\beta} a^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta})' \tag{6}$$

(суммы образуют столбец),

здесь штрих обозначает транспонирование матрицы.

При

$$h_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

скалярный квадрат **бесконечно малого вектора** dx^{α} можно записать в виде произведения матриц $(dx^{\alpha})(dx^{\alpha})'$. Условие сохранения этого квадрата в преобразованиях координат можно записать в виде

$$(dx^{\alpha})'(dx^{\alpha}) \equiv (dx^{\alpha})(dx^{\alpha})' = (dx'^{\alpha})(dx'^{\alpha})' \equiv$$

$$\equiv (dx^{\beta})'(a^{\alpha}_{\beta})'(a^{\alpha}_{\beta})(dx^{\beta}),$$

которое выполняется в том и только в том случае, если матрица, обратная **матрице преобразования** A ($A = (a^{\alpha}_{\beta})$) совпадает с транспонированной матрицей преобразования, то есть

$$A^{-1} = A' \tag{7}$$

или

$$A'A = AA' = E \tag{8}$$

(E – единичная матрица).

При этом матрица A называется **ортогональной**.

Обратное преобразование можно записать так

$$(dx^{\beta}) = (a^{\alpha}_{\beta})^{-1}(dx'^{\alpha}), \tag{9}$$

где матрица $(a^{\alpha}_{\beta})^{-1}$ обратная матрице (a^{α}_{β}). С другой стороны

$$dx^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\, dx'^{\alpha}. \tag{10}$$

Тогда

$$(a^{\alpha}_{\beta})^{-1} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right). \tag{11}$$

Матрицы (a^{α}_{β}) и им обратные предполагаются неособенными, то есть их детерминант не равен нулю. Это обеспечивает возможность прямого и обратного преобразования.

Запись элемента матрицы в общем виде (например, a^{α}_{β}, в отличие от частного вида, например, a^{1}_{3}) мы будем обычно понимать как обозначение самой матрицы, то есть, например, записи (a^{α}_{β}) и a^{α}_{β} эквивалентны, хотя, например, запись (a^{2}_{3}) бессмысленна в отличие от a^{2}_{3}, которая обозначает элемент матрицы.

Очевидно, для 4-пространства матрица A имеет в общем случае 16 независимых компонент, число которых уменьшается при условии её ортогональности.

Так как матричное произведение некоммутативно, то для многокомпонентных величин, вообще говоря, нельзя переставлять множители местами, хотя можно делать перестановки, при которых меняются местами лишь одинаковые индексы. По паре одинаковых индексов производится суммирование, а значение суммы не зависит от порядка сомножителей в членах суммы. Обратим также внимание на тождество

$$a^{\mu}a^{\nu} \equiv a^{\nu}a^{\mu}. \tag{12}$$

§3. Векторы в метрических пространствах.

1. Общие представления о метрических пространствах. Мы будем пользоваться понятием **пространства** в том смысле, как оно определяется в математике. В **метрическом пространстве** каждой паре его точек сопоставлено положительное действительное число – **расстояние** (чем задана **метрика пространства**). **Длина** отрезка непрерывной гладкой линии в метрическом пространстве определяется как предел суммы расстояний между всеми парами соседних точек, выбранных на этой линии, при условии, что число выбранных точек неограниченно растёт, а наименьшее расстояние между этими точками стремиться к нулю.

Отрезок непрерывной гладкой линии наименьшей длины, соединяющий две данные точки, называется **отрезком геодезической линии** (**геодезическим отрезком**). Очевидно, что все части геодезического отрезка являются геодезическими отрезками. Действительно, если хотя бы одна из этих частей не была бы геодезическим отрезком, то это означало бы, что её длина не минимальна и, следовательно, существует более короткий исходный отрезок, что не

возможно по его определению. Неограниченную линию, все части которой являются геодезическими отрезками, называют **геодезической линией**.

Эти свойства геодезических отрезков позволяют свести всю метрику пространства к метрике бесконечно близких пар точек, то есть к **локальной метрике**, а расстояния между удалёнными точками тогда будут определяться просто как интегралы по соединяющим их отрезкам геодезических линий, что сводится к вариационной задаче.

Точки пространства имеют объективный смысл только в том случае, если любую точку можно отличить от любой другой, то есть если точки **идентифицированы**. В математике точки идентифицируются с помощью системы координат, то есть каждой точке сопоставляется упорядоченное множество из n действительных чисел – **координат**. Число координат (n), сопоставляемых каждой точке, называется **размерностью системы координат**. С помощью взаимнооднозначных преобразований можно переходить от одной системы координат к другой. При этом расстояния между точками (метрика) могут как сохраняться так и не сохраняться. Обычно более удобными являются преобразования координат, сохраняющие метрику.

В ДФ все системы координат, в которых остаётся справедливым уравнение единого поля

$$\Box u = -k^2 u, \tag{1}$$

будем называть **системами отсчёта**. При этом мы будем говорить, что все системы отсчёта **однородны** и **изотропны** в том смысле, что сдвиги и повороты системы отсчёта не влияют на уравнение (1).

2. Метрика 4-пространства. 4-пространство называется **метрическим** (**снабжённым метрикой**), если для каждого элемента dx^α определён **инвариантно** его скалярный квадрат, который в наименьшем порядке малости можно записать квадратичной формой

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{1}$$

то есть предполагается известной непрерывная функция координат (матричная)

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\mu), \tag{2}$$

которая называется **метрическим тензором** этого пространства.

Так как в форме (1) по обоим индексам α, β производится суммирование, то их можно произвольно переобозначать, откуда следует симметричность матрицы $g_{\alpha\beta}$, то есть

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Инвариантность скалярного квадрата (1) означает, что его числовое значение не зависит от выбора системы координат. Для этого необходимо подходящим образом определить закон преобразования метрического тензора.

Сделаем это. Скалярный квадрат элемента dx^α в любой преобразованной (штрихованной) системе координат можно записать в виде

$$g'_{\alpha\beta}\ dx'^\alpha\ dx'^\beta = g'_{\alpha\beta}\ a^\alpha_\gamma\ dx^\gamma\ a^\beta_\delta\ dx^\delta =$$

$$= g'_{\alpha\beta}\ a^\alpha_\gamma\ a^\beta_\delta\ dx^\gamma\ dx^\delta.$$

Это выражение представляет собой просто сумму произведений всех различных числовых компонент, значение которой не зависит от порядка сомножителей.

Скалярный квадрат в обеих (а значит и любых) системах координат будет одинаков, если потребовать чтобы метрический тензор преобразовывался по закону:

$$g_{\gamma\delta} = a^\alpha_\gamma\ a^\beta_\delta\ g'_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Метрическое пространство, тензор $g_{\alpha\beta}$ которого – действительная функция координат, имеющая непрерывные частные производные, называется **Римановым**. [Корн, 16. 7-1].

3. Контравариантные и ковариантные векторы.

Выражение

$$g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \tag{1}$$

можно рассматривать как матрицу-столбец с компонентами однозначно связанными с компонентами вектора dx^α, поэтому его самого можно считать вектором (его принято называть **ассоциированным** к вектору dx^α), но так как он преобразуется иначе, чем вектор dx^α, то он называется по-другому – **ковариантным вектором**, в отличие от dx^α, который называется **контравариантным вектором**.

Оба эти вектора можно считать разновидностями одной и той же четырёхкомпонентной величины, записанной либо в **контравариантных**, либо в **ковариантных компонентах**, однозначно связанных между собой.

Ковариантный вектор записывается с нижним индексом, то есть ковариантный вектор dx_β, ассоциированный контравариантному вектору dx^α, связан с ним выражением

$$dx_\beta = g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha, \tag{2}$$

чему соответствует матричная форма

$$(dx_\beta) = (g_{\alpha\beta})(dx^\alpha). \tag{3}$$

Матрицу, обратную метрическому тензору $(g_{\alpha\beta})$ запишем в виде $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g^{\alpha\beta}) = (g^{\beta\alpha})$, то есть с верхними индексами. С её помощью можно обратно выразить контравариантный вектор через ковариантный

$$(dx^\alpha) = (g_{\alpha\beta})^{-1}(dx_\beta) = (g^{\alpha\beta})(dx_\beta).$$

Или в координатах

$$dx^\alpha = g^{\alpha\beta}\ dx_\beta. \tag{4}$$

На основании (2) и (4) говорят, что **ковариантный метрический тензор** $g_{\alpha\beta}$ и **обратный** ему – **контравариантный метрический тензор** $g^{\alpha\beta}$ позволяют **опускать** и **поднимать** индекс у 4-вектора.

Введение записи вектора в контравариантных и ковариантных компонентах позволяет записывать скалярное произведение (в частности, скалярный квадрат) в компактном виде:

$$g_{\alpha\beta}\ dx^{\alpha}\ dx^{\beta} = dx_{\beta}\ dx^{\beta}. \tag{5}$$

4. Преобразование ковариантного вектора. Формула

$$dx_{\beta} = g_{\alpha\beta}\ dx^{\alpha} \tag{1}$$

получена независимо от конкретного вида системы координат, поэтому она **форминвариантна**, то есть имеет один и тот же вид (форму) в любой системе координат, то есть в других (штрихованных) координатах можно писать аналогично

$$dx'_{\beta} = g'_{\alpha\beta}\ dx'^{\alpha}. \tag{2}$$

Но

$$dx'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\gamma}\ dx^{\gamma}, \tag{3}$$

тогда

$$dx'_{\beta} = a^{\alpha}_{\gamma}\ g'_{\alpha\beta}\ dx^{\alpha}. \tag{4}$$

Домножив обе части равенства на a^{β}_{δ}, получим

$$a^{\beta}_{\delta}\ dx'_{\beta} = a^{\alpha}_{\gamma}\ a^{\beta}_{\delta}\ g'_{\alpha\beta}\ dx^{\gamma}, \tag{5}$$

но

$$a^{\alpha}_{\gamma}\ a^{\beta}_{\delta}\ g'_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta} \tag{6}$$

и тогда

$$a^{\beta}_{\delta}\ dx'_{\beta} = g_{\gamma\delta}\ dx^{\gamma} = dx_{\delta}. \tag{7}$$

Откуда в матричной записи

$$(dx'_{\beta}) = (a^{\beta}_{\delta})^{-1}(dx_{\delta}), \tag{8}$$

то есть преобразование ковариантного вектора происходит с помощью матрицы, обратной той, с помощью которой преобразуется контравариантный вектор. Но выше мы видели, что обратной матрице $(a^{\beta}_{\delta})^{-1}$ соответствуют матричные компоненты $\partial x^{\delta}/\partial x'^{\beta}$, поэтому в компонентах можно записать

$$dx'_{\beta} = \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}}\ dx_{\delta}. \tag{9}$$

Обратим внимание, что **верхний индекс применённый в знаменателе соответствует нижнему индексу**.

Таким образом законы преобразования контравариантных и ковариантных векторов различаются.

5. Конечные контравариантные и ковариантные векторы. Мы определили контравариантные и ковариантные векторы как бесконечно малые величины. Поскольку преобразование бесконечно малого вектора dx^α и ассоциированного ему dx_β от одной системы координат к другой происходит линейно, то из инвариантности квадратичной формы этих векторов следует инвариантность билинейной формы любой другой пары векторов $v^\alpha,\ w_\beta$, **заданных в той же точке пространства**, при условии, что они преобразуются по тем же формулам, что и векторы $dx^\alpha,\ dx_\beta$, то есть скалярные произведения инвариантны не только для бесконечно малых, но и для конечных векторов при таких же законах преобразования.

Поэтому в пространстве возможны векторные поля с инвариантным скалярным произведением.

Таким образом любой контравариантный вектор (в том числе конечный) преобразуется по закону:

$$v'^\alpha = a^\alpha_\beta\ v^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\ v^\beta.$$

Ассоциированный ему ковариантный вектор связан с ним соотношением

$$v_\beta = g_{\alpha\beta}\ v^\alpha$$

и преобразуется по закону

$$v'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\ v_\beta.$$

§4. Тензоры в метрических пространствах.

1. Внешнее произведение многокомпонентных величин.
Если многокомпонентная величина имеет один индекс (например α), пробегающий n значений

$$\alpha = 1,\ 2,\ ...\ n,$$

то она имеет n компонент и обозначается каким-либо символом с индексом в верхней или в нижней позиции, например A^α или B_β.

Внешним произведением двух таких величин, например

$$C^\alpha_{\ \beta} = A^\alpha\ B_\beta,$$

называется двухиндексная многокомпонентная величина, число компонент которой равно произведению чисел компонент этих двух величин, при этом компоненты образуются как произведения всех пар компонент, взятых по одной от этих величин.

Аналогично можно построить многокомпонентную величину с любым числом индексов.

2. Тензоры. Любую многокомпонентную величину

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_m}$$

в n-мерном пространстве, каждая компонента которой соответствует определённым значениям индексов $\alpha_1\ldots\alpha_k$, $\beta_1\ldots\beta_m$, пробегающих значения 0, 1, ..., n, будем называть n-**тензором** (к **раз контравариантным и** m **раз ковариантным** или **смешанным** при $k, m \neq 0$), если она преобразуется также как внешнее произведение k контравариантных векторов и m ковариантных векторов, то есть

$$A'^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_m} = a^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot a^{\alpha_k}_{\gamma_m}\ b^{\delta_1}_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot b^{\delta_k}_{\beta_m}\ A^{\gamma_1\ldots\gamma_m}_{\delta_1\ldots\delta_k}, \tag{1}$$

где

$$a^{\alpha_i}_{\gamma_j} = \frac{\partial x'^{\alpha_i}}{\partial x^{\gamma_j}}, \quad b^{\delta_i}_{\beta_j} = \frac{\partial x^{\delta_i}}{\partial x'^{\beta_j}}.$$

Число $k+m$ называется **валентностью тензора**. Тензор $A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ **антисимметричен** по индексам ij, если их перестановка изменяет знак тензора и **симметричен**, если не изменяет.

Покажем, что многокомпонентная величина

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{2}$$

компоненты которой определены одинаково для любой системы координат, является тензором. То есть надо показать, что

$$\delta^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\ \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}\ \delta^\gamma_\delta. \tag{3}$$

Но все компоненты в правой части при $\delta \neq \gamma$ обращаются в нуль (2), поэтому, положив $\delta = \gamma = \mu$, получим

$$\delta^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta},$$

что выполняется тождественно. Тензор δ^α_β называют **единичным тензором**. Этот тензор особый, так как он по определению инвариантен в преобразованиях координат, то есть от этих преобразований не зависит. Важно понимать, что хотя мы обозначили единичный тензор в виде **символа кронекера**, соответствующего единичной матрице, эта матрица, вообще говоря, не является тензором, так как для тензора важны значения его компонент в любой системе координат, что определяется способом преобразования компонент.

Согласно определению тензора, произведение любого числа контравариантных и ковариантных векторов является тензором.

Мы уже показывали как преобразуется метрический тензор

$$g_{\gamma\delta} = a^\alpha_\gamma\ a^\beta_\delta\ g'_{\alpha\beta}.$$

Если поменять местами названия штрихованной и нештрихованной систем координат, то это преобразование удовлетворяет определению тензора, то есть метрический тензор удовлетворяет определению тензора.

3. О возможности представления тензора произведением векторов. Число компонент тензора равно n^m (, где n – размерность пространства, m – число определяющих тензор индексов). Такое же число компонент имеет произведение векторов, взятых в числе, равном числу индексов тензора. Но компоненты этого произведения векторов, вообще говоря, нельзя выбрать равными соответствующим (по индексам) компонентам тензора, так как, например, два 4-вектора имеют 8 независимых компонент, а 4-тензор валентности 2 имеет 16 независимых компонент.

Однако, в некоторых частных случаях, когда часть компонент тензора связана зависимостями, представление тензора произведением векторов становится возможным.

4. Свёртки матриц и тензоров. Если по какой-либо паре индексов тензора, один из которых верхний, а другой – нижний, произвести суммирование компонент при одинаковых значениях этих индексов, то получится снова тензор с валентностью на две единицы меньше. Такая операция называется **свёртыванием тензора** (или его **упрощением**) по этой паре индексов, а результат операции **свёрткой**.

Вообще многокомпонентные величины, имеющие структуру тензора (матрицы) тоже можно свёртывать, но при этом не обязательно получаются тензоры.

Покажем, что действительно свёртка тензора является тензором. Для этого свернём формулу (1) второго пункта по какой-либо паре индексов. Удобно взять индексы α_k, β_m. Переобозначив их

$$\alpha_k = \beta_m = \mu$$

и пользуясь соглашением о суммировании, можно записать

$$A'^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\ \mu}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\ \mu} = a^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot a^{\alpha_{k-1}}_{\gamma_{m-1}}\ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma_m}}\cdot$$

$$\cdot b^{\delta_1}_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot b^{\delta_{k-1}}_{\beta_{m-1}}\ \frac{\partial x^{\delta_k}}{\partial x'^{\mu}}\ A^{\delta_1\ldots\delta_k}_{\gamma_1\ldots\gamma_m}.$$

Но

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma_m}}\ \frac{\partial x^{\delta_k}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\delta_k}}{\partial x^{\gamma_m}} = \delta^{\delta_k}_{\gamma_m},$$

$$\delta^{\delta_k}_{\gamma_m}\ A^{\delta_1\ldots\delta_k}_{\gamma_1\ldots\gamma_m} = A^{\delta_1\ldots\delta_{k-1}\ \mu}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}\ \mu}.$$

И тогда

$$A'^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\ \mu}_{\beta_1\ldots\beta_{m-1}\ \mu} = a^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot a^{\alpha_{k-1}}_{\gamma_{m-1}}\ b^{\delta_1}_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot b^{\delta_{k-1}}_{\beta_{m-1}}\ A^{\delta_1\ldots\delta_{k-1}\ \mu}_{\gamma_1\ldots\gamma_{m-1}\ \mu},$$

то есть действительно свёртка преобразуется как тензор. Этот тензор имеет валентность на две единицы меньше, так как компоненты, соответствующие индексу μ при суммировании пропадают.

Скалярное произведение двух векторов, очевидно, тоже можно считать свёрткой двух тензоров первой валентности. При этом получается скаляр, который можно считать **тензором нулевой валентности**. Этот скаляр всегда является инвариантом преобразований координат, то есть сохраняет в этих преобразованиях своё численное значение.

5. Инвариантные тензоры. Выше мы уже показали, что единичный тензор δ^α_β имеет одни и те же компоненты в любой системе координат, то есть он инвариантен, что вообще говоря, не характерно для тензоров не нулевой валентности.

Очевидно, что инвариантен любой тензор A^α_β, представимый в виде

$$A^\alpha_\beta = f\,\delta^\alpha_\beta, \tag{1}$$

где f – любой скаляр. И обратно, любой инвариантный тензор A^α_β представим в виде (1). Действительно, для любого инвариантного тензора A^α_β необходимо

$$A^\alpha_\beta = A'^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}\,A^\gamma_\delta,$$

что можно записать в виде

$$A^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\delta}{\partial x^\gamma}\,A^\gamma_\delta = \delta^\alpha_\beta\, f,$$

где

$$f = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\gamma}\,A^\gamma_\delta$$

– свёртка, являющаяся скаляром.

Формула (1) обобщается для тензоров любой валентности в виде

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_m} = f\,\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\ldots\delta^{\alpha_m}_{\beta_m}. \tag{2}$$

Подчеркнём ещё раз, что матрица, имеющая в данной системе координат единичный вид (δ^α_β) вовсе не обязательно является тензором, если не удовлетворяет тензорным признакам.

6. Познавательная ценность понятия тензора. Познавательная ценность понятия тензора состоит в том, что (например, благодаря операции свёртывания) с тензорами связаны инварианты преобразований координат, то есть величины, не зависящие от произвола в выборе координат.

Многим тензорам можно дать геометрическую интерпретацию. Полезен ещё один вид многокомпонентных величин – полуцелые тензоры (спиноры), которые через операции аналогичные тензорным связаны друг с другом и с тензорами, а следовательно и с инвариантами. Спиноры не имеют непосредственной геометрической интерпретации, но зато описывают некоторые физические поля.

7. Обратный тензорный признак. Пусть в каждой системе координат задана 4-компонентная величина B_α такая, что при свёртывании её с произвольным

тензором A_α (остальные возможные индексы не указаны) получается тензор с соответствующей этой свёртке валентностью (остальные индексы не указаны), тогда величина B_α является вектором

$$C = A^\alpha \; B_\alpha. \tag{1}$$

Чтобы доказать это, преобразуем равенство (1) в другую (штрихованную) координатную систему. Получим

$$C' = a^\alpha_\beta \; A'^\beta \; b^\gamma_\alpha \; B'_\gamma, \tag{2}$$

где

a^α_β – коэффициенты преобразования тензора A^α по индексу α,

b^γ_α – неизвестные коэффициенты преобразования величины B_α по индексу α,

C', A'^β, B'_γ – преобразованные величины C, A^α, B_α.

Или имеем

$$C' = a^\alpha_\beta \; b^\gamma_\alpha \; A'^\beta \; B'_\gamma. \tag{3}$$

Для того, чтобы равенство (3) имело инвариантный характер (сравни с (1)), необходимо:

$$C' = A'^\alpha \; B'_\alpha.$$

Откуда

$$a^\alpha_\beta \; b^\gamma_\alpha \; A'^\beta \; B'_\gamma = A'^\alpha \; B'_\alpha,$$

что возможно при всех $A'^\beta \; B'_\gamma$ только в том случае, если

$$a^\alpha_\beta \; b^\gamma_\alpha = \delta^\gamma_\beta.$$

Учитывая, что

$$a^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta},$$

находим, что

$$b^\gamma_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha},$$

что соответствует коэффициентам преобразования ковариантного вектора.

Аналогичную теорему можно доказать для контравариантного тензора и для случая изменённого порядка сомножителей в (1). Кроме того вместо B_α можно рассматривать любую многокомпонентную величину с матричной структурой как у тензора; тогда можно сформулировать в общем виде так называемый **обратный тензорный признак**:

Пусть в каждой системе координат задана многокомпонентная величина B (индексы не указаны), такая, что при свёртывании её с произвольным тензором A по n индексам, получается тензор с валентностью на $2n$ меньшей, чем сумма валентностей B и A, тогда величина B является тензором.

8. Контравариантный и смешанный метрический тензор.

Определитель метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ обозначим g

$$g = |g_{\alpha\beta}|. \tag{1}$$

Как определено выше, контравариантный метрический тензор является матрицей, обратной ковариантному метрическому тензору, тогда по известной формуле

$$g^{\alpha\beta} = \frac{G_{\beta\alpha}}{g}, \tag{2}$$

где $G_{\alpha\beta}$ – алгебраическое дополнение элемента $g_{\alpha\beta}$ в определителе $|g_{\alpha\beta}|$, то есть минор, соответствующий этому элементу, умноженный на $(-1)^{\alpha+\beta}$. Из формулы

$$dx^\alpha = g^{\alpha\beta}\, dx_\beta \tag{3}$$

согласно обратному тензорному признаку следует, что $g^{\alpha\beta}$ действительно контравариантный тензор. Свёртка

$$g^\alpha_\beta = g_{\beta\gamma}\, g^{\gamma\alpha} \tag{4}$$

называется смешанным метрическим тензором. Чтобы найти его компоненты, напишем следующую цепочку равенств для произвольного вектора A_β:

$$A_\beta = g_{\beta\gamma}\, A^\gamma = g_{\beta\gamma}\, g^{\gamma\alpha}\, A_\alpha = g^\alpha_\beta\, A_\alpha. \tag{5}$$

Так как это равенство должно иметь место при всех значениях A_α, то необходимо:

$$g^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{6}$$

то есть g^α_β совпадает с единичным тензором

$$g^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta = g_{\beta\gamma}\, g^{\gamma\alpha}. \tag{7}$$

Если этот тензор свернуть, то получится инвариант

$$g^\alpha_\alpha = n, \tag{8}$$

дающий, очевидно, число измерений рассматриваемого метрического пространства.

9. Ассоциированные тензоры. Поднятие и опускание индексов Контравариантный и ковариантный векторы по отношению друг к другу называют **ассоциированными**. Они связаны друг с другом соотношениями

$$a^\alpha = a_\beta\, g^{\beta\alpha}, \quad a_\alpha = g_{\beta\alpha}\, a^\alpha.$$

Аналогично свёртывание с метрическим тензором позволяет **поднимать** и **опускать** любой индекс у любого тензора. Два тензора, связанные друг с другом

операцией поднятия или опускания индексов, называются **ассоциированными** друг другу. Если ранг тензора выше 1, то он может иметь несколько ассоциированных тензоров. Поскольку ассоциированные тензоры целесообразно обозначать одной буквой, то необходимо принимать во внимание порядок , в котором верхние индексы расположены по отношению к нижним, чтобы поднятия и опускания не перемешивали порядок следования индексов. Ассоциированные тензоры можно рассматривать как различные представления одного тензора, так как они однозначно связаны между собой через метрический тензор. Однако, **ассоциированные метрические тензоры сами не связаны между собой однозначно**, так как связывающее их соотношение (8.7) имеет 4 независимые компоненты, в то время как метрический тензор имеет 10 независимых компонент.

10. О порядке сомножителей в тензорной записи В отличии от произведения матриц, **порядок тензорных сомножителей не существен**, так как информация, содержащаяся в порядке сомножителей, а также транспонировании и взятии следа матриц, в тензорной записи заключается в том, какие индексы с какими сворачиваются [Иванов, 2A6E7d01.pdf (3.1)].

Заметим, что в квантовой электродинамике используется и тензорный и матричный язык, что требует соответствующего внимания.

§5. Некоторые важные пространства и системы координат.

1. Кривые и плоские пространства. Криволинейные и прямолинейные координаты. Метрика пространства однозначно определяется метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, но в пространстве с заданной метрикой можно пользоваться различными системами координат, каждой из которых соответствует своя зависимость тензора $g_{\mu\nu}$ от координат, то есть одна и та же метрика может быть определена различными способами. Пользуясь определённой системой координат, можно метрику задать однозначно, но вид тензора $g_{\mu\nu}$ изменяется при изменении системы координат так, что длины всех векторных элементов пространства сохраняются. Матрица преобразования координат A, вообще говоря, произвольна и, например, в случае пространства-времени имеет 16 независимых компонент. Подбором 10 из них (за счёт подходящего выбора системы координат) в любой **точке** можно привести симметричный метрический тензор, имеющий 10 независимых компонент к любому заранее заданному виду, например, к **галилееву виду** [Ландау 2, с. 291]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{галл.} \tag{1}$$

Система координат, в которой $g_{\mu\nu}$ имеет в данной точке галилеев вид, называется **локально галилеевой системой**. Причём остаётся ещё 6 свободных параметров

преобразования, в качестве которых можно взять параметры 4-х-мерных вращений вокруг данной точки. То есть локально галилееву (и любую другую) систему можно ориентировать произвольно. Если выбрать определённую её ориентацию, то в других точках $g_{\mu\nu}$ будет определённой функцией. В локально галилеевой системе матрица A ортогональна.

Риманово пространство называется **плоским** если в окрестности **каждой** его точки существует такая система координат x^μ (**декартовы координаты**), что в этой окрестности

$$ds^2 = \varepsilon_1(dx^1)^2 + \ldots + \varepsilon_n(dx^n)^2, \tag{2}$$

где ds^2 – скалярный квадрат векторного элемента пространства,

$\varepsilon_i = \pm 1$.

Если $\varepsilon_i = +1$, то пространство – **плоское эвклидово**, Если хотя бы один из $\varepsilon_i = -1$, то пространство – **плоское псевдоэвклидово**. Если условию (2) нельзя удовлетворить сразу во всём пространстве, то пространство называется **кривыми**.

Таким образом **необходимым и достаточным условием плоского пространства** является существование системы координат, в которой метрический тензор постоянен во всём этом пространстве. Такую систему координат называют **прямолинейной** (**декартовой**), в противном случае – **криволинейной**.

Ясно, что в кривом прстранстве возможны лишь криволинейные координаты, а в плоском – как криволинейные так и прямолинейные.

Прямолинейную систему координат псевдоэвклидова пространства называют также **галилеевой системой координат**.

Степень кривизны пространства можно определить количественно и ковариантно, то есть независимо от системы координат, с помощью понятия **тензора кривизны**, которое мы рассмотрим ниже.

Соответствующим выбором системы координат матрицу $g_{\mu\nu}$ в какой-либо точке (а в плоском пространстве – во всех точках), всегда можно привести к любому виду. В плоском пространстве это выражается в произволе систем координат, вообще говоря, криволинейных (со своим $g_{\mu\nu}$).

Координаты, в которых $g_{\mu\nu}$ всюду имеет диагональный вид, то есть

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu, \tag{3}$$

называются **ортогональными (прямоугольными)**.

4-х-мерное **пространство-время**, которое мы будем рассматривать, **псевдоэвклидово**. Его метрический тензор $g_{\mu\nu}$ сразу во всех точках 4-пространства приводится к диагональному (**галилееву**) виду [Ландау 2, (82,2)]. При этом декартовы координаты являются галилеевыми. Линия в этом **4-пространстве** называется **мировой линией**.

Выражения, правильные в любой системе координат данного метрического пространства, называются **ковариантными выражениями** [Ландау 2, конец §82]. Соответствующие им феномены для случая пространства-времени обычно называют **законами природы**.

Заметим, что будучи приведённой в данной точке пространства-времени к диагональному виду, матрица величин $g_{\mu\nu}$ имеет одну положительную и три отрицательных компоненты (совокупность их знаков называют **сигнатурой** матрицы). Отсюда следует, в частности, что **определитель g, составленный из величин $g_{\mu\nu}$, в пространстве-времени всегда отрицателен**:

$$g < 0. \tag{4}$$

Галилеевым $g_{\mu\nu}$ в **плоском** (прямом) пространстве-времени соответствует эвклидова плоская геометрия 3-пространства. В криволинейных 4-х-мерных координатах, вообще говоря, 3-пространство является кривым, хотя пространство-время прямое.

Общим свойством векторов в **физическом пространстве-времени** является изменение знака пространственной компоненты при поднятии или опускании соответствующего пространственного индекса и неизменность временно́й компоненты при поднятии или опускании временно́го индекса. Согласно определению понятия тензора, это свойство распространяется вообще на тензорные индексы в таком пространстве. Отсюда, в частности, следует, что тензоры $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ имеют одинаковые матричные компоненты в галилеевых координатах

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}, \quad \text{галл.} \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что прямое (эвклидово или псевдоэвклидово) метрическое пространство можно рассматривать как линейное векторное пространство, векторами которого являются направленные отрезки, соединяющие пары точек метрического пространства. Кривые метрические пространства так рассматривать невозможно.

При переходе от одной декартовой системы координат x^μ к другой (тоже декартовой) x'^μ, координаты преобразуются по закону (сравни с [Фролов, с. 9])

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + x_0^\mu, \quad \Lambda^0{}_0 = 0, \tag{6}$$

при этом элемент интервала остаётся неизменным. Вектор x_0^μ характеризует смещение начала системы координат x'^μ относительно системы x^μ в момент времени $x^0 = 0$, а матрица $\Lambda^\mu{}_\nu$ содержит информацию о повороте осей и относительной скорости. В псевдоэвклидовом прямом пространстве-времени эти преобразования образуют **группу Пуанкаре**. Конкретное преобразование из группы Пуанкаре определяется заданием 10 параметров (сдвиг начала x_0^μ – 4 параметра, поворот осей – 3 параметра, скорость относительного движения – 3 параметра).

2. 4-мерный элемент объёма. Для системы отсчёта, галилеевой в данной точке, **элемент 4-объёма** определяется в этой же точке как произведение

дифференциалов координат

$$d\Omega = dx^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3. \tag{1}$$

(1) можно переписать в виде

$$d\Omega = dx^\alpha\ dx^\beta\ dx^\gamma\ dx^\delta\ E_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{2}$$

где $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – 16-ти компонентная совершенно антисимметричная величина, такая, что в **галилеевых координатах**

$$\left.\begin{array}{l} E^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta\ (0)} = 0,\ \mu = \nu \\ \quad (\mu,\nu\textit{– любая пара индексов}) \\ E^{0123\ (0)} = +1 \\ \quad (\textit{при этом } E^{(0)}_{0123} = -1) \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Значок (0) **указывает на галилеевы координаты**.

Тогда все отличные от нуля компоненты $E^{\alpha\beta\gamma\delta\ (0)}$ равны $+1$ или -1, смотря по тому, чётным или нечётным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ к последовательности $0,1,2,3$ ([Ландау 2, с. 32]).

Легко проверить, что (2) эквивалентно (1).

Для произвольной системы координат (штрихованной) элемент 4-объёма $d\Omega'$ определяется исходя из требования его инвариантности, то есть

$$d\Omega' = d\Omega. \tag{4}$$

Но если $d\Omega$ – инвариант, то поскольку $dx^\alpha\ dx^\beta\ dx^\gamma\ dx^\delta$ есть тензор, то и

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{ – тензор.} \tag{5}$$

Пока мы знаем значения компонент этого тензора лишь в галилеевых координатах. Попробуем найти их для произвольных координат.

Согласно общему правилу преобразования тензоров в произвольных координатах:

$$E'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\ \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varrho}\ \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\sigma}\ e^{\mu\nu\varrho\sigma}, \tag{6}$$

где

$$e^{\mu\nu\varrho\sigma} = E^{\mu\nu\varrho\sigma\ (0)},$$

это обычное обозначение для так называемого **символа Леви-Чевита**.

Не трудно проверить, что (6) можно переписать в виде

$$E'^{\alpha\beta\gamma\delta} = J\ e^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{7}$$

где J – определитель, составленный из производных dx'^α/dx^μ, то есть ничто иное как **якобиан преобразования** от галилеевых координат к произвольным.

Этот якобиан можно выразить через определитель метрического тензора $g'_{\alpha\beta}$ (в системе x'^{α}). Для этого пишем формулу преобразования метрического тензора:

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu}$$

и приравниваем определители, составленные из величин, стоящих в обеих сторонах этого равенства. (Напомним, что определитель произведения равен произведению определителей).

Тензор $g'^{\alpha\beta}$ является обратным тензору $g'_{\alpha\beta}$, определитель которого обозначим g'. Определитель тензора $g^{\mu\nu}$ в галилеевых координатах равен -1, поэтому имеем

$$\frac{1}{g'} = -J'^2,$$

откуда, опуская штрихи, имеем

$$J = \frac{1}{\sqrt{-g}}. \tag{8}$$

Таким образом

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{9}$$

Аналогично можно для ковариантного тензора найти:

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\varrho}} \frac{\partial x_{\delta}}{\partial x'_{\sigma}} e_{\mu\nu\varrho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{J} e_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Откуда

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (2), получим для произвольных координат

$$d\Omega = \sqrt{-g}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{11}$$

Мы рассмотрели элемент объёма для 4-х-мерного случая, а для пространств других измерений это можно сделать аналогично.

Заметим, что в [Ландау 2] $d\Omega$ обозначает не элемент 4-объёма, а произведение дифференциалов координат.

3. Угол между 4-векторами в псевдоэвклидовом пространстве. Угол γ между двумя 4-векторами A^{μ}, B^{μ} определяется [Корн, 16.8-1] как скаляр выражением

$$\cos\gamma = \frac{A^{\mu} B_{\mu}}{|A^{\alpha}||B^{\beta}|} = \frac{A^{\mu} B_{\mu}}{\sqrt{A^{\alpha} A_{\alpha} B^{\beta} B_{\beta}}}. \tag{1}$$

Разделяя временны́е и пространственные координаты 4-векторов, имеем

$$\cos\gamma = \frac{A^0B^0 - \mathbf{AB}}{\sqrt{(A^{02} - \mathbf{A}^2)(B^{02} - \mathbf{B}^2)}}. \tag{2}$$

Так как γ инвариант, то систему координат можно выбрать произвольно. Пусть 4-вектор A^μ времениподобный. Тогда существует система координат, в которой $\mathbf{A} = 0$. При этом

$$\cos\gamma = \frac{A^0B^0}{A^0\sqrt{B^{02} - \mathbf{B}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{B}^2}{B^{02}}}}. \tag{3}$$

Если и B^μ времениподобен, то $\mathbf{B}^2 \leqslant B^{02}$ и тогда

$$1 \leqslant \cos\gamma < \infty, \tag{4}$$

что возможно лишь для **мнимого угла**

$$\gamma = i\alpha, \tag{5}$$

где α – соответствующий **вещественный угол**. Согласно [Корн, 21.2-9]

$$\cos\gamma = \operatorname{ch} i\gamma = \operatorname{ch}\alpha. \tag{6}$$

Таким образом, если оба 4-вектора A^μ, B^μ **времениподобны**, то угол α между ними можно найти из выражения

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{B^{02}}$ – обычная скорость мировой линии, имеющая направление 4-вектора B^μ, измеренная в системе координат, в которой $\mathbf{A} = 0$.

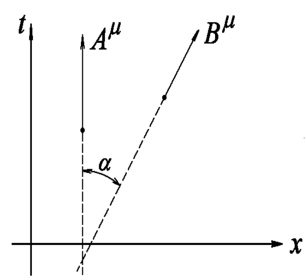


Рис. 102.1.

Если B^μ пространственноподобен, то $\mathbf{B}^2 > B^{02}$ и тогда $\cos\gamma$ мнимый, при этом

$$0 \leqslant i\cos\gamma \leqslant 1,$$

но в силу вещественности

$$\cos\gamma = \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2}$$

неравенство не возможно, то есть угол между времениподобным и пространственноподобным 4-векторами выражением (1) не определяется.

Если оба 4-вектора пространственноподобны, то угол между ними имеет обычный смысл, так как существует система координат, в которой они оба лежат в одном 3-пространстве.

4. 4-скорость в физическом пространстве-времени. В псевдоэвклидовом пространстве-времени не удобно оперировать с вектором скорости $\mathbf{v}$, так как его компоненты не являются компонентами 4-вектора и преобразуются не так как 4-х-мерные координаты. Действительно совокупность 4-х величин dx^μ/dt не обладает свойствами 4-вектора, так как dt не инвариант и $(dx^\mu/dt)(dx_\mu/dt)$ при преобразованиях Лоренца не сохраняет своё значение.

Заменив dt на инвариант

$$ds = dt\sqrt{1-v^2} \tag{1}$$

(в пределе малой скорости величины dt и ds совпадают), определим **4-скорость** как безразмерный 4-вектор

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{2}$$

Понятие 4-скорости можно применить к любому 4-вектору, определив её как безразмерное отношение этого 4-вектора к его модулю.

Очевидно в координатной записи

$$u^\mu = (\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}). \tag{3}$$

Пространственная компонента 4-скорости при $v \ll 1$ совпадает с $\mathbf{v}$. Из (3)

$$u^\mu u_\mu = 1 \ > 0, \tag{4}$$

то есть **4-вектор u^μ времениподобный**. Дифференцируя (4), имеем

$$u^\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0. \tag{5}$$

Временну́ю компоненту u^0 4-скорости будем называть **темпом**.

§6. Ковариантное дифференцирование.

(см. [Ландау 2, §85]).

Пространство-время, в котором строится наша теория – плоское псевдоэвклидово, поэтому в общих дифференциальных выражениях, записанных в 4-х-мерном виде нам нет нужды использовать ковариантное дифференцирование, так при этом обычное дифференцирование просто совпадает с ковариантным дифференцированием. Последнее может понадобиться только при использовании криволинейных координат и при сопоставлении с другими теориями.

1. Нековариантность дифференциала вектора в криволинейных координатах. Рассмотрим некоторое векторное поле $A_\mu(x_\nu)$. В галилеевых координатах (и вообще, когда величины $g_{\mu\nu}$ постоянны) дифференциалы dA_μ вектора A_μ образуют вектор, а производные $\partial A_\mu/\partial x^\nu$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_μ не есть вектор, а $\partial A_\mu/\partial x^\nu$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_μ есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования являются функциями координат.

Таким образом, dA_μ преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x \partial \alpha} = 0$, то есть если x'^μ являются линейными функциями от x^μ, формулы преобразования имеют вид

$$dA_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, dA'_\mu,$$

то есть в этом случае dA_ν преобразуется как вектор.

Нековариантность дифференциала вектора влечёт нековариантность дифференциалов тензоров более высокого ранга.

2. Параллельный перенос вектора. Ковариантный дифференциал вектора. Для того, чтобы получить в криволинейных координатах понятие дифференциала вектора, являющегося вектором (ковариантный дифференциал вектора), надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства (понятие разности векторов, находящихся в разных точках криволинейного пространства, пока не определено) Другими словами, надо каким-то определённым образом “перенести” один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй, после чего найти разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства. Сама операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в галилеевых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом $dA\mu$. Поскольку dA_μ есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании галилеевыми координатами компоненты вектора не должны изменяться. Но такой перенос есть ни что иное, как перенос вектора параллельно самому себе. При параллельном переносе вектора его компоненты в галилеевых координатах не меняются. В криволинейных же координатах понятие параллельного переноса пока вообще не определено. Тогда определим **параллельный перенос вектора в криволинейных координатах** так, чтобы являлась вектором величина

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu,$$

где

δA^μ – изменение вектора A^μ в результате определяемого переноса из точки x^μ в точку $x^\mu + dx^\mu$,

dA^μ – разность значений вектора A^μ в точках $x^\mu + dx^\mu$ и x^μ.

Величину DA^μ назовём **ковариантным дифференциалом вектора** A^μ.

3. Символы Кристоффеля. Так как A^μ при параллельном переносе является функцией x^μ, то в первом порядке малости δA^μ пропорционально dx^μ. Кроме того δA^μ зависит от самого вектора A^μ, причём эта зависимость должна быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом δA^μ можно записать в виде

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\varrho} A^\nu \, dx^\varrho, \tag{1}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ – некоторая многокомпонентная функция координат, вид которой зависит, конечно, от выбора системы координат; в галилеевой системе, очевидно, $\Gamma^\mu_{\nu\varrho} = 0$.

Уже отсюда видно, что величины $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В искривлённом пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ везде в нуль. Можно, однако, выбрать такую систему координат, в которой $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ обращаются в нуль в данном бесконечно малом участке (см. ниже). Величины $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ носят название **символов Кристоффеля** или **связностей** [Логунов]. Мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{\mu,\nu\varrho}$, определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{\mu,\nu\varrho} = g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\varrho}. \tag{2}$$

Обратно

$$\Gamma^\mu_{\nu\varrho} = g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha,\nu\varrho}. \tag{3}$$

Изменение ковариантного вектора при параллельном переносе также легко связать с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что, как и вообще при любом переносе, **при параллельном переносе скаляры не меняются**. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_μ и B^μ – некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_\mu B^\mu) = 0$ имеем:

$$B^\mu \, \delta A_\mu = -A_\mu \, \delta B^\mu = \Gamma^\mu_{\nu\varrho} B^\nu A_\mu \, dx^\varrho, \tag{4}$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^\mu \, \delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\varrho} A_\nu B^\mu \, dx^\varrho. \tag{5}$$

Отсюда имеем ввиду произвольности B^μ:

$$\delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\varrho} A_\nu \, dx^\varrho, \tag{6}$$

чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

4. Ковариантные производные вектора. Так как

$$dA_\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\varrho}\, dx^\varrho, \tag{1}$$

то имея выражение для δA_μ, мы можем записать ковариантный дифференциал контравариантного вектора в виде

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\varrho} + \Gamma^\nu_{\mu\varrho} A^\nu\right)\, dx^\varrho. \tag{2}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\varrho} - \Gamma^\mu_{\nu\varrho} A_\nu\right)\, dx^\varrho. \tag{3}$$

Выражения, стоящие в скобках являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^ϱ они дают снова вектор. Очевидно, что они и являются теми тензорами, которые осуществляют искомое обобщение понятия производной от вектора на криволинейные координаты. Эти тензоры носят название **ковариантных производных** соответственно векторов A^μ и A_μ. Мы будем обозначать их посредством $A^\mu_{;\varrho}$ и $A_{\mu;\varrho}$. Таким образом,

$$DA^\mu = A^\mu_{;\varrho}\, dx^\varrho, \quad DA_\mu = A_{\mu;\varrho}\, dx^\varrho, \tag{4}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^\mu_{;\varrho} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\varrho} + \Gamma^\nu_{\mu\varrho} A^\nu, \tag{5}$$

$$A_{\mu;\varrho} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\varrho} - \Gamma^\mu_{\nu\varrho} A_\nu. \tag{6}$$

В галилеевых координатах $\Gamma^\nu_{\mu\varrho} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

5. Ковариантные производные тензора. Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо найти изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой нибудь контравариантный тензор в виде произведения двух контравариантных векторов $A^\mu B^\nu$. При их параллельном переносе имеем:

$$\delta(A^\mu B^\nu) = A^\mu\, \delta B^\nu + B^\nu\, \delta A^\mu = -A^\mu \Gamma^\nu_{\varrho\alpha} B^\varrho\, dx^\alpha - B^\nu \gamma^\mu_{\varrho\alpha} A^\varrho\, dx^\alpha. \tag{1}$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора $A^{\mu\nu}$:

$$\delta A^{\mu\nu} = -(A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\varrho} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\varrho})\, dx^\varrho. \tag{2}$$

Подставляя это в

$$DA^{\mu\nu} = dA^{\mu\nu} - \delta A^{\mu\nu} \equiv A^{\mu\nu}_{;\varrho}, \tag{3}$$

находим ковариантную производную тензора $A^{\mu\nu}$ в виде

$$A^{\mu\nu}_{;\varrho} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\varrho} A^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\varrho} A^{\mu\alpha}. \tag{4}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров в виде

$$A^{\mu}_{\nu;\varrho} = \frac{\partial A^{\mu}_{\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\varrho} A^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\varrho} A^{\alpha}_{\nu}, \tag{5}$$

$$A_{\mu\nu;\varrho} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\varrho} A_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\varrho} A_{\mu\alpha}. \tag{6}$$

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования: чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^ϱ, к обычной производной $\partial A^{\cdots}_{\cdots}/\partial x^\varrho$ на каждый ковариантный индекс μ ($A^{\cdots}_{.\mu.}$) надо прибавить член $-\Gamma^{\nu}_{\mu\varrho} A^{\cdots}_{.\nu.}$, а на каждый контравариантный индекс i ($A^{.\mu.}_{\cdots}$) надо прибавить член $+\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} A^{.\nu.}_{\cdots}$.

Можно легко убедится в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, то есть как ковариантный вектор $\varphi_\nu = \partial\varphi/\partial x^\nu$ в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения $A_\mu B_\nu$ равна

$$(A_\mu B_\nu)_{;\varrho} = A_{\mu;\varrho} B_\nu + A_\mu B_{\nu;\varrho}. \tag{7}$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные. Так,

$$A^{;\nu}_{\mu} = g^{\nu\varrho} A_{\mu;\varrho}, \quad A^{\mu;\nu} = g^{\nu\varrho} A^{\mu}_{;\varrho}. \tag{8}$$

6. Симметрия символов Кристоффеля. Докажем, что символы Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ симметричны по нижним индексам. Поскольку ковариантная производная вектора $A_{\mu;\nu}$ есть тензор, то разность $A_{\mu;\nu} - A_{\nu\mu}$ есть тензор. Пусть вектор A_μ есть градиент скаляра, то есть $A_\mu = \partial\varphi/\partial x^\mu$. Поскольку

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu},$$

то с помощью выражения

$$A_{\mu;\varrho} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\varrho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} A_\nu,$$

имеем:

$$A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = (\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\nu\mu})\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\varrho}}.$$

В галилеевой системе координат ковариантные производные превращаются в обычные, а потому левая часть написанного равенства обращается в нуль. Но поскольку $A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ есть тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он должен быть равен нулю в любой системе координат. Отсюда находим, что

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu}.$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{\mu,\nu\varrho} = \Gamma_{\mu,\varrho\nu}.$$

В общем случае имеется всего 40 различных величин $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ – для каждого из четырёх значений индекса μ имеется 10 различных пар значений индексов ν и ϱ (считая пары, получающиеся перестановкой ν и ϱ одинаковыми).

7. Преобразование символов Кристоффеля. Приведём формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля. Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования обеих сторон равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих сторон были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = \Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\varrho}} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\varrho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}.$$

Из этой формулы видно, что величины $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат (когда исчезает второй член в выражении).

Эта формула позволяет легко доказать возможность такого выбора системы координат, при котором все $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ обращаются в нуль в любой наперёд заданной точке (такую систему называют **локально-инерциальной** или **локально-геодезической**.

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ имеют в ней первоначально (в координатах x^{μ}) значения $(\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho})_0$. Произведём вблизи этой точки преобразование

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho})_0 x^{\nu}x^{\varrho}. \qquad (1)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\varrho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\right)_0 = (\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho})_0$$

и согласно формуле преобразования все $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$ обращаются в нуль.

Заметим, что для преобразования (1)

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \delta^{\mu}_{\nu},$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора $g_{\mu\nu}$) в заданной точке, так что **обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением $g_{\mu\nu}$ к галилееву виду**.

8. Ковариантная производная метрического тензора. Докажем, что ковариантная производная метрического тензора $g_{\mu\nu}$ равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_μ, как и для всякого вектора, имеет место соотношение

$$DA_\mu = g_{\mu\nu} DA^\nu.$$

С другой стороны, $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, и потому

$$DA_\mu = D(g_{\mu\nu} A^\nu) = g_{\mu\nu} DA^\nu + A^\nu D g_{\mu\nu}.$$

Сравнивая с $DA_\mu = g_{\mu\nu} DA^\nu$, имеем в виду произвольности вектора A^μ:

$$D g_{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

Поэтому и ковариантная производная

$$g_{\mu\nu;\varrho} = 0. \tag{2}$$

Таким образом, **при ковариантном дифференцировании $g_{\mu\nu}$ надо рассматривать как постоянные**.

9. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором. Равенством $g_{\mu\nu;\varrho} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ через метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Для этого напишем согласно общему определению:

$$g_{\mu\nu;\varrho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\varrho} - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\varrho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma_{\nu,\mu\varrho} - \Gamma_{\mu,\nu\varrho} = 0.$$

Таким образом, производные от $g_{\mu\nu}$ выражаются через символы Кристоффеля. (Выбор локально-геодезической системы координат означает поэтому обращение в нуль в данной точке всех первых производных от компонент метрического тензора). Напишем эти производные, переставляя индексы μ, ν, ϱ:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} = \Gamma_{\nu,\mu\varrho} + \Gamma_{\mu,\nu\varrho},$$

$$\frac{\partial g_{\varrho\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\varrho} + \Gamma_{\varrho,\mu\nu},$$

$$-\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^\mu} = -\Gamma_{\varrho,\nu\mu} - \Gamma_{\nu,\varrho\mu}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{\mu,\nu\varrho} = \Gamma_{\mu,\varrho\nu}$):

$$\Gamma_{\mu,\nu\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^\mu}\right). \tag{1}$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha,\nu\varrho}$:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\varrho}} + \frac{\partial g_{\alpha\varrho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^{\alpha}}\right). \qquad (2)$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффкля через метрический тензор.

Выведем полезное выражение для упрощённого символа Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}$. Для этого найдём дифференциал dg определителя, g, составленного из компонент тензора $g_{\mu\nu}$; dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора $g_{\mu\nu}$ и умножив её на свой коэффициент в определителе, то есть на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора $g^{\mu\nu}$, обратного тензору $g_{\mu\nu}$ равны, как известно, минорам определителя из величин $g_{\mu\nu}$ делённым на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны $gg^{\mu\nu}$. Таким образом,

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \qquad (3)$$

(поскольку $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = 4$, то $g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$).

Из (2) имеем:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right).$$

Меняя местами индексы α и μ в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}},$$

или согласно (3)

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}}. \qquad (4)$$

Полезно отметить также выражение для величины $g^{\nu\varrho}\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$. Имеем:

$$g^{\nu\varrho}\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = \frac{1}{2}g^{\nu\varrho}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\varrho}} + \frac{\partial g_{\varrho\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^{\alpha}}\right) =$$

$$= g^{\nu\varrho}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\varrho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^{\alpha}}\right).$$

С помощью (3) это можно преобразовать к виду

$$g^{\nu\varrho}\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}g^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}. \qquad (5)$$

При различных вычислениях бывает полезным иметь в виду, что производные от контравариантного тензора $g^{\mu\nu}$ связаны с производными от $g_{\mu\nu}$ соотношениями

$$g_{\mu\varrho}\frac{\partial g^{\varrho\nu}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{\varrho\nu}\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x^{\alpha}}, \qquad (6)$$

(получающимися при дифференцировании равенства $g_{\mu\varrho}g^{\varrho\nu} = \delta^{\nu}_{\varrho}$).

Наконец укажем, что производные от $g^{\mu\nu}$ тоже могут быть выражены через величины $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$. Именно, из тождества $g^{\mu\nu}_{;\varrho} = 0$ непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\varrho}g^{\alpha\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\varrho}g^{\mu\alpha}, \tag{7}$$

а из сравнения (5.4) и (5.5) или из $g_{\mu\nu;\varrho} = 0$ следует

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\varrho}g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\varrho}g_{\mu\alpha}, \tag{8}$$

10. Ковариантные обобщения других дифференциальных операций. С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^{\mu}_{;\mu}$, являющееся **обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты**. Воспользовавшись (9.4), имеем:

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\mu}A^{\varrho} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + A^{\varrho}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\varrho}},$$

или окончательно

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\ln\sqrt{-g}A^{\mu})}{\partial x^{\mu}}. \tag{1}$$

Аналогичное выражение можно получить и для дивергенции антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$. Из определения ковариантной производной имеем:

$$A^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}A^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}A^{\mu\alpha}.$$

Но поскольку $A^{\alpha\nu} = -A^{\nu\alpha}$, то

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}A^{\alpha\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}A^{\nu\alpha} = 0.$$

Подставляя выражение (9.4) для $\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}$, находим, следовательно:

$$A^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\ln\sqrt{-g}A^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}}. \tag{2}$$

Пусть теперь $A_{\mu\nu}$ – симметричный тензор; найдём выражение $A^{\nu}_{\mu;\nu}$ для его смешанных компонент. Имеем:

$$A^{\nu}_{\mu;\nu} = \frac{\partial A^{\nu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\nu}_{\varrho\nu}A^{\varrho}_{\mu} - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}A^{\nu}_{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\varrho}_{\nu\mu}A^{\nu}_{\varrho}.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}}\right)A^{\nu\varrho}.$$

В силу симметрии тензора $A^{\nu\varrho}$ два члена в скобках взаимно сокращаются, и остаётся

$$A^{\nu}_{\mu;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\nu}_{\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^{\mu}}A^{\nu\varrho}. \tag{3}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$. Однако с помощью выражений для $A_{\mu;\nu}$ и в виду того, что $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu}$, имеем:

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{4}$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x^\mu}$ вторых производных от некоторого скаляра φ. Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдёт в $\varphi^{;\mu}_{;\mu}$. Но $\varphi_{;\mu} = \partial\varphi/\partial x^\mu$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс μ, имеем:

$$\varphi^{;\mu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}$$

и с помощью (1) находим:

$$\varphi^{;\mu}_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\right). \tag{5}$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объёму может быть написана в виду (1) как

$$\oint A^\mu\sqrt{-g}dS_\mu = \int A^{\mu}_{;\mu}\sqrt{-g}d\Omega. \tag{6}$$

§7. Тензор кривизны.

1. Геодезические линии. Если $x^\mu = x^\mu(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки), то вектор $u^\mu = dx^\mu/ds$ есть **единичный вектор, касательный к кривой**.

Если вектор u^μ, касательный к некоторой линии в точке x^μ, то в точке $x^\mu + dx^\mu$ этой же линии в той же системе координат представим касательный вектор в виде $u^\mu + dx^\mu$. Параллельный перенос вектора u^μ из точки x^μ в точку $x^\mu + dx^\mu$ даёт вектор $u^\mu + \delta x^\mu$. Условие параллельности переноса означает, что величина

$$Du^\mu = du^\mu - \delta u^\mu$$

является вектором.

Если в бесконечно малой окрестности точки x^μ линия такова, что $Du^\mu = 0$, то её будем называть **геодезической в точке** x^μ. Линию будем называть

геодезической, если она геодезическая во всех своих точках. Иными словами **на геодезической линии касательный вектор при параллельном переносе между любыми её точками остаётся касательным вектором неизменной длины**. Таким образом условие

$$Du^\mu = 0$$

является **уравнением геодезической линии**.

При параллельном переносе двух векторов их скалярное произведение и длины не изменяются, то есть остаётся постоянным угол между ними. Поэтому мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора вдоль какой-либо геодезической линии угол между этим вектором и касательной к линии остаётся неизменным. Другими словами, при параллельном переносе вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменными.

2. Параллельный перенос вектора по контуру.

Весьма существенно, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую даёт разные результаты, если он совершается по разным путям. В частности, если параллельно переносить вектор по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, вообще говоря, не совпадёт со своим исходным состоянием. Для иллюстрации рассмотрим двумерное искривлённое пространство, то есть некоторую кривую поверхность. Для наглядности на рисунке выбран контур, ограниченный тремя геодезическими линиями. Вектор параллельно переносится последовательно через точки A, B, C, возвращаясь в точку A, принимая в этих точках состояния $1, 2, 3$ и возвращаясь в точку A в состоянии $1'$, которое не совпадает с состоянием 1.

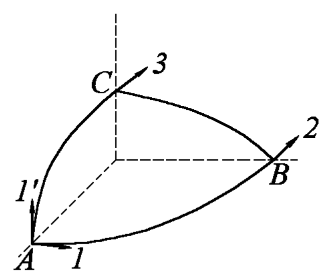


Рис. 102.2.

3. Тензор кривизны (Римана). Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура. Это изменение ΔA_ν можно записать в виде $\oint \delta A_\nu$, где интеграл берётся по данному контуру. Подставляя вместо δA_ν выражение (6.3.6), имеем

$$\Delta A_\nu = \oint \Gamma^\mu_{\nu\varrho} A_\mu dx^\varrho. \tag{1}$$

Стоящий под интегралом вектор A_μ меняется по мере его переноса вдоль контура.

Для дальнейшего преобразования этого интеграла необходимо заметить следующее. Значения вектора A_μ в точках внутри контура неоднозначны – они зависят от пути, по которому мы приходим в данную точку. Мы увидим, однако из получаемого ниже результата, что эта неоднозначность – второго порядка малости. Поэтому с достаточной для преобразования точностью до величин первого порядка можно считать компоненты вектора A_μ в точках внутри бесконечно малого контура однозначно определяющимися их значениями на самом контуре по формулам $\delta A_\mu = \Gamma^\beta_{\mu\varrho} A_\beta dx^\varrho$, то есть по производным

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\varrho} = \Gamma^\beta_{\mu\varrho} A_\beta. \tag{2}$$

Применяя теперь к интегралу (1) теорему Стокса ( ) и учитывая, что площадь огибаемой рассматриваемым контуром поверхности есть бесконечно малая величина $\Delta f^{\varrho\alpha}$, получим:

$$\Delta A_\nu = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^\mu_{\nu\alpha} A_\mu)}{\partial x^\varrho} - \frac{\partial(\Gamma^\mu_{\nu\varrho} A_\mu)}{\partial x^\alpha}\right]\Delta f^{\varrho\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\varrho} A_\mu - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\varrho}}{\partial x^\alpha} A_\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\varrho} - \Gamma^\mu_{\nu\varrho}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}\right]\Delta f^{\varrho\alpha}.$$

Подставляя сюда значения производных из (2), находим окончательно:

$$\Delta A_\nu = \frac{1}{2} R^\mu_{\nu\varrho\alpha} A_\mu \Delta f^{\varrho\alpha}, \tag{3}$$

где $R^\mu_{\nu\varrho\alpha}$ – тензор 4-го ранга:

$$R^\mu_{\nu\varrho\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\varrho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\varrho}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\varrho}\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} - \Gamma^\mu_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\nu\varrho}. \tag{4}$$

Тензорный характер $R^\mu_{\nu\varrho\alpha}$ виден из того, что в (3) слева стоит вектор – разность ΔA_ν значений вектора в одной и той же точке. Тензор $R^\mu_{\nu\varrho\alpha}$ называется **тензором кривизны** или **тензором Римана**.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^ν. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^\nu B_\nu) = 0$, где B_ν – любой ковариантный вектор. С помощью (3) имем отсюда:

$$\Delta(A^\nu B_\nu) = A^\nu \Delta B_\nu + B_\nu \Delta A^\nu = \frac{1}{2} A^\nu B_\mu R^\mu_{\nu\varrho\alpha}\Delta f^{\varrho\alpha} + B_\nu \Delta A^\nu =$$

$$= B_\nu\left(\Delta A^\nu + \frac{1}{2} A^\mu R^\nu_{\mu\varrho\alpha}\Delta f^{\varrho\alpha}\right) = 0,$$

или, в виду произвольности вектора B_ν:

$$\Delta A^\nu = -\frac{1}{2} R^\nu_{\mu\varrho\alpha} A^\mu \Delta f^{\varrho\alpha}. \tag{5}$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_μ по x^ν и по x^ϱ, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{\mu;\nu;\varrho} - A_{\mu;\varrho;\nu}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. Именно, имеет место формула

$$A_{\mu;\nu;\varrho} - A_{\mu;\varrho;\nu} = A_\alpha R^\alpha_{\mu\nu\varrho}, \tag{6}$$

которую легко проверить непосредственным вычислением в локально-геодезической системе координат. Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^\mu_{;\nu;\varrho} - A^\mu_{;\varrho;\nu} = -A^\alpha R^\mu_{\alpha\nu\varrho} \tag{7}$$

(формулу (7) можно получить также и непосредственно из (6) путём поднятия индекса μ и использования свойств симметрии тензора $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$ (см. ниже)).

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров (это проще всего сделать, рассматривая, например, тензор вида $A_\mu B_\nu$ и пользуясь при этом формулами (6),(7); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора $A_{\mu\nu}$). Так,

$$A_{\mu\nu;\varrho;\alpha} - A_{\mu\nu;\alpha;\varrho} = A_{\mu\beta} R^\beta_{\nu\varrho\alpha} + A_{\beta\nu} R^\beta_{\mu\varrho\alpha}. \tag{8}$$

Очевидно, что в плоском 4-пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в плоском пространстве можно выбрать координаты, в которых везде все $\Gamma^\mu_{\nu\varrho} = 0$, а потому и $R^\mu_{\nu\varrho\alpha} = 0$. В силу тензорного характера $R^\mu_{\nu\varrho\alpha}$ эти величины равны тогда нулю и в любой другой системе координат. Это соответствует тому, что в плоском пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется.

Имеет место и обратная теорема: если $R^\mu_{\nu\varrho\alpha} = 0$, то 4-пространство плоское. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, галилееву в данном бесконечно малом участке. При $R^\mu_{\nu\varrho\alpha} = 0$ параллельный перенос есть однозначная операция, и, перенося таким образом галилееву систему из данного малого участка во все остальные, можно построить галилееву систему во всём пространстве, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли 4-пространство плоским или искривлённым.

Заметим, что хотя в кривом пространстве и можно выбрать локально-геодезическую (для данной точки) систему координат, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ не обращаются в нуль вместе с самими $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$).

4. Свойства тензора кривизны. Тензор кривизны обладает свойствами симметрии, для полного выявления которых следует перейти от смешанных

компонент $R^{\mu}_{\nu\varrho\alpha}$ к ковариантным:

$$R_{\mu\nu\varrho\alpha} = g_{\mu\beta} R^{\beta}_{\nu\varrho\alpha}.$$

Простыми преобразованиями легко получить для них следующее выражение:

$$R_{\mu\nu\varrho\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\varrho} + \frac{\partial^2 g_{\nu\varrho}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\varrho}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\varrho}\right) + \\ + g_{\beta\gamma}(\Gamma^{\beta}_{\nu\varrho}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\mu\varrho}). \tag{1}$$

Из этого выражения очевидны следующие свойства симметрии:

$$R_{\mu\nu\varrho\alpha} = -R_{\nu\mu\varrho\alpha} - R_{\mu\nu\alpha\varrho}, \tag{2}$$

$$R_{\mu\nu\varrho\alpha} = R_{\varrho\alpha\mu\nu}, \tag{3}$$

то есть тензор антисимметричен по каждой из пар индексов $\mu\nu$ и $\varrho\alpha$ и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом. В частности, все компоненты $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$, диагональные по паре индексов $\mu\nu$ или $\varrho\alpha$, равны нулю.

Далее легко проверить, что равна нулю циклическая сумма из компонент $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$, образованная по любым трём из их индексов, например:

$$R_{\mu\nu\varrho\alpha} + R_{\mu\alpha\nu\varrho} + R_{\mu\varrho\alpha\nu} = 0 \tag{4}$$

(остальные соотношения такого рода получаются из (4) автоматически в силу свойств (2),(3).

Докажем следующее **тождество Бианки**:

$$R^{\beta}_{\mu\nu\varrho;\alpha} + R^{\beta}_{\mu\alpha\nu;\varrho} + R^{\beta}_{\mu\varrho\alpha;\nu} = 0. \tag{5}$$

Его удобно проверить, воспользовавшись локально-геодезической системой координат. В силу тензорного характера соотношение (5) будет справедливым и в любой другой системе. Дифференцируя выражение (4) и полагая затем в нём $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho} = 0$, находим в рассматриваемой точке:

$$R^{\beta}_{\mu\nu\varrho;\alpha} = \frac{\partial R^{\beta}_{\mu\nu\varrho}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\beta}_{\mu\varrho}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\varrho}.$$

С помощью этого выражения легко убедится в том, что (5) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путём упрощения получить тензор второго ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$ по индексам μ и ν или ϱ и α даёт нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам даёт, с точностью до знака, одинаковый результат. Мы определим тензор $R_{\mu\nu}$ (его называют **тензором Риччи**) как

$$R_{\mu\nu} = g^{\varrho\alpha} R_{\varrho\mu\alpha\nu} = R^{\varrho}_{\mu\varrho\nu}. \tag{6}$$

(В литературе используется также и другое определение тензора $R_{\mu\nu}$ – с упрощением $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$ по первому и последнему индексам. Такое определение отличается знаком от принятого нами определения.)

Согласно (4) имеем:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}} - \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\varrho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\varrho\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\varrho}\Gamma^{\varrho}_{\nu\alpha}. \tag{7}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{8}$$

Наконец, упрощая $R_{\mu\nu}$, получим инвариант

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\varrho}g^{\nu\alpha}R_{\mu\nu\varrho\alpha}, \tag{9}$$

называемый **скалярной кривизной** пространства.

Компоненты тензора $R_{\mu\nu}$ удовлетворяют дифференциальному тождеству, получающемуся упрощением тождества Бианки (5) по парам индексов $\mu\nu$ и $\varrho\beta$:

$$R^{\varrho}_{\alpha;\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha}}. \tag{10}$$

В силу соотношений (2)-(4) не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент.

Определение тензора кривизны, даваемое написанными выше формулами, относится к пространству любого числа измерений. Рассмотрим сначала случай пространства двух измерений, то есть обычную поверхность. Обозначим в этом случае (в отличие от четырёхмерных величин) тензор кривизны через P_{abcd}, а метрический тензор – через γ_{ab}, где индексы a, b, ... пробегают значения 1, 2. Поскольку в каждой из пар ab и cd два индекса должны иметь различные значения, то очевидно, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны либо совпадают друг с другом, либо отличаются знаком. Таким образом, в этом случае имеется лишь одна независимая компонента, например P_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна при этом равна

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \tag{11}$$

Величина $P/2$ совпадает с так называемой **гауссовой кривизной** поверхности K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}, \tag{12}$$

где ϱ_1, ϱ_2 – главные радиусы кривизны поверхности в данной её точке (напомним, что ϱ_1 и ϱ_2 считаются имеющими одинаковые знаки, если соответствующие им центры кривизны расположены по одну сторону от поверхности, и имеющими

разные знаки, если их центры кривизны лежат по разные стороны от поверхности; в первом случае $K > 0$, а во втором $K < 0$. Формулу (12) легко получить, написав уравнение поверхности вблизи заданной точки $x = y = 0$ в виде $z = \frac{x^2}{2\varrho_1} + \frac{y^2}{2\varrho_2}$. Тогда квадрат элемента длины на ней:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\varrho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\varrho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\varrho_1 \varrho_2} dx\, dy.$$

Вычисление P_{1212} в точке $x = y = 0$ по формуле (1) (в которой нужны лишь члены со вторыми производными от $\gamma_{\mu\nu}$) приводит к (12).

Перейдём к тензору кривизны трёхмерного пространства. Обозначим его через $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а метрический тензор через $\gamma_{\alpha\beta}$, где индексы α, β, ... пробегают значения 1, 2, 3. Пары индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ пробегают всего три существенно различных набора значений: 23, 31, 12 (перестановка индексов в паре меняет лишь знак компоненты тензора). Поскольку тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по отношению к перестановке этих пар, то имеется всего $3 \cdot 2/2 = 3$ независимых компоненты с различными парами индексов, а также 3 компоненты с одинаковыми парами. Тождество (4) не прибавляет ничего нового к этим ограничениям. Таким образом, в трёхмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметричный тензор $P_{\alpha\beta}$. Поэтому из линейных соотношений $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ все компоненты тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через $P_{\alpha\beta}$ и метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$. Действительно, запишем $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta},$$

удовлетворяющем условиям симметрии; здесь $A_{\alpha\beta}$ – некоторый симметричный тензор, связь которого с $P_{\alpha\beta}$ определяется путём упрощения написанного выражения по индексам α и β. Таким путём находим:

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} P\gamma_{\alpha\beta},$$

и окончательно:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

Если выбрать систему координат, декартову в данной точке, то надлежащим её поворотом можно привести тензор $P_{\alpha\beta}$ к главным осям. (Для фактического вычисления главных значений тензора $P_{\alpha\beta}$ нет необходимости производить преобразование к системе координат, декартовой в данной точке. Эти значения можно найти как корни λ уравнения $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$.) Таким образом, кривизна трёхмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами.

Наконец перейдём к четырёхмерному пространству. Пары индексов $\mu\nu$ и $\varrho\alpha$ пробегают в этом случае 6 различных наборов значений: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Поэтому имеется 6 компонент $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$ с одинаковыми и $6 \cdot 5/2 = 15$ компонент с

различными парами индексов. Последние, однако, ещё не все независимы друг от друга: три компоненты, у которых все четыре индекса различны, связаны в силу (4) одним тождеством:

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0.$$

Таким образом, в 4-пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент. Согласно [Корн, 17. 4-5] тензор кривизны имеет

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

существенных компонент. Свёрнутый тензор кривизны имеет

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

существенных компонент. Большее число компонент у тензора кривизны, чем у метрического тензора объясняется тем, что первый несёт больше информации о пространстве, так как зависит от более высоких производных координат.

Выбирая систему координат, галилееву в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту систему (так что значения $g_{\mu\nu}$ в данной точке не меняются), можно добиться обращения в нуль шести компонент тензора кривизны (шесть есть число независимых поворотов 4-системы координат). Таким образом, в общем случае кривизна 4-пространства определяется в каждой точке 14 величинами.

Если $R_{\mu\nu} = 0$, то в произвольной системе координат тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент. Надлежащим преобразованием координат можно тогда привести тензор $R_{\mu\nu\varrho\alpha}$ (в заданной точке 4-пространства) к "каноническому" виду, в котором его компоненты выражаются в общем случае через 4 независимые величины; в особых случаях это число может оказаться даже меньшим.

Мерой кривизны пространства, не зависящей от выбора системы координат, являются инварианты тензора кривизны этого пространства. Заметим, однако, что уже для 4-пространства существуют случаи такой метрики [Ландау 2, с. 340], когда пространство хотя и кривое, но его тензор кривизны вовсе не имеет отличных от нуля инвариантов.

§8. О размерности множеств.

1. Возможность дробной размерности. Обычно размерность пространства определяется числом координат, необходимым для однозначного задания точки пространства. Однако для подмножеств таких пространств можно дать определение размерности, которая, вообще говоря, может быть дробной. ([Ландау 6, с. 167]).

Объём множества точек в пространстве может быть равен нулю. Например, объём точки или линии или поверхности в трёхмерном пространстве равен нулю. Этот объём, однако, может быть ненулевым в другом пространстве – меньшей

размерности. Кроме точек, линий, поверхностей и тому подобных множеств могут существовать множества точек, определяемых весьма нерегулярно. (Например, канторовы множества). Существует весьма общее определение размерности, которое даётся следующим образом. Разобъём всё n-мерное пространство, содержащее множество, на малые кубики с длиной ребра ε и объёмом ε^n. Пусть $N(\varepsilon)$ – минимальное число кубиков, совокупность которых полностью покрывает множество. Определим размерность множества как предел (эта величиа известна в математике как предельная ёмкость множества. Её определение близко к определению так называемой хаусдорфовой (или фрактальной) размерности.)

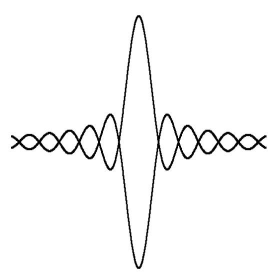
$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \tag{1}$$

Существование этого предела означает конечность объёма множества в D-мерном пространстве: при малом ε имеем $N(\varepsilon) \approx V\varepsilon^{-D}$ (где V – постоянная), откуда видно, что $N(\varepsilon)$ можно рассматривать как число D-мерных кубиков, покрывающих в D-мерном пространстве объём V. Определённая таким способом размерность не может, очевидно, превышать полную размерность n пространства, но может быть меньше её и, в отличие от привычной размерности, может быть дробной; именно такая она для канторовых множеств. Покрывающие множество n-мерные кубики могут оказаться "почти пустыми"; именно поэтому может быть $D < n$. Для обычных множеств данное определение даёт очевидные результаты. Так для множества N изолированных точек имеем $N(\varepsilon) = N$ и $D = 0$; для отрезка L линии: $N(\varepsilon) = L/\varepsilon,\ D = 1$; для площадки S двумерной поверхности: $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2,\ D = 2$, и т. д.

⋆ ⋆ ⋆

В математике нет символов для неясных мыслей.

Анри Пуанкаре.



Глава 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МИРА

§1. Основные представления Мира.

1. Постепенная конкретизация представлений Мира, начиная от наиболее общего. Мы не склонны различать понятия **Мир** и материя. Мы задались целью – создать теорию всего Мира. Для этого нужно создать математическую модель Мира. Можно напридумывать сколько угодно моделей Мира и все они будут правильными, если построены по правилам определенной логики. Главная трудность в создании и использовании моделей – это **трудность интерпретации**. Иначе говоря, модель должна быть практически полезна людям, то есть она должна отражать важные связи феноменов, отражённые в связях понятий. А это возможно лишь в том случае, если установлено соответствие между понятиями теории и жизненно важными феноменами материи.

Такие модели всегда абстрактны. Мы будем исходить из наиболее абстрактного представления Мира, переходя последовательно ко всё более и более конкретным (**развитым**) представлениям, полностью **математизируя** нашу теорию, то есть определяя каждое вновь вводимое понятие.

При этом, в качестве уже готового фундамента теории мы можем использовать все понятия математики, предполагая знакомство с ними читателя. Наиболее общим и, вместе с тем, наиболее элементарным математическим понятием является натуральное число. Мир чисел и их отношений (математика) настолько богат, что может пониматься как отображение всего наблюдаемого **Мира**. Во всяком случае лучшего средства его моделирования у нас нет. Трудность заключается лишь в **физической интерпретации математических понятий**.

Каждое натуральное число N представимо своим бесконечным множеством способов в виде комбинации других чисел посредством математических операторов. Иными словами, это число порождает свой **частный мир** собственных представлений. В этом смысле число $N = k^2$ назовём **номером частного мира**, а действительное число k – **корнем частного мира**.

2. Спектральное представление Мира.

Частный мир назовём **космосом**, если он порождается представлениями своего

номера космоса в виде

$$N = k^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2, \qquad (1)$$

где n_μ – целые числа (**компоненты представления**), а знак k определяется условием:

$$k/|k| = (-1)^{n_0}. \qquad (2)$$

Каждое такое представление числа N будем называть **спектральной точкой** (**4-х-мерного**) **космоса**. Условие (2) нарушает симметрию распределения спектральных точек в изотропных конусах прошлого и будущего, что делает координатное представление комплексным.

Выражение (1) можно записать в виде

$$n_\mu n^\mu = N = k^2, \qquad (3)$$

где обозначено

$n^\mu = (n^0,\ n^1,\ n^2,\ n^3)$,

$n_\mu = (n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3) = (n^0,\ -n^1,\ -n^2,\ -n^3)$,

k – **корень космоса**,

и использовано удобное **соглашение о суммировании** Эйнштейна, подразумевающее, что в выражении, содержащем один и тот же индекс как в верхней так и в нижней позиции, производится суммирование по всем значениям этого (как говорят, **немого**) индекса, то есть в данном случае

$$n_\mu n^\mu = n^\mu n_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} n^\mu n_\mu.$$

Множество всех спектральных точек космоса будем называть **космическим спектром** (или **единым космическим спектром**). **4-х-мерности космоса** соответствует число членов этой суммы. Из всевозможных размерностей космоса мы выбираем именно 4-х-мерность, исходя только из опыта и антропного принципа. Число N – пока неопределённое натуральное число, которому соответствует его корень k (не обязательно натуральное число). Выражение (3), при заданном N, можно рассматривать как **диафантово уравнение** относительно n_μ.

Космическому спектру однозначно сопоставим обобщённую (см.гл.5) функцию:

$$\Sigma(k_\mu) = \sum_{\substack{n_\mu=-\infty \\ n_\nu n^\nu = N}}^{n_\mu=\infty} \delta(k_0 - n_0)\,\delta(k_1 - n_1)\,\delta(k_2 - n_2)\,\delta(k_3 - n_3), \qquad (4)$$

которую назовём **плотностью космического спектра в спектральном пространстве** действительных чисел $\{k_\mu\}$.

Часть космического спектра при $k^0 > 0$ будем называть **(+)космическим спектром**, а при $k^0 < 0$ – **(−)космическим спектром**. При инверсии знака k^0

спектральные точки (+) и (–) спектров не совпадают (**разрешены**), так как имеют разные (**чётные и нечётные**) значения компоненты n_0.

3. Представление космоса единым полем. **Координатное представление космоса** в пространстве $X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ суммой плоских волн

$$U(X^\mu) = \sum_{n_\mu} e^{in_\mu X^\mu} \tag{1}$$

будем называть **единым (космическим) полем**, а само это 4-пространство – **пространством-временем**.

Из (1) следует, что направление волновых 4-векторов плоских волн $(-)$космического спектра противоположно во времени направлению волновых 4-векторов плоских волн $(+)$космического спектра. Компоненту единого поля, содержащую все плоские волны с $n_0 > 0$, будем называть **$(+)$космическим полем**, а вторую компоненту – **$(-)$космическим полем**. Таким образом единое (космическое) поле является суммой двух $(\pm)$космических полей.

Формула (1) задаёт единицы измерения координат X^μ, которые будем называть **естественными единицами измерения координат**. Дадим этим единицам название в честь Дирака – **дирак** (сокращённо **di**).

Поскольку поле $U(X^\mu)$ однозначно разлагается с помощью Фурье-анализа в сумму плоских волн, то между плотностью космического спектра и единым полем существует взаимнооднозначное соответствие, то есть они пребразуются друг в друга с помощью прямого и обратного пребразований Фурье. Поэтому плотность космического спектра будем также называть **спектральным представлением единого поля** (или **космоса**).

Легко видеть, что единое поле (как и две его космические компоненты u_+, u_-) удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока (**КГФ**)

$$\Box\, U \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu\; U = -k^2 U, \quad U = u_+ + u_-, \tag{2}$$

при $k^2 = N$. Решения этого уравнения, вообще говоря, не безразличны к знаку k, поэтому корень частного мира k следует рассматривать как двузначную константу

$$k = \pm\sqrt{N}. \tag{3}$$

Единое волновое уравнение (2) характеризует общие свойства единого поля, оно имеет инвариантную форму относительно **группы Лоренцевых преобразований** и трансляций (**преобразований Пуанкаре**) координат X^μ, рассматриваемых как **декартовы**, то есть **пространство-время однородно и изотропно и имеет псевдоэвклидову метрику**:

$$(dX)^2 = (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2,$$

где dX – бесконечно малый **интервал между двумя точками**.

Декартовость и **прямоугольность** (т.е. **галилеевость**) координат X^μ означает, что

$$X^\mu X_\mu = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2$$

Тогда для единого поля удобно также использовать произвольную декартову прямоугольную систему координат x^μ, связанную с X^μ группой преобразований Пуанкаре. В этой системе интервал тот же и запишется аналогично

$$(dX^2) = (dx)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{4}$$

Систему координат (X^0, X^1, X^2, X^3) будем называть **основной**.

Таким образом, если в пространстве-времени рассматривать само единое поле, то, в силу того, что оно зависит от координат, нельзя говорить об изотропности и однородности пространства. Однако, если отвлечься от данного места в пространстве и времени и рассматрмвать лишь общие свойства единого поля, задаваемые уравнением КГФ, то, в силу инвариантности последнего, можно считать пространство-время однородным и изотропным относительно этих общих свойств, откуда позднее мы получим законы сохранения. (О понятиях **инвариантности, ковариантности, форминвариантности** хорошо написано в [Логунов, §1, §2] и [Ландау 2, конец §82]).

Свойства обоих космических компонент единого поля почти совпадают, поэтому удобно их общее обозначение

$$u = u_\pm = \begin{cases} u_+ \\ u_- \end{cases}, \quad U = u_+ + u_-. \tag{5}$$

Все решения единого уравнения (2), в смысле функционального анализа, являются **компонентами единого поля**.

4. Интегралы движения единого поля. Уравнение единого поля (3.2)

$$\Box u = -k^2 u, \qquad U = u_+ + u_- \tag{1}$$

допускает разделение переменных, в результате которого возникают равноценные ему 4 уравнения 2-го порядка с одной переменной, содержащие 3 вещественные постоянные разделения. Общее решение каждого из этих 4-х уравненй содержит 2 вещественные постоянные интегрирования. Таким образом, общее решение уравнения (1) содержит 11 параметров, которые мы будем также называть **интегралами движения**. Любой конкретный набор значений этих 11 величин однозначно определяет **частное решение** уравнения (1), то есть решения **параметризованы** этими 11-ю параметрами. Постоянство этих величин в координатном 4-пространстве, в том числе и во времени, будем называть их **сохранением** для каждого частного решения. Таким образом, для решений уравнения единого поля существует ровно 11 сохраняющихся величин (интегралов движения).

5. О познавательной ценности космического спектра. Мы дали простое определение космического спектра. Однако существуют разные возможности обогащения понятия космического спектра.

Можно, например, выйти из множества натуральных значений чисел n_μ, но этот способ, если его проводить последовательно без ограничений, сводит спектр к сплошному, выхолащивая его нетривиальность, то есть лишая единое поле содержания.

Поэтому, мы рассчитываем на познавательную ценность именно данного определения мирового спектра. При необходимости всегда можно определить дополнительные понятия.

Отметим важность **принципа причинности**, так как один лишь **детерменизм** не столько связан с **понятием причинности**, (то есть связи событий) сколько с единственностью представления мира в 4-мерном пространстве-времени. Однако, без причинности не возможно **развитие**, то есть способ преобразования простых структур в сложные, а значит, не возможно **происхождение** сложных структур.

Задание мирового спектра посредством диофантова уравнения решает **проблему начальных условий** в физике Вселенной. Спектральные диофантовы уравнения в этом смысле полнее соответствующих дифференциальных уравнений.

Не стоит слишком много задумываться над тем – почему мы строим теорию именно на таком определении космического спектра, а не на каком-то ином. Важно лишь то, что такой спектр существует и использование его позволяет построить полезную теорию. Другие варианты благодаря единству математической логики находятся в определённых отношениях с выбранным вариантом и так же могут использоваться, однако именно выбранный вариант достаточно просто удаётся развить в работающюю теорию.

Так как каждому значению k соответствует своё единое поле, представляющее космос, то существует счётное множество космосов со своими космическими спектрами. Мы живём в одном из таких космосов со значением k, определяемым **антропным принципом**, то есть значение k нашего космоса именно такое, которое допускает наше существование.

Счётное множество всех космосов в некотором смысле даёт **полное представление Мира**. Возможны и принципиально другие (не космические) представления Мира, но это будут уже не пространственно-временные представления. В любом случае их можно связать с космическими представлениями в силу единства математической логики.

6. Развитие представлений Мира. Различные дифференциальные уравнения, в том числе уравнение единого поля, представимы в так называемой **лагранжевой форме** (с соответствующими **вариационными принципами**). Лагранжева форма позволяет определить **механические понятия**, которые мы рассмотрим в соответствующей главе. **Механика** характеризуется (в этом суть механических представлений вообще) интегралами движения, сохранение которых является следствием лишь однородности и изотропности 4-пространства (то есть эти величины инвариантны относительно 10 пространственно-временны́х преобразований, например это могут быть: сдвиги по каждой из 4-х координат, вращения относительно 3-х осей, изменения трёх независимых компонент скорости).

Однако, решения уравнения единого поля имеют 11 параметров. В лагранжевой форме недостающую 11-ю сохраняющуюся величину можно получить как следствие так называемой **калибровочной инвариантности** (**симметрии**) уравнения единого поля. Соответствующий закон сохранения заряда получается и непосредственно из уравнения

$$\Box u = -k^2 u. \tag{1}$$

Рассмотрим **4-токовое представление космического поля** 4-вектором

$$j^\mu_u = j^\mu_{u_\pm} = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u), \tag{2}$$

который мы будем называть **4-током** (см.Гл.7). Из (1) и (2) легко получить выражение

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \tag{3}$$

которое в однородном и изотропном 4-пространстве-времени выражает закон сохранения **заряда**

$$q = \int j^0\, dv, \tag{4}$$

если величину $\varrho = j^0$ рассматривать как **плотность** этого заряда. Механический подход к уравнению единого поля вместе с законом сохранения заряда порождает **электродинамическое представление** единого поля. При этом (используя фундаментальные величины, порождаемые уравнением единого поля) можно даже обходиться без самого этого уравнения, если использовать статистический подход, что приводит к **квантовомеханическим представлениям**, а далее к **представлениям частиц**, затем – **вещества** и так далее. Важно, что, вообще говоря, 4-ток единого поля не является суммой 4-токов двух космических компонент

$$j^\mu_U \neq j^\mu_{u_+} + j^\mu_{u_-}. \tag{5}$$

7. Характер особенностей единого поля. Так как единое поле является суммой счётного множества плоских волн с волновыми векторами k^μ, удовлетворяющими условию

$$k^\mu k_\mu = k^2, \tag{1}$$

то это поле U **во всех точках** пространства-времени удовлетворяет уравнению КГФ вида

$$\Box U = -k^2 U. \tag{2}$$

При этом 4-ток

$$j^\mu_U = \frac{i}{2}(U\nabla^\mu U^* - U^*\nabla^\mu U) \tag{3}$$

этого поля неразрывен **во всех точках** пространства-времени (включая особенности поля U), а заряд $q = j^0$ сохраняется, то есть

$$\nabla_\mu j^\mu_U = 0. \tag{4}$$

Условие сохранения заряда (включая особенности) приводит к такой организации 4-тока единого поля, что заряд единого поля в подавляющем количестве сосредоточен в отдельных точках (**протистонах**). В этих точках сосредоточены все **особенности единого поля**.

Если попытаться применить к протистону механические понятия, то неизбежно возникает понятие электромагнитного поля, определяемое распределением протистонов и имеющее на них свои особенности.

§2. Некоторые свойства космического спектра.

1. Несущая гиперсфера космического спектра. Очевидно, что все точки космического спектра принадлежат одной и той же гиперсфере спектрального пространства с гиперрадиусом равным k^2. Эту гиперсферу будем называть **несущей гиперсферой космического спектра**. (1 на рис. 103.1)

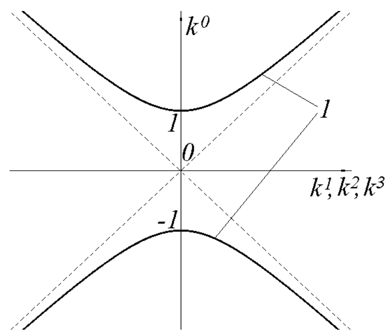


Рис. 103.1.

Как известно, гиперплощадь такой гиперповерхности бесконечна.

Распределение спектральных точек на этой гиперповерхности весьма не тривиально, то есть не регулярно. Представление об этой нетривиальности можно получить из теории чисел, например, из [Hardy], [Бухштаб], [Вальфиш], [Коган], [Кубилюс], [Виноградов], [Дэвенпорт].

Нетривиальность, нерегулярность космического спектра является основой для нетривиальности Мира вообще.

2. Бесконечность космического спектра. Важнейшим свойством космического спектра является его бесконечность. Это означает, что **множество спектральных точек бесконечно**. Иначе говря, множество решений Диофантова уравнения

$$N = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 \tag{1}$$

бесконечно.

Чтобы доказать это воспользуемся теоремой [Дэвенпорт, с. 128] о том, что любое натуральне число представимо суммой не более 3-х квадратов, если только оно не

имеет вид $4^l(8m+7)$, где $m, l = 0, 1, 2\ldots$. Тогда, записывая (1) в виде

$$n_0^2 - N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$

можно утверждать, что для каждого n_0 , отличного от $\sqrt{N + 4^l(8m+7)}$, существует хотя бы одна спектральная точка. А так как в ряду натуральных чисел n_0 остаётся бесконечно много чисел, отличающихся от $\sqrt{N + 4^l(8m+7)}$, то следовательно, существует бесконечно много спектральных точек.

Заметим также, что как и в любом множестве точек с целыми кординатами, спектральные точки изолированы, то есть в космическом спектре нет точек сгущения. А поэтому из бесконечности космического спектра следует и бесконечность области, содержащей все его точки.

Бесконечное множество спектральных точек распределено в спектральном пространстве весьма нетривиально (Рис.3.4) и тем самым предопределяет весьма нетривиальные свойства космоса, являясь, образно говоря, его "книгой судеб"или "скрижалями истории".

3. Распределение спектральных точек.

Точки спектрального пространства с целыми значениями всех четырёх координат будем называть **целыми точками** этого пространства. Такие точки распределены в спектральном пространстве регулярно и поэтому их усреднённая 4-х-мерная концентрация постоянна и равна единице.

$$c_4 = \frac{dn}{dv} = 1. \tag{1}$$

Как величины dn и dv так и сама 4-концентрация c_4 инвариантны в преобразованиях Лоренца.

Рассмотрим множество гиперсфер с гиперрадиусами $Q = T$ (4.1.1.1)

$$T = \sqrt{n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2} = \sqrt{\sum_{n_\mu=0}^{3} n_\mu n^\mu}, \tag{2}$$

где n_μ – целые числа. То есть эти гиперсферы проходят через целые точки. При этом все целые точки содержатся только в этих гиперсферах, которые поэтому назовём **целыми гиперсферами**.

Множество целых гиперсфер регулярно заполняет времениподобную полость изотропного конуса спектрального пространства. Поэтому, учитывая постоянство и лоренц-инвариантность 4-концентрации целых точек в этом пространстве, можно говорить о **статистически равномерном распределении целых точек на целых гиперсферах**, имеющих гиперрадиусы

$$T = \sqrt{N} = |k| \tag{3}$$

и содержащих спектральные точки (**спектральные гиперсферы**) (рис.103.2).

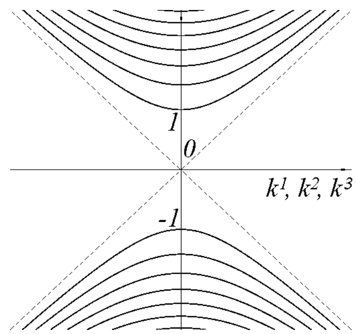


Рис. 103.2.

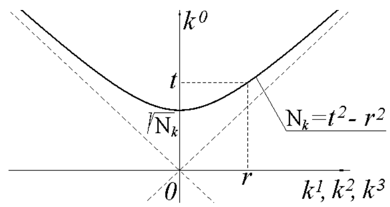


Рис. 103.3.

Одна из этих гиперсфер с конкретным номеромм N_k соответствует нашему космосу (рис.103.3).

Таким образом **спектральные точки распределены на спектральной гиперсфере статистически равномерно**, образуя при усреднении по этой гиперсфере **регулярную компоненту** спектра. Статистическую равномерность распределения надо понимать в том смысле, что количество спектральных точек в некоторой области гиперповерхности гиперсферы пропорционально гиперплощади этой области при её стремлении к бесконечности.

Так как квадрат гиперрадиуса целой гиперсферы всегда целое число

$$T^2 = N, \tag{4}$$

то между такими соседними гиперсферами заключён гиперсферический слой толщиной ΔT, которую можно найти дифференцируя (4)

$$2T\,\Delta T = \Delta N = 1, \tag{5}$$

откуда

$$\Delta T = \frac{1}{2T}. \tag{6}$$

Умножая 4-концентрацию $c_4 = 1$ целых точек обоих знаков k на толщину слоя, находим 3-концентрацию целых точек на целых гиперсферах (для обоих знаков k):

$$c_3 = c_4 \cdot \Delta T = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2|k|}. \tag{7}$$

Распределение целых точек в космическом спектре сосредоточено лишь на спектральной гиперсфере и с помощью δ-функции (см.гл.5) может быть записано в следующем инвариантном виде (аналогично [Рихтмайер (2.5.8)])

$$\tilde{\Sigma} = c_3\delta(T^2 - k^2) = \frac{1}{2k^2}(\delta(T - |K|) + \delta(T + |k|)) = \frac{1}{2k^2}\delta(T \mp k), \tag{8}$$

где под $\tilde{\Sigma}$ понимается плотность спектральных точек, усреднённая по гиперсфере, несущей спектр. Знаки $\mp$ при k соответствуют несущим гиперсферам из двух разных полостей изотропного конуса спектрального пространства. Оба слагаемых в (8) инвариантны порознь, так как относятся к симметричным изотропным конусам, а множитель $1/k^2$ скалярный.

4. Статистическое равновесие космического спектра. До сих пор мы рассматривали распределение спектральных точек без учёта их чётности. Однако, как чётные так и нечётные спектральные точки распределены регулярно с одинаковой средней концентрацией, поэтому все оценки для распределений вообще спектральных точек справедливы и для чётных и нечётных спектральных точек в отдельности, если их число уменьшить в два раза. В связи с этим мы будем говорить о **статистическом равновесии** чётной и нечётной частей космического спектра. То есть обе эти части спектра в среднем одинаквы, но отличаются в подробностях (в **флуктуациях**).

Чётным и нечётным спектральным точкам соответствуют в координатном представлении плоские волны с противоположно направленными временны́ми компонентами волнового вектора, то есть с противоположными знаками частоты (соответственно – положительной и отрицательной частоты). Таким образом положительные и отрицательные частоты в едином поле представлены в среднем одинаково, то есть **статистически уравновешены**, хотя полного равновесия (симметрии) компонент с положительной и отрицательной частотой нет.

5. Симметрии космического спектра. Нетрудно видеть, что космический спектр преобразуется сам в себя при инверсии 3-пространственных осей основной системы отсчёта, то есть имеет место **симметрия относительно координатных гиперплоскостей**. Их всего 3.

Кроме того, мировой спектр инвариантен относительно перестановок координатных осей $K1, K2, K3$, то есть имеет место симметрия относительно гиперплоскостей $K^i = \pm K^j, (i, j \neq 0)$, которые мы будем называть **биссекторными гиперплоскостями**. Очевидно, их всего 3. Таким образом, имеется 6 гиперплоскостей симметрии, каждая из которых проходит через начало координат.

Комбинируя знаки координат спектральной точки, (8 комбинаций) и переставляя координаты (3! комбинаций), получим $8 \times 6 = 48$, симметричных друг другу спектральных точек, то есть спектральное пространство разбивается гиперплоскостями симметрии на 48 областей, которые будем называть **эквариантами**. Инверсия знака n^0 порождает ещё 48 анти-эквариантов (то есть всего 96 эквариантов), хотя симметрия эквариантов и анти-эквариантов нарушена условием (1.2.2).

Кроме точных симметрий космический спектр имеет ещё одну симметрию, справедливую лишь в статистическом смысле. Это Лоренц-инвариантность среднестатистической концентрации спектральных точек.

6. Компьютерные изображения космического спектра. На рисунках продемонстрированы рассчитанные на компьютере изображения космического спектра при $n^0 \leqslant 480$ и $n = 1$ в проекции на плоскости $n^0,\ n^1$ и $n^1,\ n^2$ (Рис. 103.4),

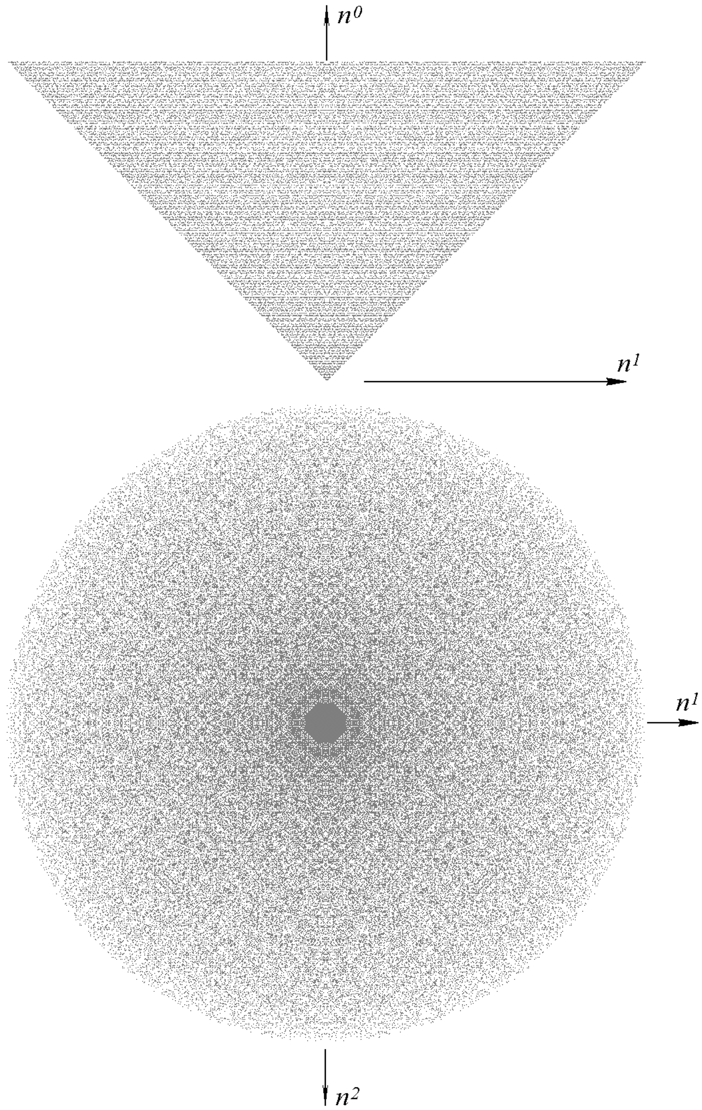


Рис. 103.4.

а также гиперсферический слой космического спектра в интервале $460 \leqslant n^0 \leqslant 480$, спроектированный на те же плоскости (Рис. 103.5).

7. Рациональное обобщение космического спектра.

Представление (1.2.1)

$$N = k^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 \tag{1}$$

космического спектра допускает обобщение на рациональные значения числа N вида

$$N = k^2 = \frac{a}{b^2}, \quad a, b = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2}$$

Действительно, диофантово уравнение

$$\frac{a}{b^2} = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2, \tag{3}$$

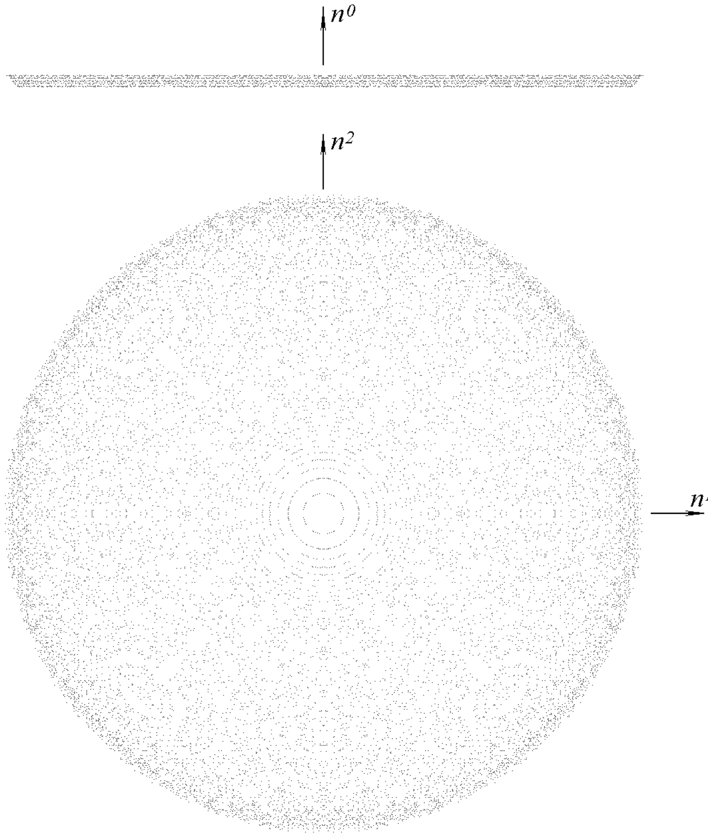


Рис. 103.5.

переписанное в виде

$$a = (bn_0)^2 - (bn_1)^2 - (bn_2)^2 - (bn_3)^2, \tag{4}$$

описывает космический спектр того же вида, что и (1), отличающийся лишь масштабом координатных осей n^μ. Поэтому **диофантово уравнение вида (1) сохраняет смысл и для рациональных значений** N при соответствующих изменениях масштаба, что не имеет принципиального значения.

§3. Вселенная.

1. Симметрии координатного представления. Так как преобразование Фурье линейно (см. ниже), то преобразванию Лоренца (его матрице) в спектральном пространстве соответствует такое же преобразование Лоренца (такая же матрица) в координатном пространстве, то есть это координатное пространство имеет такую же метрику, что и спектральное, то есть псевдоэвклидову метрику, и такие же плоскости симметрии единого поля, что и плоскости симметрии космического спектра. Кроме того, так как каждой спектральной точке соответствует плоская волна $e^{i(k^0 x_0 + \mathbf{kx})}$, обладающая своеобразной (зарядовой) симметрией относительно инверсии знака

временно́й компоненты x_0, то можно говорить о симметрии всех 96 экварантов единого поля, в каждом из которых единое поле комплексно и нетривиально, так как никакой спектральной точке с определённым значением k^0 не соответствует (по условию (1.2.2)) спектральная точка со значением $-k^0$.

Эти плоскости симметрии разбивают координатное пространство на 96 своих **экварантов** и пересекаются на 4-х осях, которые мы будем называть **осями основной системы координат координатного пространства**. Будем также говорить, что эти оси образуют **абсолютную систему отсчёта** в координатном пространстве. Их общую точку пересечения назовем **Началом** (координатного представления космоса) (0 на рис. 103.6).

2. Вселенная. Изотропный конус с вершиной в Начале назовём **космическим изотропным конусом (границей Вселенной)**. Он разбивает координатное представление космоса (**космическое пространство событий**) на три области (**полости**):

– **положительную времениподобную полость** (1 рис. 103.6)
– **отрицательную времениподобную полость** (2 рис. 103.6)
– **пространственноподобную полость** (3 рис. 103.6)

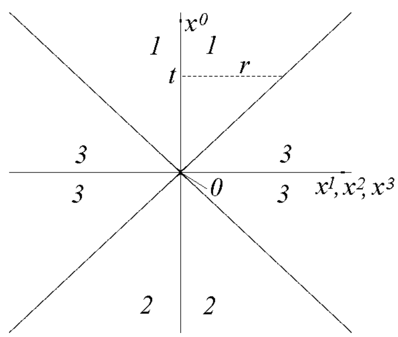


Рис. 103.6.

Так как симметрии космического спектра переносятся и на координатное представление, то средней концентрации космического спектра соответствует составляющая единого поля, обладающая симметрией относительно преобразований Лоренца, то есть осреднённое единое поле ($\langle U \rangle$) зависит только от интервала R до Начала.

$$\langle U \rangle = \langle U \rangle(R).$$

Иначе говоря во времениподобных областях космического пространства поле $\langle U \rangle$ постоянно на любой пространственноподобной гиперповерхности постоянного R, то есть на гиперсферах гиперрадиуса R.

Поэтому времениподобные области космического пространства будем также называть **однородными областями космоса**. В частности, из этих двух областей область положительного времени $t = x^0 > 0$ назовем **Вселенной**, а отрицательного - **Антивселенной**.

В пространственноподобной области космического пространства не существует пространственноподбных гиперповерхностей, на которых поле $\langle U \rangle$ постоянно

(существуют лишь такие времениподобные гиперповерхности), поэтому пространственноподобную область космического пространства будем называть **неоднородной областью космоса**. Пока наш физический интерес будет **ограничен** однородными областями то есть Вселенной и Антивселенной.

Таким образом, изменение статистического состояния Вселенной если и происходит, то только вместе с изменением R. Ниже мы покажем, что такое изменение действительно происходит, поэтому величину R, характеризующую статистическое (то есть глобальное) изменение состояния Вселенной будем называть (**абсолютным полным**) **возрастом Вселенной** или **абсолютным временем** и будем обозначать также буквой T.

$$T = R.$$

Каждую гиперсферу гиперрадиуса T будем называть **моновозрастным** или **абсолютным пространством космоса** возраста (абсолютного времени) T.

В отличие от такого абсолютного пространства, плоское пространство времени $x^0 = T$ является относительным, так как зависит от выбора системы отсчёта. Но оно часто удобно для аналитических целей.

Представляет интерес ещё один вид гиперповерхностей. Это изотропный конус прошлого с вершиной в данной точке наблюдения, который мы будем называть **наблюдаемым**, или **видимым пространством**. Причина такого названия прояснится в дальнейшем.

3. Наглядные изображения эквариантов. Эквариант является четырехмерной фигурой, однако его можно наглядно изобразить трёхмерной фигурой, если рассматривать заданный момент времени, то есть сечение экварианта гиперплскостью.

При этом Вселенная изображается шаром радиуса T. Часть каждого экварианта, ограниченную поверхностью этого шара будем называть **эквариантом Вселенной**.

Рассмотрим форму одного из эквариантов Вселенной возраста T. Так как в плоскости рисунка изображение сферической границы экварианта не наглядно, то мы рассмотрим только ту часть эквариантов, которая ограничена гранями вписанного во Вселенную куба, ориентированного так, что его грани перпендикулярны осям координат основной системы отсчёта.

Тогда, очевидно, что один из эквариантов изобразится телом, ограниченным треугольником ABC, лежащим на грани вписанного во Вселенную куба и плоскостями симметрии AOC, AOB, BOC, такими, что

$$\begin{cases} (BOC\,{}^\wedge AOB) = 90^\circ \\ (AOC\,{}^\wedge AOB) = 45^\circ \\ OB \subset X^1OX^3 \\ \angle AOB = 45^\circ \end{cases}.$$

Найдём углы BOC и AOC.

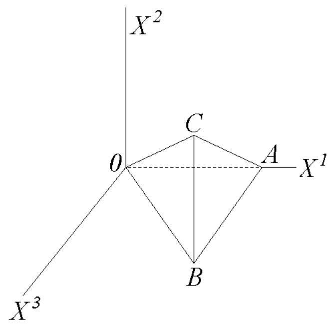


Рис. 103.7.

Для этого удобно сферическую границу заменить плоскостью ABC, такой, что $ABC \perp OX^1$.
Тогда $CB \perp BA$, $CB \perp OB$, $BA \perp OX^1$, $CA \perp OX^1$, $\angle CAB = 45°$, $\angle BCA = 45°$, $\angle OBA = 45°$.
Пусть $CB = 1$, тогда
$AB = 1$, $CA = \sqrt{2}$, $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$,
$OC = \sqrt{OB^2 + CB^2} = \sqrt{3}$,
$\frac{CB}{OB} = \mathrm{tg}\angle COB = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\angle COB = \mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35,26°,$$

$$\frac{CA}{OA} = \mathrm{tg}\angle COA = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

$$\angle COA = \mathrm{arc\,tg}\sqrt{2} \approx 54,74°.$$

Сумма углов при вершине O:

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = \frac{\pi}{4} + \mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{arc\,tg}\sqrt{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \mathrm{arc\,tg}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}}{1 - 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

В силу подобия эквариантов

$$\angle COB + \angle COA = \angle COB + \angle COX^2 = 90°,$$

$$\angle COB + \angle COA = 90°,$$

так как $\angle COX^2 = \angle COX^1$ и $\angle COX^2 + \angle COB = 90°$.

Различные экварианты одного октанта укладываются по схеме, изображённой на Рис. 103.8. То есть 6 эквариантов в одном октанте. **Всего 48 эквариантов**.

Элементам экварианта дадим следующие наименования: **Осевой луч** (1 на рис. 103.7) (один на 8 эквариантов). **Плоскостной луч** (2) (один на 4 экварианта). **Пространственный луч** (3) (один на 6 эквариантов). Всего у Вселенной $48/4 +$

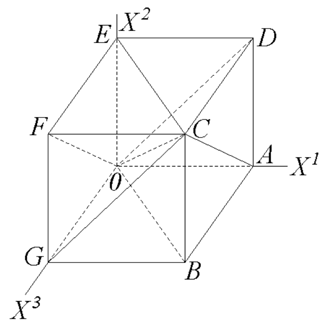


Рис. 103.8.

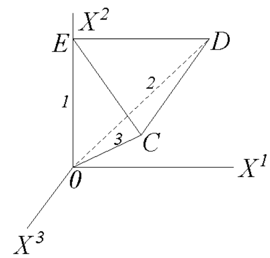


Рис. 103.9.

$48/6 + 48/8 = 12 + 8 + 6 = 26$ лучей экваринтов.

Рассмотренное положение лучей эквариантов справедливо только в основной системе отсчета и в преобразованиях Лоренца изменяется.

Неравноправие координатных осей X_μ относительно каждого экварианта очевидно.

Не трудно заметить, что экварианты делятся на два типа: **правые и левые экварианты**. Действительно, если смотреть из вершины O, то у одних эквариантов последовательность осевого, плоскостного и пространственного лучей имеет направление против часовой стрелки, а у других – наоборот. Это свойство эквариантов будем называть их **киральностью**. Так как три угла между тремя лучами все разные, то правые и левые экварианты не совместимы друг с другом ни при каких пространственных поворотах.

Свойство киральности эквариантов может иметь отношение к несохранению чётности в микромире.

4. Намёки на экварианты в литературных источниках. Нечто, подобное эквариантам не чуждо современной физике, что видно из следующего примера. Для объяснения нарушений CP-инвариантности, например, рассматривается "зеркальный мир..., в котором каждой известной частице сопоставляется зеркальный двойник той же массы, а каждому взаимодействию – зеркальное взаимодействие с теми же значениями константы и массы кванта поля взаимодействия... Строгая симметрия зеркального и обычного вещества влечёт за собой строгую симметрию их космологической эволюции. Это позволяет сделать весьма определённые выводы относительно возможных астрономических проявлений зеркального мира....

Таким образом, между доменами возникает поверхность с высокой поверхност-

ной плотностью энергии – сверхмассивная стенка." [Хлопов с. 35]

Напрашивается отождествление этих доменов с экваринтами. В той же связи интересны также статьи "Нити зазеркалья"и Великая стена"в космосе"в журнале ["Природа"].

5. Релятивистский предел скорости. Метрика нашего координатного пространства событий совпадает с метрикой пространства событий специальной теории относительтности, если только пользоваться системой единиц, в которой скорость света $C = 1$.

В специальной теории относительнсти скорость света является универсальной константой, связанной не столько со скоростью распространения света, сколько с метрикой пространства событий [Головина], поэтому константу C мы будем называть также **релятивистским пределом скорости**.

В нашей теории, использующей ту же метрику, что и специальная теория относительности, также возникает понятие релятивистского предела скорости, который в наших (**естественных**) безразмерных единицах равен 1:

$$C = 1.$$

Это дает первое условие для установления связи наших безразмерных единиц с единицами экспериментальной физики.

$C = 1 = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ м/с (точно), (1)

["Природа 1995, №4, с. 3], [Голдберг, с.62].

То есть между единицами метр и секунда имеется следующая связь

1с$= 2,997\,924\,58 \cdot 10^8$м. (2)

6. Принцип относительности законов природы и теория относительности. **Законами природы** мы будем называть такие понятия, которые можно сформулировать **ковариантно**, то есть незавсисимо от положения и ориентации в пространстве-времени. Таким образом **принцип относительности законов природы**, заключающийся в их независимости от положения и ориентации в пространстве, является просто определяющим свойством самого понятия закона природы. Явления, не удовлетворяющие этому принципу просто не являются законами природы (частные явления).

В наиболее общих (**фундаментальных**) науках, то есть науках о законах природы, принцип относительности естественно имеет важное методологическое значение.

В специальной теории относительности (**СТО**), как во всякой фундаментальной теории, широко применяется принцип относительности, однако **главное содержание специальной теории относительности** не в этом, а в том, что **пространство-время имеет псевдоэвклидову метрику**. В связи с этим название теории относительности не очень удачно. **Суть СТО** хорошо разъяснена в [Логунов, предисловие].

Общий принцип относительности к нашей теории отношения не имеет, так как пространство-время нашей теории определено как псевдоэвклидово, а общий

принцип относительности предполагает искривлённую метрику пространства-времени.

С общим принципом относительности связана **общая теория относительности (ОТО)**, которая создана как теория гравитации. Однако, в настоящее время существует **релятивистская теория гравитации (РТГ)** [Логунов], свободная от главного порока ОТО – отсутствия интегральных законов сохранения. В этой теории гравитации, хотя и используется основная идея ОТО – геометризация гравитационного поля, но пространство-время псевдоэвклидово, а гравитационное поле описывается как вторичная (**эффективная**) метрика. Существование при этом основной псевдоэвклидовой метрики обеспечивает по теореме Нётер [Нелипа] законы сохранения энергии, импульса и его момента.

Таким образом, мы не видим надобности в ОТО, которая имеет характер избыточно общей теории, теряющей из-за этой избыточности законы сохранения. Специальная же теория относительности будет нашим важнейшим инструментом. На наш взгляд, специальную теорию относительности, традиционно излагаемую в физических курсах, лучше изучать в курсах линейной алгебры, где она встречается в разделах о псевдоэвклидовых пространствах. Физические курсы часто делают акцент на различные эксперименты, приведшие к созданию СТО и связанные с ними выкладки, затуманивающие основную суть СТО. С экспериментами можно познакомиться позже, уяснив математическое содержание СТО, то есть – свойства псевдоэвклидова пространства.

7. Расширение Вселенной. Легко видеть, что в системе отсчёта, ось времени которой проходит через Начало, **радиус** R_t мгновенной Вселенной равен ее возрасту T. Это значит, что с увеличением возраста увеличивается радиус шарообразной Вселенной, то есть **Вселенная расширяется**. (Здесь и далее, когда ясно о чём идет речь, мы вместо "мгновенная Вселенная" будем говорить просто "Вселенная".

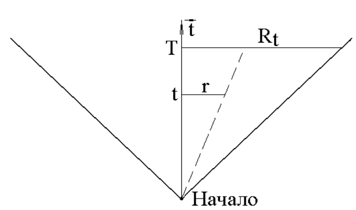


Рис. 103.10.

Если рассматривать Вселенную как 4-изотропную относительно Начала среду, что согласуется с наблюдаемой однородностью и изотропностью Метагалактики в больших масштабах [Гуревич, с. 16], то для каждой ячейки однородности (размером 100-300 Мпс [Гуревич, с. 13]) должна существовать система координат, в которой эта ячейка покоится относительно Начала. При этом мировая линия любой из них (например, изображённой на рисунке штриховой линией) будет проходить через Начало и скорость любой из них в любой заданной системе координат, согласно рисунку, можно записать в виде

$$v = \frac{r}{t} = Hr, \quad (1)$$

где величина H по определению [Гуревич, с. 13] называется **фактором Хаббла**. Из (1) следует, что $H = 1/t$, то есть фактор Хаббла не зависит от r, а зависит только от времени t, при котором оно равно радиусу Вселенной, поэтому можно записать

$$H = \frac{1}{T}. \tag{2}$$

Итак фактор Хаббла обратно пропорционален возрасту Вселенной. Таким образом H не есть постоянная величина, поэтому мы ее называем фактором Хаббла. Зная H, мы можем найти возраст Вселенной

$$T = \frac{1}{H}. \tag{3}$$

Значение $H = (70,4^{+1,3}_{-1,4})$ (км/с)Мпс$^{-1}$ (2011г., Интернет), где

Мпс$= 3,086 \cdot 10^{19}$км [Сена, с. 101], то есть

$H = (70,4^{+1,3}_{-1,4})$ (км/с)$/(3,086 \cdot 10^{19}$км$)=$ $(2,281^{+0,042}_{-0,045}) \cdot 10^{-18} c^{-1}$,

тогда

$T \approx 4,384 \cdot 10^{17}$с$= 4,384 \cdot 10^{17}/(3600 \cdot 24 \cdot 365)$лет$\approx 1,375 \cdot 10^{10}$лет.

Поскольку T очень велико по сравнению со временем существования нашей цивилизации, то величина Хаббла для нас **практически постоянна**. Радиус Вселенной

$r = cT = 2,9979 \cdot 10^{8}$м/с$\cdot 4,384 \cdot 10^{17}$с$\approx 1,314 \cdot 10^{28}$см.

8. Энтропия Вселенной. Детерминизм Вселенной означает, что она в 4-пространстве имеет единственное возможное состояние, то есть её энтропия не растёт и не убывает. Она равна 0. Но 3-х-мерная Вселенная имеет бесконечно много состояний во времени и в отсутствии достаточной информации энтропия Вселенной, как обычно, возрастает.

§4. Космологические абстракции.

1. Космологические соотношения между функциями. Значение величины T в практических задачах очень велико. (Например, в современную эпоху, как будет показано ниже, в естественных единицах времени $T \sim 10^{60}$.) Поэтому равенство $t = T$ в практических задачах равносильно условию $t \to \infty$.

Если в определениях асимптотических соотношений между функциями $f_1(t), f_2(t), \ldots$ [Корн 4.4.-3] условие $t \to \infty$ заменить условием $t = T$, то полученные таким образом соотношения будем вместо асимптотических называть **космологическими**. Таким образом, с космологическими соотношениями между функциями практически можно обращаться как с асимптотическими соотношениями, подразумевая под условием $t \to \infty$ равенство $t = T$. При этом бесконечно большим порядка $1, 2, \ldots$ при $t \to \infty$ будут соответствовать **космологически большие порядка** $1, 2, \ldots$ **при** $t = T$, а бесконечно малым

порядка $1, 2, ...$ при $t \to \infty$ будут соответствовать **космологически малые порядка** $1, 2, ...$ **при** $t = \frac{1}{T}$. Таким образом, например, **космологически эквивалентными** будем называть такие две функции $f(T)$ и $g(T)$, для которых $f(t)$ и $g(t)$ асимптотически эквивалентны при $t \to \infty$, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Приближение функций космологически эквивалентными функциями будем называть **приближением с космологической точностью**. Однако, в силу конечности T, необходимо следить, чтобы относительные погрешности величин оставались физически приемлемыми. В нашей теории мы принимаем **допустимой относительную погрешность** порядка $T^{-1/4} \sim 10^{-15}$.

Величины, производные которых по T не превышают в отношении к самой величине значения порядка $T^{-1/4}$, будем называть **постоянными с космологической точностью** или **эропостоянными** (**эроконстантами**).

2. Непрерывный космический спектр. Единый спектр дискретен, но абстрактное релятивистское исследование уравнения (1.3.2), являясь по-существу статистическим, использует понятие **непрерывного космического спектра**, то есть космического спектра, осреднённого по его гиперсферическому носителю.

§5. Изобразительные средства в 4-пространстве Вселенной.

1. Классификация псевдоэвклидовых систем отсчета относительно Вселенной. Системы отсчёта, начало которых свпадает с Началом Вселенной будем называть **Начальными** системами отсчёта.

Системой отсчёта данной точки пространства событий будем называть систему отсчёта, начало которой совпадает с данной точкой. Если A – данная точка, то систему отсчёта точки A будем также кратко называть **А-системой**.

Если ось времени какой-либо системы отсчёта проходит через Начало Вселенной, то такую систему будем называть **изначальной** (или **реликтовой**).

Таким образом, всякая Начальная система отсчёта всегда изначальная, но не всякая изначальная система является Начальной.

Начальную систему отсчёта всегда можно выбрать так, чтобы произвольная точка A в изотропном конусе будущего имела бы относительно Начала нулевые пространственные координаты

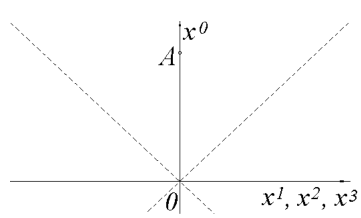


Рис. 103.11.

Такую Начальную систему будем называть **Начальной системой, обнуляющей точку** A.

Вообще, если A и B – две точки, связанные временииподобным интервалом, то систему отсчёта точки B, в которой точка A имеет нулевые координаты, будем называть **системой отсчёта точки** B (**B-системой**) **обнуляющей точку A**.

2. Важная особенность временно́й координаты изначальной системы. Такой системой отсчёта мы называем **инерциальную** систему, направление оси времени которой противоположно направлению на **Начало**. Если начало отсчёта времени t такой системы совпадает с Началом, то время t практически совпадает с возрастом T Вселенной в очень большой окрестности оси времени, если T космологически велико.

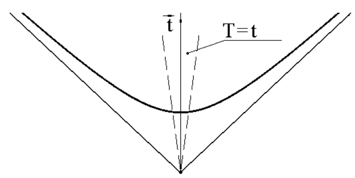


Рис. 103.12.

Эта окрестность, ограниченная на рисунке штриховой линией, является 4-конусом с достаточно малым углом при вершине. Говоря об использовании изначальной системы, мы обычно (в локальных задачах) будем иметь в виду именно эту область.

3. Наглядное изображение Лоренцевых преобразований. Если в псевдоэвклидовом пространстве выбрана система координат, то точки такого пространства можно изображать так же как в эвклидовом пространстве, используя обычные рисунки плоских сечений. Отличия возникают только при вычислении расстояний между точками и при вычислении новых координат при их преобразовании. Если используются прямолинейные координаты, то в таких преобразованиях на этих рисунках прямые линии преобразуются в прямые линии (без сохранения углов), другие же фигуры искажаются.

На плоском листе бумаги мы можем изобразить лишь некоторое плоское сечение или проекцию 4-х-мерного пространства-времени. Однако, с аналогичной ситуацией мы привыкли сталкиваться в обычном 3-х-мерном пространстве, пользуясь плоскими сечениями или проекциями для его изображения. Так как изображение всех трёх пространственных координат не принципиально важно с точки зрения демонстрации псевдоэвклидовых свойств пространства-времени, то на плоских сечениях пространства-времени обычно достаточно изобразить временну́ю ось координат $\vec{t}$ и какую-нибудь из пространственных осей $\vec{x}$, подразумевая, что две другие пространственные оси координат выходят из плоскости рисунка. Такое сечение является псевдоэвклидовым. 2-мерное псевдоэвклидово сечение пространства-времени отличается от обычного 2-мерного эвклидова пространства своей псевдоэвклидовой метрикой. Это значит, что в эвклидовом пространстве

множество точек, равноудалённых от данной точки A, изображается окружностью с центром в точке A, а в псевдоэвклидовом - гиперболой с центром в точке A.

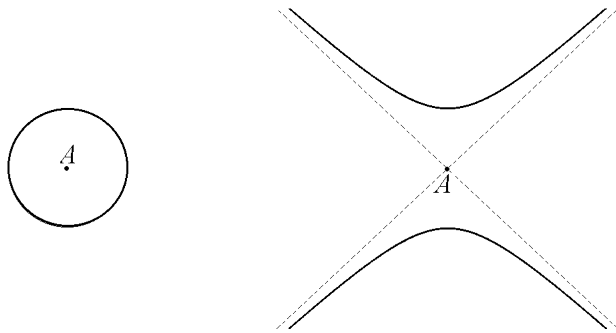


Рис. 103.13.

Расширяя 2-мерное псевдоэвклидово пространство до 4-мерного, вместо гиперболы получим **псевдосферу**, а вместо асимптотик гиперболы – **изотропный конус** (точнее – гиперконус).

Важно отметить, что в отличие от эвклидова пространства, где нет никаких особых направлений, **псевдоэвклидово пространство**, в силу неравноправия времени и пространства, **имеет особые направления, определяемые образующими изотропного конуса**. Эти направления называются **светоподобными**. Они имеют **абсолютный характер**, в том смысле, что никакие преобразования координат не могут изменять светоподобные направления. Всем остальным направлениям можно сопоставить прямые линии, проходящие через вершину изотропного конуса и лежащие либо внутри его (**времениподобные направления**), либо вне его (**пространственноподобные направления**). Эти направления не имеют абсолютного характера.

Поэтому на плоских изображениях псевдоэвклидова пространства надо выбирать два светоподобных направления (асимптоты гиперболы), которые будут неизменны при любых Лоренцевых преобразованиях осей координат.

Так как в Лоренцевых преобразованиях единицы времени и длины изменяются в одинаковых отношениях, то поворот осей координат при этих преобразованиях происходит не так как при повороте в эвклидовом пространстве. А именно, **при Лоренцевом повороте биссектриса временóй и пространственной оси должна иметь светоподобное направление**. При этом гиперсфера единичного радиуса отсекает от осей времени и пространства одинаковые единичные отрезки, определяя ими единицы измерения по этим осям.

Если данная система координат изображена прямоугольной сеткой координат $(t,\ \mathbf{x})$, то преобразованная по Лоренцу $(t',\ \mathbf{x}'$ изображается косоугольной сеткой координат.

Очевидно, что точки с постоянными пространственными координатами в системе $(t',\ \mathbf{x}')$ движуться в системе $(t,\ \mathbf{x})$ при изменении времени.

Любая преобразованная система координат $(t',\ \mathbf{x}')$ совершенно равноправна исходной системе $(t,\ \mathbf{x})$. Однако на рисунке они выглядят по разному – первая косоугольная, а вторая – прямоугольная. Изображение системы $(t',\ \mathbf{x}')$ на рисунке

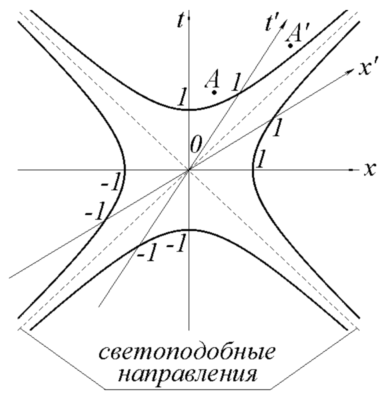


Рис. 103.14.

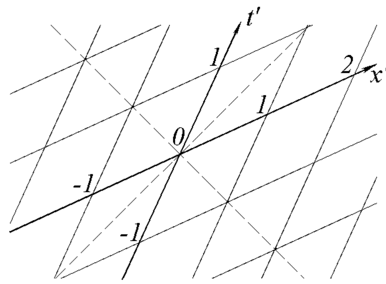


Рис. 103.15.

можно тоже сделать прямоугольным, если соответствующим образом переместить изображения точек,

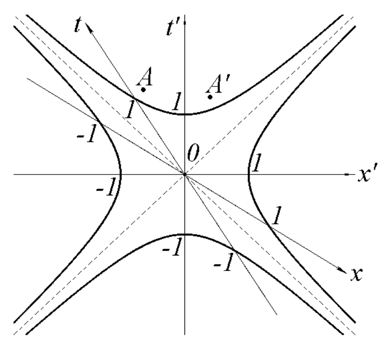


Рис. 103.16.

то есть так, чтобы их координаты имели те же значения. Такое преобразование рисунка имеет свойства преобразования Лоренца (только по отношению к рисунку, но не самим координатам) и мы будем называть его **рисуночным преобразованием Лоренца**.

Рисуночное преобразование Лоренца позволяет изображение любой системы координат привести к прямоугольному виду, что даёт общий способ наглядного сравнения изображений в различных системах координат.

4. О "парадоксе близнецов". Замедление собственного времени на объекте A, движущемся относительно объекта B, кажется парадоксальным, так как оно должно быть и на объекте B, движущемся относительно объекта A. Если оба объекта вылетели из одной исходной точки, а затем прилетели в одну конечную

точку, то какой объект состарился больше? На этот вопрос легко ответить, учитывая форму мировой линии обоих объектов. Надо просто измерить 4-х-мерную длину обеих линий. Например, если один объект двигался инерциально (его мировая линия прямая), то другой объект, чтобы вернуться к первому, должен двигаться по кривой мировой линии, а в псевдоэвклидовой метрике, как известно из математики, всякая времениподобная кривая, соединяющая две точки, короче (в смысле интервала) прямой, что и означает меньшее собственное время, прошедшее на инерциальном объекте, чем на движущемся с ускорением. Действительно, временной интервал Δt между концами t_1, t_2 отрезка времениподобной кривой линии можно записать в виде

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt, \tag{1}$$

а собственную инвариантную длину Δs этого отрезка можно записать в виде

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial s}{\partial t}\, dt. \tag{2}$$

Для времениподобной линии оба эти интеграла изменяются монотонно при изменении пределов интегрирования и кроме того $\partial s/\partial t \leqslant 1$, поэтому из сравнения (1) и (2) следует

$$\Delta s \leqslant \Delta t. \tag{3}$$

Вообще, так называемые "парадоксы теории относительности" являются следствием непонимания псевдоэвклидовой метрики, основы которой последовательно излагаются в курсах линейной алгебры, а вовсе не в физике. Рисунок а) изображает

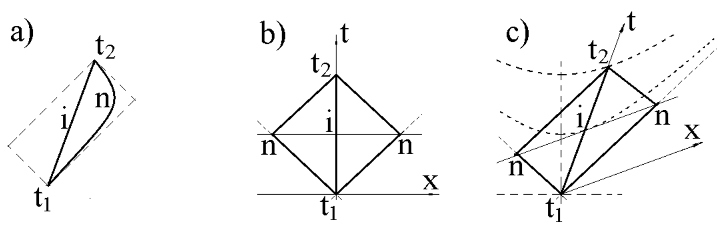


Рис. 103.17.

прямую (инерциальную) мировую линию, например, планеты, которую покинули космонавты. Даже если планета движется в реликтовой системе с космической скоростью, эта скорость далеко не релятивистская и её мировая линия практически прямая (i). Если же космонавты хотят получить значительный выигрыш по времени, их скорость должна быть релятивистской. При этом мировая линия при движении туда и обратно будет существенно неинерциальна (n). На рисунке b) мировая линия (n) доведена до релятивистского предела. Её собственная длительность равна нулю. При этом такая линия не единственная, что отражено на плоском рисунке двумя

линиями. На самом деле в 4-пространстве таких линий бесконечно много (они образуют гиперконическую поверхность). Рисунок c) изображает то же самое, что и b) только в другой инерциальной системе отсчёта.

С этим "парадоксом" связано явление, которое называют **дефектом массы**, наблюдаемое как уменьшение массы частицы, быстро движущейся по произвольной траектории относительно некоторой более гладкой линии, являющейся мгновенным центром инерции этой частицы при осреднении (сглаживании) её траектории. Простое объяснение состоит в том, что ускорить центр инерции помогает кинетическая энергия этой частицы, которую можно использовать просто подставив подходящий отбойник, эффективность которого растёт с ростом средней скорости частицы.

5. Реликтовое излучение (две интерпретации). Допустим, что **реликтовое излучение** начинает распространяться свободно, когда Вселенная остынет до температуры рекомбинации реликтовой плазмы. Это происходит при **реликтовом возрасте Вселенной** T_r. Рассмотрим Вселенную при этом возрасте, изображённую гиперболой в инерциальной системе координат $(\vec{t}, \vec{x})$ в момент наблюдения A с временем $T = t$ (Рис.103.18).

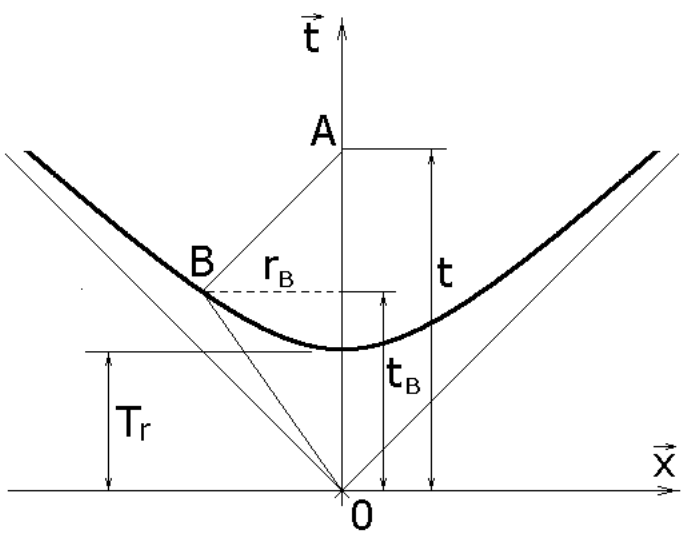


Рис. 103.18.

Где B – одна из наблюдаемых точек реликтовой плазмы, лежащая в плоскости рисунка, t_B – её время, r_B – её удалённость от A. Тогда, учитывая светоподобность интервала BA, получим

$$r_B = t - t_B. \tag{1}$$

Согласно уравнению гиперболы с гиперрадиусом T_r, имеем

$$t_B^2 = T_r^2 + r_B^2. \tag{2}$$

Частица B, неподвижная относительно реликтовой плазмы, в системе, где точка A

неподвижна, имеет скорость

$$v_B = \frac{r_B}{t_B} = \frac{t - t_B}{t_B} \to \begin{cases} 0, \ t \to t_B \\ 1, \ t \to \infty \end{cases}. \tag{3}$$

Эта скорость пропорциональна расстоянию r_B, но не может достигать 1 (**закон Хаббла**).

Этой скорости удаления, согласно эффекту Доплера (12.2.4.4), соответствует красное смещение спектра реликтового излучения.

В согласии с теорией горячей Вселенной снижается температура T°, то есть удлиняется волна реликтового излучения пропорционально масштабному фактору (возрасту) T Вселенной ($T^{\circ} \sim 1/T$) [Гуревич (2.1.15)].

В основной метрике ДФ реликтовое излучение удаётся интерпретировать как излучение Унру физического вакуума (II.7.6.5.*) относительно статистически равномерно самоускоряемых до ультра-релятивистских скоростей супертяжёлых универсальных квантовых частиц (протистонов), из которых состоит всё вещество. С возрастом Вселенной космологическое ускорение протистонов уменьшается, хотя их темп растёт, так что температура излучения Унру падает по закону $\sim 1/\sqrt{T}$, но не по закону $\sim 1/T$. При этом согласие с теорией горячей Вселенной получается в **искажённой метрике**, где единица интервала пропорциональна $\sqrt{T}$. В такой метрике Вселенная расширяется **ускоренно**. Локальная скорость света остаётся равной 1, а взаимная скорость двух далёких материальных точек, вообще говоря, может быть как меньше так и больше единицы (в зависимости от выбора системы отсчёта).

⋆⋆⋆

Во всём мне хочется дойти до самой сути.

Пастернак.

Глава 4. ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Эти координаты особенны тем, что из них только одна имеет размерность интервала, а остальные три безразмерны (угловые). В этих координатах просто выглядят функции, инвариантные в преобразованиях Лоренца.

§1. Система гиперсферических координат.

1. Гиперсферические координаты. В 4-х-мерном псевдоэвклидовом пространстве событий во многих случаях удобна такая криволинейная система координат, тип симметрии которой соответствует типу симметрии спектрального представления мира. Сейчас мы и рассмотрим такую систему координат, которую будем называть **гиперсферической**.

Гиперсферическими координатами назовём координаты φ, ϑ, σ, R, связанные с декартовыми координатами x^μ соотношениями:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \frac{x^2}{x^1} \\ \cos\vartheta = \frac{x^3}{r}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ R = \begin{cases} T, & |t| \geqslant r \\ Q, & r \geqslant |t| \end{cases}, \quad Q = \sqrt{r^2 - (x^0)^2}, \quad T = \sqrt{(x^0)^2 - r^2}\,. \\ \varepsilon(\sigma)\operatorname{ch}\sigma = \frac{x^0}{T}, \quad \operatorname{sh}\sigma = \frac{x^0}{Q}, \quad \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geqslant 0 \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

В гиперплоскости $x^0 = 0$ координаты φ, ϑ, r не отличаются от сферических координат ([Корн, с. 186]). Координаты σ и R определяются по разному для времениподобной и пространственноподобной полостей изотропного конуса $r = x^0$. При этом координату R удобно обозначать по разному для пространственноподобной области ($R = Q$) и для времениподобной области ($R = T$).

Обратим внимание, что лишь одна гиперсферическая координата R имеет размерность длины, а остальные три координаты безразмерные (или угловые в обобщённом смысле), так как определяются отношениями двух величин с размерностью длины.

Так как координаты φ, ϑ вместе с величиной r, при $x^0 = 0$ сводятся к сферическим координатам, то и пределы изменения этих координат можно выбрать как обычно

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$

$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi,$

$0 \leqslant r < \infty.$

Для R очевидно:

$0 \leqslant T < \infty,$

$0 \leqslant Q < \infty.$

Тогда

$-\infty < \sigma < \infty.$

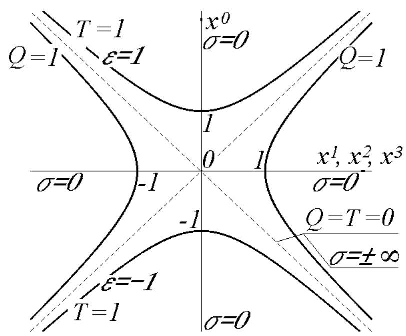


Рис. 104.1.

2. Выражение декартовых координат через гиперсферические.

$$x^0 = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon(\sigma) T \operatorname{ch}\sigma \\ Q \operatorname{sh}\sigma \end{matrix} \right\},$$

$$x^3 = r\, \cos\vartheta,$$

$$r^2 = \left\{ \begin{matrix} (x^0)^2 - T^2 \\ Q^2 + (x^0)^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} T^2\operatorname{ch}^2\sigma - T^2 \\ Q^2 + Q^2\operatorname{sh}^2\sigma \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} T^2\operatorname{sh}^2\sigma \\ Q^2\operatorname{ch}^2\sigma \end{matrix} \right\},$$

$$r = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon(\sigma) T \operatorname{sh}\sigma \\ Q \operatorname{ch}\sigma \end{matrix} \right\}.$$

Заметим, что r определено положительно.

Далее

$$x^3 = r\cos\vartheta,$$

$$x^2 = x^1 \operatorname{tg}\varphi, \quad (x^2)^2 = r^2 - (x^3)^2 - (x^1)^2 =$$

$$= r^2 - r^2\cos^2\vartheta - (x^2)^2 \operatorname{ctg}^2\varphi = r^2 \sin^2\vartheta - (x^2)^2 \operatorname{ctg}^2\varphi.$$

Откуда

$$(x^2)^2 + (x^2)\operatorname{ctg}^2\varphi = r^2 \sin^2\vartheta,$$

$$(x^2)^2 = (r^2\sin^2\vartheta)/(1+\operatorname{ctg}^2\varphi) = r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi.$$

Извлекая корень, выберем для определённости знак “+”, тогда

$$x^2 = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$x^1 = x^2 \operatorname{ctg}\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi.$$

Таким образом, мы получим

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ x^3 = r\cos\vartheta \\ x^0 = \begin{cases} \varepsilon(\sigma)T\operatorname{ch}\sigma \\ Q\operatorname{sh}\sigma \end{cases} \\ r = \begin{cases} \varepsilon(\sigma)T\operatorname{sh}\sigma \\ Q\operatorname{ch}\sigma \end{cases} \end{cases}.$$

3. Ортогональность гиперсферических координат. Важнейшим свойством гиперсферических координат является их ортогональность. Систему координат называют **ортогональной**, если недиагональные компоненты её метрического тензора g_{ik} равны нулю в каждой точке пространства [Корн, с. 183],

$g_{ik} = 0, \quad i \neq k.$

Метрический тензор g'_{ik} гиперсферических координат можно выразить через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ физического пространства по общему определению тензора [Корн, с. 497]:

$$g'_{ik}(y^1, y^2, y^3, y^4) = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial y^k}.$$

Пусть при этом

$y^1 = \varphi, \quad y^2 = \vartheta, \quad y^3 = \sigma, \quad y^4 = R$ - гиперсферические координаты,

$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$ - декартовы координаты.

Для псевдоэвклидова физического пространства в декартовых координатах

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для гиперсферических координат условие ортогональности можно расписать в виде:

$$\begin{cases}
1.\ \frac{\partial x^0}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial\vartheta} - \frac{\partial x^1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial\vartheta} - \frac{\partial x^2}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial\vartheta} - \frac{\partial x^3}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial\vartheta} = 0 \\
2.\ \frac{\partial x^0}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^2}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^3}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial\sigma} = 0 \\
3.\ \frac{\partial x^0}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial R} - \frac{\partial x^1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial R} - \frac{\partial x^2}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial R} - \frac{\partial x^3}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial R} = 0 \\
4.\ \frac{\partial x^0}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^2}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial\sigma} - \frac{\partial x^3}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial\sigma} = 0 \\
5.\ \frac{\partial x^0}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial R} - \frac{\partial x^1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial R} - \frac{\partial x^2}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial R} - \frac{\partial x^3}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial R} = 0 \\
6.\ \frac{\partial x^0}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x^0}{\partial R} - \frac{\partial x^1}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial R} - \frac{\partial x^2}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial R} - \frac{\partial x^3}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial R} = 0
\end{cases}.$$

Убедимся в выполнении этих условий. Предварительно вычислим все необходимые производные.

Замечая, что
$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = x^0, \quad \frac{\partial x^0}{\partial \sigma} = r,$$
имеем:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = -r\sin\vartheta\sin\varphi & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = r\sin\vartheta\cos\varphi \\
\frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\sin\varphi \\
\frac{\partial x^1}{\partial \sigma} = x^0\sin\vartheta\cos\varphi & \frac{\partial x^2}{\partial \sigma} = x^0\sin\vartheta\sin\varphi \\
\frac{\partial x^1}{\partial R} = \begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi & \frac{\partial x^2}{\partial R} = \begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi
\end{array}.$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial x^0}{\partial \varphi} = 0 \\
\frac{\partial x^3}{\partial \vartheta} = -r\sin\vartheta & \frac{\partial x^0}{\partial \vartheta} = 0 \\
\frac{\partial x^3}{\partial \sigma} = x^0\cos\vartheta & \frac{\partial x^0}{\partial \sigma} = r \\
\frac{\partial x^3}{\partial R} = \begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\cos\vartheta & \frac{\partial x^0}{\partial R} = \begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ \mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix}
\end{array}$$

Таким образом, подставляя производные, имеем тождества:

1. $0-(-1)r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot r\cos\vartheta\cos\varphi-$
$-r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot r\cos\vartheta\sin\varphi-0\equiv 0.$
2. $0-(-1)r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot x^0\sin\vartheta\cos\varphi-$
$-r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot x^0\sin\vartheta\sin\varphi-0\equiv 0.$
3. $0-(-1)r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi-$
$-r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi-0\equiv 0.$
4. $0-r\cos\vartheta\cos\varphi\cdot x^0\sin\vartheta\cos\varphi-r\cos\vartheta\sin\varphi\cdot x^0\sin\vartheta\sin\varphi-$
$-(-1)r\sin\vartheta x^0\cos\vartheta=-rx^0\cos\vartheta\sin\vartheta+rx^0\cos\vartheta\sin\vartheta\equiv 0.$
5. $0-r\cos\vartheta\cos\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi-$
$-r\cos\vartheta\sin\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi-(-1)r\sin\vartheta\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\cos\vartheta=$
$=r\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}(-\cos\vartheta\sin\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta)\equiv 0.$
6. $r\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ \mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix}-x^0\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi-$
$-x^0\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi-x^0\cos\vartheta\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\cos\vartheta=$
$=r\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ \mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix}-x^0\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\sin^2\vartheta-x^0\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}\cos^2\vartheta=$

$$= r\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ \mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix} - x^0\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix} =$$
$$= \begin{Bmatrix} T\,\mathrm{sh}\,\sigma\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ Q\,\mathrm{ch}\,\sigma\,\mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} T\,\mathrm{ch}\,\sigma\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ Q\,\mathrm{sh}\,\sigma\,\mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно, **гиперсферическая система координат** действительно **ортогональна**

4. Компоненты метрического тензора гиперсферической системы координат. Так как все недиагональные компоненты метрического тензора g'_{ik} равны нулю, то остаётся найти лишь диагональные компоненты, которые по общему определению тензора [Корн, с. 497], равны:

$$g'_{11} = g'_{\varphi\varphi} = (\tfrac{\partial x^0}{\partial\varphi})^2 - (\tfrac{\partial x^1}{\partial\varphi})^2 - (\tfrac{\partial x^2}{\partial\varphi})^2 - (\tfrac{\partial x^3}{\partial\varphi})^2 =$$
$$= 0 - r^2\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi - r^2\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi - 0 = -r^2\sin^2\vartheta,$$

$$g'_{22} = g'_{\vartheta\vartheta} = (\tfrac{\partial x^0}{\partial\vartheta})^2 - (\tfrac{\partial x^1}{\partial\vartheta})^2 - (\tfrac{\partial x^2}{\partial\vartheta})^2 - (\tfrac{\partial x^3}{\partial\vartheta})^2 =$$
$$= 0 - r^2\cos^2\vartheta\,\cos^2\varphi - r^2\cos^2\vartheta\,\sin^2\varphi - r^2\sin^2\vartheta = -r^2\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta = -r^2,$$

$$g'_{33} = g'_{\sigma\sigma} = (\tfrac{\partial x^0}{\partial\sigma})^2 - (\tfrac{\partial x^1}{\partial\sigma})^2 - (\tfrac{\partial x^2}{\partial\sigma})^2 - (\tfrac{\partial x^3}{\partial\sigma})^2 =$$
$$= r^2 - (x^0)^2\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi - (x^0)^2\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi - (x^0)^2\cos^2\vartheta =$$
$$= r^2 - (x^0)^2\sin^2\vartheta - (x^0)^2\cos^2\vartheta =$$
$$= r^2 - (x^0)^2 = \begin{Bmatrix} T^2(\mathrm{sh}^2\sigma - \mathrm{ch}^2\sigma) \\ Q^2(\mathrm{ch}^2\sigma - \mathrm{sh}^2\sigma) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T^2 \\ Q^2 \end{Bmatrix},$$

$$g'_{44} = g'_{RR} = (\tfrac{\partial x^0}{\partial R})^2 - (\tfrac{\partial x^1}{\partial R})^2 - (\tfrac{\partial x^2}{\partial R})^2 - (\tfrac{\partial x^3}{\partial R})^2 =$$
$$= \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}^2\sigma \\ \mathrm{sh}^2\sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}^2\sigma \\ \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix}\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi -$$
$$- \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}^2\sigma \\ \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix}\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi - \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}^2\sigma \\ \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix}\cos^2\vartheta =$$
$$= \begin{Bmatrix} \mathrm{ch}^2\sigma \\ \mathrm{sh}^2\sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}^2\sigma \\ \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix} = \pm 1.$$

И так

$$\begin{cases} g'_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\vartheta, \quad r = \begin{Bmatrix} \varepsilon(\sigma)T\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ Q\,\mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix} \\ g'_{\vartheta\vartheta} = -r^2 \\ g'_{\sigma\sigma} = r^2 - (x^0)^2 = \begin{Bmatrix} -T^2 \\ Q^2 \end{Bmatrix} = \mp R^2 \\ g'_{RR} = \pm 1, \begin{Bmatrix} \textit{Времениподобная область} \\ \textit{Пространственноподобная область} \end{Bmatrix} \end{cases}.$$

Чтобы найти контравариантные компоненты метрического тензора, нужно знать его фундаментальный определитель g' [Корн, с. 505]. Так как тензор g'_{ik} диагонален,

то

$$g' = g'_{11}\, g'_{22}\, g'_{33}\, g'_{44} = -R^2 r^4 \sin^2\vartheta.$$

Контравариантные компоненты [Корн, с. 505]:

$$g'^{ik} = \frac{G^{ik}}{g'},$$

где $G^{ik} = G^{ki}$ - алгебраическое дополнение g_{ik} в определителе $det[g'_{ik}]$ (см. [Корн, с. 505], ассоциированный метрический тензор).

$$G^{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

[Корн, с. 35],
где D_{ik} минор g'_{ik} (получается из определителя g'_{ik} вычёркиванием i-й строки и k-го столбца. В нашем случае $i = k$ и $G^{ik} = D_{ik}$).

$G^{11} = R^2 r^2$,
$G^{22} = R^2 r^2 \sin^2\vartheta$,
$G^{33} = \pm r^4 \sin^2\vartheta$,
$G^{44} = \mp R^2 r^4 \sin^2\vartheta, \quad G^{ik}_{|i\neq k} = 0$.

$$\begin{cases} g'^{11} = g'^{\varphi\varphi} = -1/(r^2\sin^2\vartheta) \\ g'^{22} = g'^{\vartheta\vartheta} = -1/r^2, \qquad\qquad G^{ik}_{|i\neq k} = 0 \\ g'^{33} = g'^{\sigma\sigma} = \mp 1/R^2 \\ g'^{44} = g'^{RR} = \pm 1, \begin{Bmatrix} \textit{Времениподобная область} \\ \textit{Пространственноподобная область} \end{Bmatrix} \end{cases}.$$

Заметим, что

$$g'^{ii} = \frac{1}{g'_{ii}}.$$

5. Элемент гиперобъёма в гиперсферических координатах. В гиперсферических координатах элемент гиперобъёма $d\Omega$ примет вид [Корн, с. 517 16.10-10]:

$$d\Omega = \sqrt{|g'|}\, d\varphi\, d\vartheta\, d\sigma\, dR.$$

Так как $g' = -R^2 r^4 \sin^2\vartheta$, то

$$d\Omega = R r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\, d\vartheta\, d\sigma\, dR =$$

$$= R^3 \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}^2\sigma \\ \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix} \sin\vartheta\ d\varphi\, d\vartheta\, d\sigma\, dR, \quad \begin{Bmatrix} \textit{Времениподобн. обл.} \\ \textit{Пространств.под. обл.} \end{Bmatrix}.$$

Гиперобъём и его элемент $d\Omega$ инвариантен в преобразованиях Лоренца [Ландау 2, с. 36].

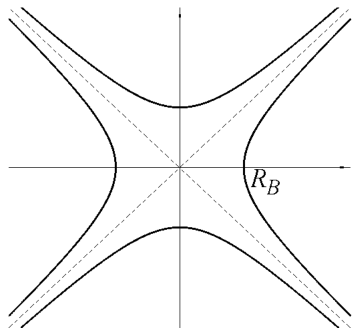


Рис. 104.2.

6. 4-объём псевдошара. Область, ограниченная гиперсферической гиперповерхностью $R = Q_B$ называется **псевдошаром** (Рис. 104.2).

Учитывая выражение для элемента гиперобъёма, не трудно видеть, что интегрирование 4-объёма по псевдошару:

$$-\infty < \sigma < \infty, \quad 0 \leqslant Q \leqslant Q_B, \quad -Q_B \leqslant T \leqslant Q_B$$

даёт бесконечность. То есть **4-объём псевдошара бесконечен**.

§2. Некоторые операторы в гиперсферических координатах.

Некоторые операторы в гиперсферических координатах

1. Оператор $\bigtriangledown_\mu$ в гиперсферических координатах. Согласно [Корн, с. 184]

$$\bigtriangledown\Phi = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\mathbf{i}_3\right).$$

Обобщая на гиперсферические координаты, имеем:

$$\bigtriangledown_\mu\Phi =$$

$$= \pm\left(\frac{1}{\sqrt{g'_{\varphi\varphi}}}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{g'_{\vartheta\vartheta}}}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{\sqrt{g'_{\sigma\sigma}}}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\mathbf{i}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{g'_{RR}}}\frac{\partial\Phi}{\partial R}\mathbf{i}_R\right).$$

Или, выбирая знак “+” (правая система координат), имеем:

$$\bigtriangledown_\mu\Phi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-r^2\sin^2\vartheta}}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{-r^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{\sqrt{\mp R^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\mathbf{i}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{\pm 1}}\frac{\partial\Phi}{\partial R}\mathbf{i}_R$$

или

$$\bigtriangledown_\mu\Phi =$$

$$= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{ir}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{\left\{\begin{matrix} iT \\ Q \end{matrix}\right\}}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\mathbf{i}_\sigma + \frac{1}{\left\{\begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix}\right\}}\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\begin{matrix} T \\ Q \end{matrix}\right\}}\mathbf{i}_{\left\{\begin{matrix} T \\ Q \end{matrix}\right\}}$$

$(\left\{\begin{array}{c}\textit{Времениподобная область}\\ \textit{Пространственноподобная область}\end{array}\right\})$.

Теперь применим оператор $\bigtriangledown_\mu$ к вектору. Согласно [Корн, с. 184]:

$$\bigtriangledown\cdot\mathbf{F}\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}[\frac{\partial}{\partial x^1}(\hat F_1\sqrt{\frac{g}{g_{11}}})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}(\hat F_2\sqrt{\frac{g}{g_{22}}})+\frac{\partial}{\partial x^3}(\hat F_3\sqrt{\frac{g}{g_{33}}})].$$

Обобщая на гиперсферические координаты, имеем:

$$\bigtriangledown_\mu F^\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}[\frac{\partial}{\partial R}(\hat F_R\sqrt{\frac{g}{g_{RR}}})+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\hat F_\sigma\sqrt{\frac{g}{g_{\sigma\sigma}}})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\hat F_\vartheta\sqrt{\frac{g}{g_{\vartheta\vartheta}}})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\hat F_\varphi\sqrt{\frac{g}{g_{\varphi\varphi}}})]=$$

$$=\frac{1}{iRr^2\sin\vartheta}[\frac{\partial}{\partial R}(\hat F_R\frac{iRr^2\sin\vartheta}{\left\{\begin{array}{c}1\\ i\end{array}\right\}})+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\hat F_\sigma\frac{iRr^2\sin\vartheta}{\left\{\begin{array}{c}i\\ 1\end{array}\right\}R})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\hat F_\vartheta\frac{iRr^2\sin\vartheta}{ir})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\hat F_\varphi\frac{iRr^2\sin\vartheta}{ir\sin\vartheta})]$$

или

$$\bigtriangledown_\mu F^\mu=\frac{\left\{\begin{array}{c}-1\\ i\end{array}\right\}}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial R}(Rr^2\hat F_R)+\frac{\left\{\begin{array}{c}-i\\ 1\end{array}\right\}}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(r^2\hat F_\sigma)-$$

$$-\frac{i}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\hat F_\vartheta)-\frac{i}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat F_\varphi.$$

2. Оператор Даламбера и оператор квадрата углового момента в гиперсферических координатах. Выражение инвариантного оператора Лапласа $\triangle=\nabla_\nu\nabla^\nu=\operatorname{div}\operatorname{grad}$ в любых криволинейных координатах имеет вид [Кочин, с. 433], [Корн, с. 284]:

$$\text{div grad } f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\ g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k})}{\partial x^i}. \qquad (1)$$

В псевдоэвклидовом пространстве, определяемом метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, этот оператор называется **оператором Даламбера** (обычно обозначается $\Box$ и нередко встречается с противоположным знаком, например, [Ландау 2, с. 144]) и, так как в этом случае $g=g_{11}\ g_{22}\ g_{33}\ g_{00}=-1$, то он записывается в виде:

$$\nabla_\nu\nabla^\nu f=\Box f=\frac{1}{i}[\frac{\partial}{\partial x^0}(i\frac{\partial f}{\partial x^0})+\frac{\partial}{\partial x^1}(-i\frac{\partial f}{\partial x^1})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}(-i\frac{\partial f}{\partial x^2})+\frac{\partial}{\partial x^3}(-i\frac{\partial f}{\partial x^3})]$$

или

$$\Box f=\frac{\partial^2 f}{(\partial x^0)^2}-\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}-\frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2}-\frac{\partial^2 f}{(\partial x^3)^2}. \tag{2}$$

В гиперсферических координатах этот же оператор примет вид:

$$\Box f=\Box_g f=\frac{1}{iRr^2\sin\vartheta}[\frac{\partial}{\partial\varphi}(iRr^2\sin\vartheta\frac{-1}{r^2 sin^2\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(iRr^2\sin\vartheta\frac{-1}{Q^2}\frac{\partial f}{\partial\vartheta})+\frac{\partial}{\partial\sigma}(iRr^2\sin\vartheta\frac{\mp 1}{R^2}\frac{\partial f}{\partial\sigma})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial R}(iRr^2\sin\vartheta(\pm 1)\frac{\partial f}{\partial R})].$$

И так

$$\Box_g f=\frac{1}{r^2}\left[\frac{-1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta})\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(r^2\frac{\partial f}{\partial\sigma})\pm\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rr^2\frac{\partial f}{\partial R})\right]. \tag{3}$$

Обозначая

$$\hat{\mathbf{M}}^2=\frac{-1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) \tag{4}$$

(сравни с [Ландау 3, с. 113 (26,16)]), можно написать:

$$\Box_g f=\frac{1}{r^2}[\hat{\mathbf{M}}^2 f\mp\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(r^2\frac{\partial f}{\partial\sigma})\pm\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rr^2\frac{\partial f}{\partial R})]. \tag{5}$$

Оператор $\hat{\mathbf{M}}^2$ называется **оператором квадрата углового момента**.
Так как

$$r=\left\{\begin{matrix}\varepsilon(\sigma)T\ \mathrm{sh}\,\sigma\\ Q\ \mathrm{ch}\,\sigma\end{matrix}\right\}=R\left\{\begin{matrix}\varepsilon(\sigma)\mathrm{sh}\,\sigma\\ \mathrm{ch}\,\sigma\end{matrix}\right\}, \tag{6}$$

то получаем выражение только через гиперсферические координаты:

$$\Box_g f=\frac{1}{R^2\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}}\Big[\hat{\mathbf{M}}^2 f\mp$$

$$\mp\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\Big)\pm\frac{1}{R}\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R^3\frac{\partial f}{\partial R}\Big)\Big], \tag{7}$$

в частном случае зависимости функции только от гиперрадиуса получим

$$\Box_g f=\pm\frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial f}{\partial R}\right),\quad f=f_s(R). \tag{8}$$

3. Разделение переменных уравнения КГФ в гиперсферических координатах. Уравнение КГФ является уравнением на собственные значения оператора Даламбера.

$$\Box u = -k^2 u.$$

В гиперсферических координатах уравнение КГФ примет вид:

$$\hat{\mathbf{M}}^2 u \mp \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial u}{\partial\sigma}\Big)\pm$$

$$\pm\frac{1}{R}\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R^3\frac{\partial u}{\partial R}\Big)+k^2R^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}u=0$$

$,(\left\{\begin{array}{c}\textit{Времениподобная область}\\ \textit{Пространственноподобная область}\end{array}\right\}).$

Попробуем разделить его переменные. Пользуясь общим методом разделения переменных [Никифоров, с. 171], представим наше уравнение в виде

$$Lu = 0,$$

где L - линейный оператор. Оператор L представим в виде

$$L = L_1L_2 + M_1M_2,$$

где L_1, M_1 зависят только от φ и ϑ, а L_2, M_2 - только от σ и R. Это можно сделать так:

$L_1 = \hat{\mathbf{M}}^2,$

$L_2 = 1,$

$M_1 = 1,$

$M_2 = \mp\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\pm$

$$\pm\frac{1}{R}\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R^3\frac{\partial}{\partial R}\Big)+k^2R^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}.$$

Тогда решение уравнения можно искать в виде

$$u(\varphi,\vartheta,\sigma,R) = u_1(\varphi,\vartheta)u_2(\sigma,R).$$

Так как

$L_1L_2(u_1\cdot u_2) = L_1u_1\cdot L_2u_2,$

$M_1M_2(u_1\cdot u_2) = M_1u_1\cdot M_2u_2,$

то уравнение $Lu = 0$ можно переписать так

$$\frac{L_1u_1}{M_1u_1} = -\frac{M_2u_2}{L_2u_2}.$$

Поскольку функция$L_1u_1/(M_1u_1)$ не зависит от σ, R, а функция $M_2u_2/(L_2u_2)$ не зависит от φ, ϑ, то необходимо:

$$\frac{L_1u_1}{M_1u_1} = -\frac{M_2u_2}{L_2u_2} = \text{const}.$$

Здесь константа называется **постоянной разделения**. Мы обозначим её здесь $\mathbf{M}^2$ и будем называть **квадратом углового момента**.

Таким образом получаются два уравнения. Первое зависит лишь от переменных φ и ϑ

$$\hat{\mathbf{M}}^2u_1 = \mathbf{M}^2u_1$$

или

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial u_1}{\partial\vartheta}) + \mathbf{M}^2u_1 = 0. \tag{1}$$

Второе зависит лишь от σ и R

$-M_2u_2 = \mathbf{M}^2L_2u_2, \quad -\mathbf{M}^2L_2u_2 - M_2u_2 = 0$

или

$$-\mathbf{M}^2u_2 \pm \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\left\{\begin{matrix}\text{sh}^2\sigma\\ \text{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial u_2}{\partial\sigma}\Big) \mp \frac{1}{R}\left\{\begin{matrix}\text{sh}^2\sigma\\ \text{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R^3\frac{\partial u_2}{\partial R}\Big) -$$

$$-k^2R^2\left\{\begin{matrix}\text{sh}^2\sigma\\ \text{ch}^2\sigma\end{matrix}\right\}u_2 = 0. \tag{2}$$

Разделим теперь переменные в уравнении (1). Пользуясь тем же методом, обозначим

$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$,
$L_2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta}$,
$M_1 = 1$,
$M_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \mathbf{M}^2$,
$u_1 = U_1(\varphi,\vartheta) = u_\varphi(\varphi)u(\vartheta)$.

Тогда

$$\frac{L_1u_\varphi}{M_1u_\varphi} = -\frac{M_2u_\vartheta}{L_2u_\vartheta} = -M_z^2,$$

где константа разделения обозначена $-M_z^2$.

M_z^2 называется **квадратом проекции углового момента на ось** $\mathbf{z}(x^3)$.

Таким образом получаются два уравнения. Первое зависит лишь от φ.

$$\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^2} = -M_z^2u_\varphi, \tag{3}$$

а второе - лишь от ϑ

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}) + \mathbf{M}^2u_\vartheta = \frac{M_z^2}{\sin^2\vartheta}u_\vartheta. \tag{4}$$

Разделим переменные в уравнении (2). Пользуясь тем же методом, обозначим
$L_1 = -\mathbf{M}^2 \pm \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)$,
$L_2 = 1$,
$M_1 = \left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}$,
$M_2 = \mp\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial}{\partial R}\right) - k^2R^2$,
$u_2(\sigma, R) = u_\sigma(\sigma)u_R(R)$.

Тогда
$$\frac{L_1u_\sigma}{M_1u_\sigma} = -\frac{M_2u_Q}{L_2u_Q} = \mu^2,$$
где μ^2 - константа разделения.

Таким образом, получаются два уравнения. Первое зависит лишь от σ
$$-\mathbf{M}^2u_2 \pm \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial u_\sigma}{\partial\sigma}\right) = \mu^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}u_\sigma, \tag{5}$$
а второе - лишь от R
$$\mp\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial u_R}{\partial R}\right) - k^2R^2u_R = -\mu^2\ u_R.$$
Последнее можно переписать в виде
$$\mp\frac{1}{R}3R^2\frac{\partial u_R}{\partial R} \mp \frac{1}{R}R^3\frac{\partial^2 u_s}{\partial R^2} + (\mu^2 - k^2R^2)u_R = 0$$
или
$$\frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2} + \frac{3}{R}\frac{\partial u_R}{\partial R} \mp \frac{\mu^2 - k^2R^2}{R^2}u_R = 0. \tag{6}$$
Таким образом удаётся представить функцию u в виде произведения множителей, каждый из которых зависит лишь от одной координаты
$$u(\varphi, \vartheta, \sigma, R) = u_\varphi(\varphi)\ u_\vartheta(\vartheta)\ u_\sigma(\sigma)\ u_R(R), \tag{7}$$
подчиняющихся уравнениям:
$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} = -M_z^2u_\varphi,\\ \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}\right) + \left(\mathbf{M}^2 - \frac{M_z^2}{\sin^2\vartheta}\right)u_\vartheta = 0,\\ \pm\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial u_\sigma}{\partial\sigma}\right) - \left(\mathbf{M}^2 + \mu^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\right)u_\sigma = 0,\\ \frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2} + \frac{3}{R}\frac{\partial u_R}{\partial R} \mp \frac{\mu^2 - k^2R^2}{R^2}u_R = 0,\\ \left\{\begin{array}{l}\textit{Времениподобная область}\\ \textit{Пространственноподобная область}\end{array}\right..\end{array}\right. \tag{8}$$

В случае отсутствия завимимости от углов φ, ϑ, эти уравнения можно записать в виде (используя (1.1.*))

$$\begin{cases} \pm\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\frac{\partial u_\sigma}{\partial\sigma}\Big) - \Big(\mathbf{M}^2 + \mu^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}^2\sigma\\ \mathrm{ch}^2\sigma\end{array}\right\}\Big)u_\sigma = 0,\\ \frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2} + \frac{3}{R}\frac{\partial u_R}{\partial R} \mp \frac{\mu^2}{R^2}u_R \pm k^2 u_R = 0,\\ \left\{\begin{array}{l}\textit{Времениподобная область}\\ \textit{Пространственноподобная область}\end{array}\right. . \end{cases} \tag{9}$$

Второе уравнение в (9) имеет вид уравнения Ломмеля [Никифоров, Основные формулы, п.10]:

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{z}v' + [(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)/z^2]v = 0, \tag{10}$$

при $v = u_R,\ z = R,\ \alpha = -1,\ \gamma = 1,\ \beta^2 = \pm k^2,\ \nu^2 = 1 \pm \mu^2$, которое имеет решение общего вида

$$v(z) = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma), \tag{11}$$

где $Z_\nu(z)$ – **цилиндрическая функция порядка** ν, то есть в нашем случае

$$u_R = R^{-1} Z_{\sqrt{1\pm\mu^2}}(\sqrt{\pm k^2}\, z). \tag{12}$$

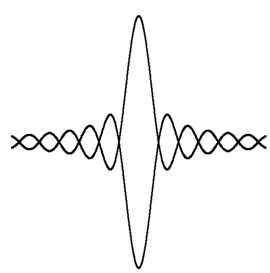
Заметим, что при большом возрасте Вселенной, в инерциальной системе отсчёта, сопутствующей оси времени значение угла σ в не слишком большой области пространства стремится к нулю и тогда значение μ существенно только в пространственно-подобном случае, а во времени-подобном случае его можно игнорировать.

⋆ ⋆ ⋆

Сороконожка не тужила,
Пока лукаво на дороге
Её лягушка не спросила –
Легко ли ей не путать ноги?

И мысль бедняги вознеслась!
Она в канаве занялась
Проблему важную решать –
А как же всё-таки бежать?

Киплинг



Глава 5. 4-Х-МЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Это то самое преобразование, которое заданный мировым спектром (одним из отношений натуральных чисел) Мир, позволяет представить полем в пространстве-времени.

§1. Обобщённые функции.

1. Обобщённые функции (распределения). δ-функция. Функцию $f(x)$, определённую заданием **непрерывного** линейного функцинала $T_f(\varphi)$ на **основном пространстве** (множестве) K основных функций φ, будем называть **обобщённой функцией**, если K есть пространство всех **финитных** (то есть квадратично интегрируемых) функций, имеющих непрерывные производные всех порядков (см. [Колмогоров, с. 205]).

Существование основного пространства доказывает следующий пример функций из основного пространства:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{-1}{(\beta-x)(x-\alpha)}}, & \alpha < x < \beta \\ 0 & \textit{при остальных } x \end{cases}$$

[Колмогоров, с. 211].

Всякую интегрируемую на любом конечном интервале функцию $f(x)$ можно определить как обобщённую с помощью функционала

$$T_f(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = (f,\varphi). \tag{1}$$

Такие функции называются **регулярными**. Если функция $f(x)$ не интегрируема на любом конечном интервале, но определена функционалом $T_f(\varphi)$, то выражение (1) следует рассматривать как определение интеграла вида (1) для обобщённой функции $f(x)$.

Например выражение

$$T_\delta(\varphi) = \varphi(a) \tag{2}$$

определяет так называемую **δ-функцию** $\delta(x-a)$, для которой интеграл вида (1) определяется выражением

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

которое называется **основным свойством δ-функции**.

δ-функцию можно определить и без использования понятия обобщённой функции с помощью выражения:

$$\delta(x-a) = \delta(a-x) = \begin{cases} \frac{1}{dx_a}, & x \subset dx_a \\ 0, & x \not\subset dx_a \end{cases}, \tag{4}$$

где dx_a - элемент оси $\vec{x}$, содержащий точку a.

Из данного определения следует основное свойство δ-функции. Действительно

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \delta(x-a)\ \varphi(x)\ dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{dx_a}, & x \subset dx_a \\ 0, & x \not\subset dx_a \end{array} \right\} \varphi(x)\ dx,$$

где (x_1, x_2) - любой интервал, содержащий точку a. Так как значение определённого интеграла не зависит от способа разбиения области интегрирования на элементы интегральной суммы, то dx можно выбрать равным dx_a, когда он содержит точку $x = a$. Тогда слагаемое интегральной суммы, соответствующее элементу dx_a равно $\varphi(a)$, а все остальные слагаемые равны нулю, при этом:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \delta(x-a)\ \varphi(x)\ dx = \varphi(a). \tag{5}$$

В частности, приобретает смысл выражение

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \delta(x-a)\ \delta(x)\ dx = \delta(a). \tag{6}$$

Функция вида

$$f(x) = \int\limits_{a}^{b} g(x-t)\,h(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} h(x-t)\,g(t)\,dt = g(x) * h(x) = h(x) * g(x) \tag{7}$$

[Корн (4.6-56)] называется **свёрткой** функций $g(x)$ и $h(x)$. Таким образом свёрточный квадрат δ-функции

$$\delta(x) * \delta(x) = \delta(x) \tag{8}$$

равен ей самой. Кроме того основное свойство δ-функции можно записать в виде

$$\varphi(x) * \delta(x) = \delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x), \tag{9}$$

то есть δ-функция является **единицей свёрточной алгебры**.

2. Действия над обобщёнными функциями. Легко определяются операции сложения обобщённых функций

$$(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi)$$

и умножения на постоянное число

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi).$$

Можно показать, что произведение двух обобщённых функций определить невозможно, если потребовать, чтобы эта операция была непрерывна, а для регулярных обобщённых функций совпадала бы с обычным умножением функций [Колмогоров, с. 207]. Поэтому, вообще говоря, не имеет смысла произведение двух δ-функций.

Так как для непрерывно дифференцируемой функции

$$\frac{dT_f}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

то естественно производную обобщённой функции определить формулой

$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi')$ или $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$.

Аналогично определяются производные следующих порядков.

Пример дифференцирования **функции Хевисайда**:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \varphi(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\ dx,$$

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\ dx = \varphi(0),$$

то есть

$$f'(x) = \delta(x).$$

Ясно, что если f - функция, имеющая в точках $x_1,\ x_2,\ \ldots$ скачки, равные $h_1,\ h_2,\ \ldots$ и дифференцируемая (в обычном смысле) в остальных точках, то производная от

неё (как от обобщённой функции) представляет собой сумму обычной производной f' (в тех точках, где она существует) и выражения вида

$$\sum_i h_i \delta(x - x_i).$$

3. Обобщённые функции как пределы последовательностей функций. Любые обобщённые функции можно приближать функциями непрерывными вместе со всеми своими производными. [Рихтмайер, с. 48]. Например, δ-функция может быть представлена пределом последовательности функций

$$F(\omega, x) = \frac{\sin \omega x}{\pi x}, \qquad \text{(см. Рис. 105.1)}$$

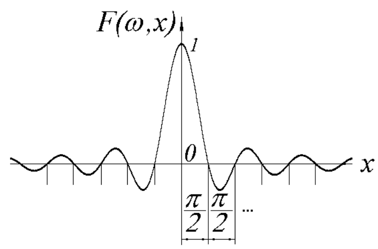


Рис. 105.1.

то есть

$$\delta(x) = \lim_{\omega \to \infty} F(\omega, x).$$

Действительно, этот предел обладает свойствами δ-функции. Используя предельный переход при $x \to 0$, находим, что $F = \omega/\pi$, при $x = 0$, тогда предельный переход $\omega \to \infty$ даёт для $\delta(x)$ бесконечное значение в точке $x = 0$.

При $x \neq 0$ δ-функция в рассматриваемом представлении равна 0 лишь в ограниченном смысле, который ниже прояснится.

Для проверки основного свойства δ-функции в этом представлении, вычислим интеграл:

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin \omega x}{x}\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} \sin \omega x\ dx.$$

Рассмотрим элемент интегральной суммы этого интеграла, не содержащий точку $x = 0$ (Рис. 105.2)

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном элементе, то приращение $\triangle\ \frac{f(x)}{x}$ бесконечно мало́ и амплитуду синусоиды на интервале $\triangle x$ можно считать постоянной (при стремлении частоты ω к бесконечности). В силу равенства

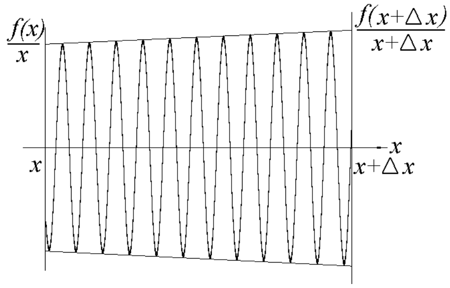


Рис. 105.2.

площадей положительных и отрицательных полупериодов синусоиды, частичный интеграл J на интервале $\triangle x$ не превышает по модулю площади одного полупериода, то есть $\frac{2}{\omega} \cdot \frac{f(x)}{x}$. Поэтому если функция $\frac{1}{x} f(x)$ ограниченная (кроме точки $x = 0$), то все элементы интегральной суммы, кроме содержащего точку $x = 0$, обращаются в пределе $\omega \to \infty$ в нуль.

Это справедливо также и в случае кусочно непрерывной ограниченной функции $\frac{1}{x} f(x)$, так как конечные разрывы можно совместить с границами подходящих элементов интегральной суммы.

Таким образом, если функция $\frac{1}{x} f(x)$ кусочно непрерывна и ограничена на интервалах $0 < x < \infty$, $-\infty < x < 0$ (точка $x = 0$ исключается), то частичный интеграл J на указанных интервалах обращается в нуль. Отличаться от нуля он может только на бесконечно малой окрестности точки $x = 0$. Поэтому для вычисления интеграла J существенно значение функции $f(x)$ только в бесконечно малой окрестности точки $x = 0$ и мы можем заменить непрерывную функцию $f(x)$ на постоянную функцию $f(0)$. И тогда

$$J = \frac{1}{\pi}\ f(0)\ J_1,$$

где

$$J_1 = \lim_{\omega \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin y}{y} dy,$$

$$y = \omega x$$

или

$$J_1 = 2 \lim_{\omega \to \infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 2 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Используя [Прудников 2.5.3.12, с. 387], найдём:

$$J_1 = \pi,$$

$$J = f(0).$$

Таким образом для представления δ-функции в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin \omega x}{x}, \tag{1}$$

получаем основное её свойство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{2}$$

Заметим, что для δ-функции, определённой в виде (1), формула (2) справедлива для любой непрерывной в точке 0 функции $f(x)$ при кусочно непрерывной ограниченной функции $\frac{1}{x}f(x)$, то есть для более широкого класса, чем K. Возможны также и обобщения на функции, имеющие в точке 0 конечный разрыв. Эта формула выражает **фильтрующее (основное) свойство** δ-функции.

Обычно, заменяя переменную, переобозначая переменную и пользуясь чётностью δ-функции, это свойство записывают в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \tag{3}$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega(x-a)} d\omega = \frac{1}{2\pi i(x-a)} \mathrm{e}^{i\omega(x-a)} \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

В смысле главного значения:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \frac{2i}{x-a} \sin \omega(x-a) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin \omega(x-a)}{x-a} = \delta(x-a).$$

Таким образом, δ-функция представляется интегралом

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega(x-a)} d\omega. \tag{4}$$

взятым в смысле главного значения.

Отсюда, в частности, следует:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos \omega x \, d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega, \tag{5}$$

но сдругой стороны легко проверить интегрированием, что

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\vartheta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x), \tag{6}$$

где

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Сравнивая (5) и (6) (принимая во внимание при выборе постоянной интегрирования нечётность функции $(\sin\omega x)/\omega$ относительно x, имеем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x). \tag{7}$$

4. Произведения δ-функций. Как мы уже отметили, произведение обобщённых функций, вообще говоря, не имеет смысла. Хотя, с определённой осторожностью можно использовать соотношения типа (1.6)

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \delta(a-x)\ \delta(x-b)\ dx = \delta(a-b) \tag{1}$$

[Корн, с. 793].

Если использовать представления δ-функций пределами непрерывных функций, то произведению двух δ-функций $\delta(x-a)$, $\delta(x-b)$ в каждом частном случае можно придать смысл, но он будет зависеть от конкретного вида аппроксимации δ-функции, так как в точках a и b для произведения $\delta(x-a)\ \delta(x-b)$ получается в пределе аппроксимации неопределённость вида $0\cdot\infty$, которая раскрывается по-разному в зависимости от вида аппроксимации.

Сказанное не следует путать со случаем произведения нескольких δ-функций от разных аргументов, когда получается просто многомерная δ-функция. Например,

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(x^1-x_0^1)\cdot\delta(x^2-x_0^2)\cdot\delta(x^3-x_0^3), \tag{2}$$

при этом

$$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,dv = \int \delta(x^1-x_0^1)\,dx^1 \int \delta(x^2-x_0^2)\,dx^1 \int \delta(x^3-x_0^3)\,dx^1 = 1. \tag{3}$$

Другой характерный пример

$$\int \delta(r-r_0)\,dv = 4\pi \int\limits_0^\infty \delta(r-r_0)\,r^2\,dr = 4\pi r_0^2. \tag{4}$$

5. Разложение по плоским волнам δ-функции в псевдоэвклидовом пространстве. Такая δ-функция определяется произведением

$$\delta(x_\mu) = \delta(x_0)\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3). \tag{1}$$

Поскольку δ-функция представима в виде (3.4)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega, \tag{2}$$

то

$$\delta(x^\mu) = \frac{1}{16\pi^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix_k^\nu x_\nu}\,dx^0dx^1dx^2dx^3 = \\ = \frac{1}{16\pi^4}\int \mathrm{e}^{ix_k^\nu x_\nu}\,dx_k^\mu, \tag{3}$$

где x_k^ν – координаты спектрального пространства (**волновые векторы**). Очевидно это равенство 4-скалярное.

Зная среднюю плотность распределения спектральных точек на носителе космического спектра, мы тем самым знаем среднюю плотность распределения волновых векторов.

§2. Преобразования Фурье.

1. Интеграл Фурье. Подставляя в выражение фильтрующего свойства δ-функции

$$\psi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t'-t)\,\psi(t')\,dt' \tag{1}$$

её представление в виде (1.3.4)

$$\delta(t'-t) = \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega(t-t')}d\omega \tag{2}$$

и изменив порядок интегрирования (применяя теорему Фубини [Колмогоров, с. 317]) получим **интеграл Фурье** в комплексной форме:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t')\mathrm{e}^{-i\omega(t'-t)}dt'. \tag{3}$$

2. Преобразование Фурье. Эту **интегральную формулу Фурье** можно расчленить на два равенства. Обозначим

$$S(\omega) = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t')\mathrm{e}^{-i\omega t'} dt' = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\mathrm{e}^{-i\omega t} dt, \tag{1}$$

где A_F – произвольная постоянная. Тогда, записывая множитель $1/(2\pi)$ в виде

$$\frac{1}{2\pi} = A_F B_F, \tag{2}$$

интеграл Фурье (1.3) можно записать в виде

$$\psi(t) = B_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} d\omega. \tag{3}$$

где B_F определяется равенством (2).

Обратим внимание, что это расчленение не всегда делается одинаково, то есть в различных литературных источниках (например, [Рихтмайер, (4.4.1)], [Корн, 4.11-3]) перед интегралами в последних двух равенствах можно встретить различные коэффициенты, произведение которых, разумеется, всегда равно $1/(2\pi)$. В этой книге мы будем использовать коэффициенты

$$A_F = 1,\ B_F = \frac{1}{2\pi}. \tag{4}$$

В гл.14 мы продемонстрируем, что выбор коэффициентов A_F, B_F, вместе с коэффициентом $1/16\pi$ в электромагнитном лагранжиане, определяет единицы измерения электромагнитного поля. При этом вариант (4) соответствует гауссовой системе единиц.

Формулы (1) и (3) представляют собой **прямое и обратное преобразования Фурье**.

Для расширения класса преобразуемых функций можно использовать обобщённые функции как пределы последовательностей интегрируемых функций.

3. Волновой вектор. Величина ω называется **угловой частотой**. Обычно **частотой** называют величину f, обратную периоду T периодической (в частности синусоидальной) функции

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1}$$

При этом

$$\omega = 2\pi f. \tag{2}$$

Использование ω вместо f избавляет функцию $\sin 2\pi f t = \sin\omega t$ от записи множителя 2π.

В таком определении частота – величина положительная. Однако, для аналитических целей, вместо вещественных синусоидальных функций более удобны их комплексные комбинации типа

$$\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t. \tag{3}$$

Система таких функций полна только в том случае, если область определения величины ω лежит в интервале

$$-\infty < \omega < \infty. \tag{4}$$

Отсюда возникает понятие **отрицательной частоты**. Инверсия направления числовой оси $\vec{t}$ очевидно эквивалентна изменению знака частоты в комплексном случае (3). Поэтому в этом случае частоту ω можно рассматривать как одномерный вектор – **волновой вектор**, преобразующийся как $1/\Delta t$, то есть как ковариантный одномерный вектор

$$\frac{1}{\Delta t'} = \frac{dt}{dt'}\frac{1}{\Delta t}. \tag{5}$$

Понятие волнового вектора легко обобщается и на **многомерный** случай заменой в (3) одномерного скаляра ωt на многомерный скаляр $k_\nu x^\nu$.

Изменение знака частоты в комплексном выражении также эквивалентно его комплексному сопряжению.

4. Преобразование Фурье вещественных функций.

Преобразование Фурье (прямое и обратное) для вещественных функций $\psi(t)$ (при положительной частоте ω) легко получается из (2.1),(2.3) разделением **косинусной** и **синусной компонент**, то есть чётной

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2}(\psi(t) + \psi(-t)) \tag{1}$$

и нечётной

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}(\psi(t) - \psi(-t)) \tag{2}$$

частей вещественной функции

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t). \tag{3}$$

При этом (2.1) можно записать в виде двух равенств

$$A(\omega) = S_2(\omega) = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_2(t)\, \cos\omega t\, dt \quad \omega \geqslant 0, \tag{4}$$

$$B(\omega) = S_1(\omega) = -A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t)\, \sin\omega t\, dt \quad \omega \geqslant 0, \tag{5}$$

а (2.3) – в виде

$$\psi_2(t) = B_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega\Big|_{\omega>0} = B_F \int\limits_{0}^{\infty} A(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega, \tag{6}$$

$$\psi_1(t) = B_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)\, \sin\omega t\, d\omega\Big|_{\omega>0} = B_F \int\limits_{0}^{\infty} B(\omega)\, \sin\omega t\, d\omega, \tag{7}$$

откуда

$$\psi(t) = B_F \int\limits_{0}^{\infty} (A(\omega)\, \cos\omega t + B(\omega)\, \sin\omega t)\, d\omega, \tag{8}$$

где (4),(5) – прямое преобразование Фурье, (8) – обратное преобразование Фурье.

§3. 4-х-мерное преобразование Фурье.

1. 4-х-мерное преобразование Фурье. Одномерные преобразования Фурье легко обобщаются на 4-х-мерный случай в виде:

$$S(x_k^\mu) = A_F^4 \int \psi(x^\mu) \mathrm{e}^{-ix_k^\mu x_\mu} d\Omega, \tag{1}$$

$$\psi(x^\mu) = B_F^4 \int S(x_k^\mu) \mathrm{e}^{ix_k^\mu x^\mu} d\Omega_k, \tag{2}$$

где $d\Omega,\ d\Omega_k$ - элементы 4-объёма в координатном пространстве $\{x^\mu\}$ и пространстве волновых векторов $\{x_k^\mu\}$. Функцию $\mathrm{e}^{\mp ix_k^\mu x_\mu}$ будем называть **комплексной плоской волной** с **волновым вектором** x_k^μ в пространстве $\{x^\mu\}$ или – с **волновым вектором** x^μ в пространстве $\{x_k^\mu\}$. В декартовых координатах

$$d\Omega = dx^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3, \tag{3}$$

$$d\Omega_k = dx_k^0\ dx_k^1\ dx_k^2\ dx_k^3. \tag{4}$$

В пространстве волновых векторов декартовы координаты будем обозначать через x_k^μ (аналогично x^μ в координатном пространстве), то есть теми же символами, что и в координатном пространстве, но - снабжая их индексом k.

В гиперсферических координатах $d\Omega,\ d\Omega_k$ зависят от полости изотропного конуса. Поэтому **интегрировать надо отдельно по этим полостям, суммируя результаты**.

$$d\Omega = \begin{cases} T^3 \mathrm{sh}^2\sigma \sin\vartheta\ dQ\ d\sigma\ d\vartheta\ d\varphi, & \textit{для времениподобной полости, т. е. } R = T \\ Q^3 \mathrm{ch}^2\sigma \sin\vartheta\ dQ\ d\sigma\ d\vartheta\ d\varphi, & \textit{для пространственноподобной полости, т. е. } R = Q \end{cases}, \tag{5}$$

$$d\Omega_k = \begin{cases} T_k^3 \mathrm{sh}^2\sigma_k \sin\vartheta_k\ dQ_k\ d\sigma_k\ d\vartheta_k\ d\varphi_k, & R_k = T_k \\ Q_k^3 \mathrm{ch}^2\sigma_k \sin\vartheta_k\ dQ_k\ d\sigma_k\ d\vartheta_k\ d\varphi_k, & R_k = Q_k \end{cases}. \tag{6}$$

Для 4-х-мерного случая можно определить четырёхмерную δ-функцию в виде

$$\delta(x^\mu) = \delta(x^0)\ \delta(x^1)\ \delta(x^2)\ \delta(x^3). \tag{7}$$

Обозначая прямое и обратное преобразования Фурье как $F,\ F^{-1}$, можно записать

$$S(x_k^\mu) = F^{-1}[\psi(x^\mu)], \tag{8}$$

$$\psi(x^\mu) = F[S(x_k^\mu)]. \tag{9}$$

2. 4-х-мерное преобразование Фурье центрально симметричных функций. Пусть функция $\psi(x_\mu)$ **центрально симметрична**, то есть не зависит от угловых координат $\varphi,\ \vartheta$. Запишем $x_{k\mu}\ x^\mu$ в виде

$$x_{k\mu}\ x^\mu = x_k^\mu\ x_\mu = x_{k0}\ x^0 - \mathbf{r}_k\mathbf{r} = x_{k0}\ x^0 - r_k\ r\ \cos(\mathbf{r}_k^\wedge\mathbf{r}). \tag{1}$$

Так как $\psi(x_\mu)$ не зависит от угловых координат $\vartheta,\ \varphi$, то интеграл в преобразовании Фурье не зависит от ориентации вектора $\mathbf{r}_k$. Выберем ориентацию $\mathbf{r}_k$ так, чтобы $\mathbf{r}_k||\mathbf{z}$, тогда

$$\cos(\mathbf{r}_k^\wedge\mathbf{r}) = \cos(\vec{z}^\wedge\mathbf{r}) = \cos\vartheta. \tag{2}$$

Выразим $x_{k0},\ r_k,\ x^0,\ r$ через гиперсферические координаты

$$\begin{gathered} x^0 = R\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,\sigma \\ \mathrm{sh}\,\sigma \end{Bmatrix}, \qquad r = R\begin{Bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\sigma \\ \mathrm{ch}\,\sigma \end{Bmatrix}, \\ x_{k0} = R_k\begin{Bmatrix} \varepsilon_k\,\mathrm{ch}\,\sigma_k \\ \mathrm{sh}\,\sigma_k \end{Bmatrix}, \quad r_k = R_k\begin{Bmatrix} \varepsilon_k\,\mathrm{sh}\,\sigma_k \\ \mathrm{ch}\,\sigma_k \end{Bmatrix}. \end{gathered} \tag{3}$$

Так как центрально симметричная функция зависит лишь от r и x^0 или от σ и R, то можно обозначить для неё

$$\psi(x_\mu) = \psi_{\sigma R}(\sigma,\ R). \tag{4}$$

Тогда преобразование Фурье можно записать в виде:

$$S(x_k^\mu) = A_F^4 \sum_{R=T,Q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ix_{k0}x^0} \mathrm{e}^{ir_k r\cos\vartheta} \psi_{\sigma R}(\sigma, R) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} T^3\mathrm{sh}^2\sigma \\ Q^3\mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix} \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dR\, d\sigma. \tag{5}$$

Аналогично записывается обратное преобразование

$$\psi(x^\mu) = B_F^4 \sum_{R_k=T_k,Q_k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix_{k0}x^0} \mathrm{e}^{-ir_k r\cos\vartheta_k} S_R(\sigma_k, R_k) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} T_k^3 \mathrm{sh}^2\sigma_k \\ Q_k^3 \mathrm{ch}^2\sigma_k \end{Bmatrix} \sin\vartheta_k \, d\varphi_k \, d\vartheta_k \, dR_k \, d\sigma_k. \tag{6}$$

Проинтегрировав по φ, получим

$$S(x_k^\mu) = 2\pi A_F^4 \sum_{T,Q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ix_{k0}x^0} J \ \psi_{\sigma R}(\sigma, R) \begin{Bmatrix} T^3 \mathrm{sh}^2\sigma \\ Q^3 \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix} dR \, d\sigma, \tag{7}$$

где

$$J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{ir_k r \ \cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Сделаем в интеграле J замену

$\cos\vartheta = y, \quad d\vartheta = -dy/(\sin\vartheta), \quad y_{|\vartheta=0} = 1, \quad y_{|\vartheta=\pi} = -1,$

$$J = -\int_1^{-1} \mathrm{e}^{ir_k r y} dy = \frac{1}{ir_k r} \mathrm{e}^{ir_k r}|_{-1}^{+1} = \frac{2}{r_k r} \sin(r_k r). \tag{8}$$

Ясно, что $S(x_k^\mu)$ не зависит от угловых координат в пространстве $\{x_k^\mu\}$, поэтому можно переобозначить

$$S(x_k^\mu) = S_{\sigma R}(\sigma_k, R_k). \tag{9}$$

То есть спектр $S(x_k^\mu)$ является также центрально симметричной функцией. Тогда преобразование Фурье центрально симметричной функции $\psi_{\sigma Q}(\sigma, Q)$ можно записать в виде

$$S_{\sigma R}(\sigma_k, R_k) = \frac{4\pi A_F^4}{r_k} \sum_{T,Q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \mathrm{e}^{-ix_{k0}x^0} \sin(r_k r) \psi_{\sigma R}(\sigma, R) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} T^3 \mathrm{sh}^2\sigma \\ Q^3 \mathrm{ch}^2\sigma \end{Bmatrix} dR \, d\sigma. \tag{10}$$

По формулам, аналогичным (7),(8),(9),(10), получается обратное преобразование

$$\psi_{\sigma R}(\sigma, R) = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \sum_{T_k,Q_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{r_k} \mathrm{e}^{ix_{k0}x^0} \sin(r_k r) S_{\sigma R}(\sigma_k, R_k) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} T_k^3 \mathrm{sh}^2\sigma_k \\ Q_k^3 \mathrm{ch}^2\sigma_k \end{Bmatrix} dR_k \, d\sigma_k. \tag{11}$$

Знак “–” появился при вычислении J, где знак показателя экспоненты иной, чем для прямого преобразования.

Подставив вместо r_k, r их выражения через R_k, σ_k, R, σ, имеем

$$S_{\sigma R}(\sigma_k, R_k) = \frac{4\pi A_F^4}{r_k} \sum_{T,Q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix_{k0}\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(\sigma)T \ \mathrm{ch}\,\sigma \\ Q \ \mathrm{sh}\,\sigma \end{array} \right\}} \times$$

$$\times \sin(r_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(\sigma)T \ \mathrm{sh}\,\sigma \\ Q \ \mathrm{ch}\,\sigma \end{array} \right\}) \psi_{\sigma R}(\sigma, R) \left\{ \begin{array}{c} T^2 \mathrm{sh}\,\sigma \\ Q^2 \mathrm{ch}\,\sigma \end{array} \right\} d\left\{ \begin{array}{c} T \\ Q \end{array} \right\} d\sigma, \tag{12}$$

$$\psi_{\sigma R}(\sigma, R) = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \sum_{T_k,Q_k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_k(\sigma_k)T_k \ \mathrm{ch}\,\sigma_k \\ Q_k \ \mathrm{sh}\,\sigma_k \end{array} \right\}} \times$$

$$\times \sin(r \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_k(\sigma_k)T_k \ \mathrm{sh}\,\sigma_k \\ Q_k \ \mathrm{ch}\,\sigma_k \end{array} \right\}) S_{\sigma R}(\sigma_k, R_k) \left\{ \begin{array}{c} T_k^2 \mathrm{sh}\,\sigma_k \\ Q_k^2 \mathrm{ch}\,\sigma_k \end{array} \right\} d\left\{ \begin{array}{c} T_k \\ Q_k \end{array} \right\} d\sigma_k. \tag{13}$$

Заметим, что в случае расположения спектра только во **времениподобной** полости изотропного конуса, то есть когда часть спектра, расположенная в пространственноподобной полости изотропного конуса, равна нулю (как, например, в случае мирового спектра), обратное преобразование Фурье упрощается и имеет для центрально симметричного случая вид:

$$\psi_{\sigma R}(\sigma, R) = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k(\sigma_k) T_k \ \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\, \varepsilon_k(\sigma_k)\, T_k \ \mathrm{sh}\,\sigma_k) \times$$

$$\times S_{\sigma R}(\sigma_k, T_k)\, T_k^2 \,\mathrm{sh}\,\sigma_k \ dT_k \ d\sigma_k. \tag{14}$$

3. Поля гиперсферического спектра. **Гиперсферическим спектром** будем называть ограниченную инвариантную по второму множителю (3.2.3) функцию спектрального пространства вида:

$$S(x_k^\mu) = G(x_k^\mu)\ \delta(T_k - k). \tag{1}$$

Носитель этой функции назовём **несущей гиперсферой**. Заметим, что на этой же гиперсфере лежат и все точки космического спектра. Очевидно функция $G(x_k^\mu)$ совпадает с $S(x_k^\mu)$ на несущей гиперсфере, а вне её она произвольна.

Иногда гиперрадиусвекторы x_k^μ, для определённого множества их значений, удобно обозначить особо, например, k^μ.

Каждой точке $k^\mu = x_k^\mu$ гиперсферического спектра соответствует в координатном пространстве плоская волна:

$$\psi_f = \mathrm{e}^{ik_\mu x^\mu},$$

которая удовлетворяет уравнению КГФ:

$$\Box \psi_f = -k^2 \psi_f,$$

где

$$k^2 = k_\mu k^\mu.$$

Так как это справедливо для каждой точки гиперсферического спектра, то координатное представление ψ любого гиперсферического спектра удовлетворяет уравнению КГФ, за исключением, может быть, особых точек.

$$\Box\psi = -k^2\psi.$$

Обратное преобразование Фурье для гиперсферического спектра можно записать уже не как 4-х-кратный, а как тройной интеграл, так как гиперсферический спектр является функцией лишь трёх независимых переменных.

При этом для центрально симметричного случая обратное преобразование Фурье гиперсферического спектра (расположенного во времениподобной полости изотропного конуса) упрощается до одномерного интеграла следующим образом:

$$\psi_{\sigma R}(\sigma, R) = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k(\sigma_k) T_k \ \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\,\varepsilon_k(\sigma_k)\,T_k\ \mathrm{sh}\,\sigma_k)\times$$

$$\times G_{\sigma R}(\sigma_k, T_k)\,\delta(T_k - k)\,T_k^2\,\mathrm{sh}\,\sigma_k\ dT_k\ d\sigma_k =$$

$$= \frac{-4\pi B_F^4 k^2}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k(\sigma_k) k \ \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\,\varepsilon_k(\sigma_k)\,k\ \mathrm{sh}\,\sigma_k)\times$$

$$\times G_k(\sigma_k)\,\mathrm{sh}\,\sigma_k\ d\sigma_k, \tag{2}$$

где

$$G_k(\sigma_k) = G_{\sigma R}(\sigma_k, k).$$

Заметим, что сдвиги гиперсферического спектра без поворотов выводят спектр из гиперсферического носителя $R_k = k$, то есть спектр при этом перестаёт быть гиперсферическим. То есть в гиперсферическом спектре не возможны параллельные сдвиги, однако возможны Лоренцевы сдвиги (точнее - Лоренцевы повороты), так как при этом спектр не покидает своего гиперсферического носителя.

Полезно также заметить, что благодаря фильтрующему свойству δ-функции существенны лишь те значения функции $G(x_k^\mu)$, которые соответствуют точкам на несущей гиперсфере. Остальные же значения этой функции могут быть произвольными, при условии непрерывности функции $G(x_k^\mu)$ на несущей гиперсфере. Функцию $G(x_k^\mu)$ будем называть **задающей функцией гиперсферического спектра**.

Обратим внимание, что так как гиперсферический спектр по определению содержит сомножителем δ - функцию, то его квадрат не определён и следовательно **гиперсферический спектр квадратично не интегрируем**. Тогда согласно равенству Парсеваля и **любая функция гиперсферического спектра квадратично не интегрируема**.

4. Положительночастотная и отрицательночастотная части спектра. В общем случае всякий спектр содержит пространственноподобную и времениподобную части (в смысле расположения в пространственно-подобной или времениподобной полости изотропного конуса). В свою очередь времениподобная часть распадается на две части

$$S = S^{+} + S^{-},$$

где

$$S^{+} = \begin{cases} S, & \sigma \geqslant 0 \\ 0, & \sigma < 0 \end{cases}, \qquad S^{-} = \begin{cases} 0, & \sigma > 0 \\ S, & \sigma \leqslant 0 \end{cases}.$$

Эти части (следуя [Нелипа]) будем называть соответственно **положительночастотной** и **отрицательночастотной** частями гиперсферического спектра.

Очевидно, что непрерывные преобразования Лоренца не могут перевести никакую спектральную точку из одной такой части в другую. Это происходит лишь при инверсии координаты k^0, которая имеет смысл частоты плоской волны, соответствующей данной спектральной точке.

Для краткости эти части спектра будем также называть **(+)частотными** и **(−)частотными**.

Если задан спектр S, то, очевидно, что его (+)частотная и (−)частотная части определяются выражениями

$$S^{+} = \vartheta(\sigma_k)\, S,$$
$$S^{-} = \vartheta(-\sigma_k)\, S,$$

где

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

– функция Хевисайда.

Если спектр гиперсферический, то

$$S^{+} = \vartheta(\sigma_k)\ \delta(T_k - k)\ G(x_k^{\mu}),$$
$$S^{-} = \vartheta(-\sigma_k)\ \delta(T_k - k)\ G(x_k^{\mu}).$$

5. Формула обратного преобразования Фурье центрально симметричного времениподобного гиперсферического спектра.

Используя замену переменной:

$$\mathrm{e}^{\sigma_k} = y,\ d\sigma_k = \frac{dy}{y},\ y_{|\sigma_k=-\infty} = 0,\ y_{|\sigma_k=\infty},\ \sigma_k = \ln y,$$

для времениподобного центрально симметричного гиперсферического спектра можно записать

$$\psi = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{it\varepsilon_k T_k\ \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\,\varepsilon_k\,T_k\ \mathrm{sh}\,\sigma_k) \times$$

$$\times G(\sigma_k)\,\delta(T_k-k)\,T_k^2\,\mathrm{sh}\,\sigma_k\;dT_k\;d\sigma_k=$$

$$=\frac{-4\pi B_F^4k^2}{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\varepsilon_k kt\ \mathrm{ch}\,\sigma_k}\sin(r\,\varepsilon_k\,k\ \mathrm{sh}\,\sigma_k)\times$$

$$\times G(\sigma_k)\,\mathrm{sh}\,\sigma_k\;d\sigma_k=$$

$$=\frac{-4\pi B_F^4k^2}{r}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{i\varepsilon_k\frac{k}{2}t(y+\frac{1}{y})}\sin(\varepsilon_k\frac{k}{2}r(y-\frac{1}{y}))\varphi(y)\,dy,$$

где $t=x^0$,

$$\varphi(y)=G(\sigma_k)\ \mathrm{sh}\,\sigma_k\ \mathrm{e}^{-\sigma_k}=G(\ln y)\ \mathrm{sh}\ \ln y\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{2}G(\ln y)\,(1-\frac{1}{y^2}).$$

Или

$$\psi=\frac{-4\pi B_F^4k^2}{2ir}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{i\varepsilon_k\frac{k}{2}t(y+\frac{1}{y})}(\mathrm{e}^{i\varepsilon_k\frac{k}{2}r(y-\frac{1}{y})}-\mathrm{e}^{-i\varepsilon_k\frac{k}{2}r(y-\frac{1}{y})})\varphi(y)\,dy$$

или

$\psi=$

$$=\frac{2\pi iB_F^4k^2}{r}\int\limits_{0}^{\infty}(\mathrm{e}^{i\varepsilon_k\frac{k}{2}(r+t)y-i\varepsilon_k\frac{k}{2}(r-t)\frac{1}{y}}-\mathrm{e}^{-i\varepsilon_k\frac{k}{2}(r-t)y+i\varepsilon_k\frac{k}{2}(r+t)\frac{1}{y}})\varphi(y)\,dy\qquad.$$

Интегральное выражение для функции ψ вычисляется с помощью таблиц интегралов [Прудников] в случаях, если функция φ имеет один из следующих видов:

$\varphi(y)=y^n$ [Прудников 2.3.16.1, с. 344],

$\varphi(y)=y^n\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}\ by\\ \mathrm{ch}\ by\end{matrix}\right\}$ [Прудников 2.4.17.2, с. 369],

$\varphi(y)=y^n\left\{\begin{matrix}\sin by\\ \cos by\end{matrix}\right\}$ [Прудников 2.5.37.2, с. 453],

$\varphi(y)=y^n\ln y$ [Прудников 2.6.22.7, с. 529]

и других.

Так как эти функции образуют полную систему (например, функции $\sin bx$, $\cos bx$), то следовательно получен общий вид центрально симметричных функций гиперсферического времениподобного спектра. То есть любая такая функция может быть получена суперпозицией найденых функций.

§4. Свойства преобразования Фурье.

1. Сдвиги в преобразованиях Фурье. Если спектр $S(\omega)$ умножить на плоскую волну с волновым 4-вектором a^μ, то координатное представление сместится на 4-вектор a^μ. Действительно, если

$$\psi(x^\mu)=B_F^4\int S(x_k^\mu)\ \mathrm{e}^{ix_{k\mu}x^\mu}d\Omega_k,$$

то

$$B_F^4 \int e^{ia^\mu x_{k\mu}} S(x_k^\mu) e^{ix_{k\mu}x^\mu} d\Omega_k =$$

$$= B_F^4 \int S(x_k^\mu) e^{ix_{k\mu}(x^\mu + a^\mu)} d\Omega_k = \psi(x^\mu + a^\mu).$$

Аналогично, если

$$S(x_k^\mu) = A_F^4 \int \psi(x^\mu)\ e^{-ix_k^\mu x_\mu} d\Omega,$$

то

$$A_F^4 \int e^{ib^\mu x_\mu} \psi(x^\mu) e^{-ix_k^\mu x_\mu} d\Omega = S(x_k^\mu - b^\mu).$$

Обозначая через $F,\ F^{-1}$ прямое и обратное преобразования Фурье, можно записать

$$F^{-1}[e^{ia^\mu x_{k\mu}} S(x_k^\mu)] = \psi(x^\mu + a^\mu), \qquad (1)$$

$$F[e^{ib^\mu x_\mu} \psi(x^\mu)] = S(x_k^\mu - b^\mu). \qquad (2)$$

То есть умножению на плоскую волну спектра (или координатного представления) соответствует сдвиг координатного представления (или спектра) на 4-вектор противоположный (или равный) волновому 4-вектору этой плоской волны.

2. Преобразование Фурье свёртки и произведения. Функция $f(x)$ называется **свёрткой** функций f_1 и f_2, и обозначается $f_1 * f_2$, если

$$f(x) = f_1 * f_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi) f_2(\xi) d\xi$$

[Колмогоров, с. 432]. Найдём преобразование Фурье свёртки. Применяя теорему Фубини (об изменении порядка интегрирования) и полагая $x - \xi = \eta$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \} e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\omega x} dx \} d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\omega\eta} e^{-i\omega\xi} d\eta \} d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi,$$

то есть
$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2].$$
Эта формула без труда обобщается на четырёхмерный случай.

Совершенно аналогично можно получить:
$$F^{-1}[S_1 * S_2] = F^{-1}[S_1] \cdot F^{-1}[S_2].$$
Последнее выражение можно записать в виде
$$F^{-1}[S_1 * S_2] = \psi_1 \cdot \psi_2.$$
Откуда, взяв Фурье-преобразование, имеем
$$F[\psi_1 \cdot \psi_2] = S_1 * S_2.$$
То есть Фурье-преобразование произведения равно свёртке Фурье-преобразований сомножителей
$$F[\psi_1 \cdot \psi_2] = F[\psi_1] * F[\psi_2].$$
Аналогично
$$F^{-1}[S_1 \cdot S_2] = F^{-1}[S_1] * F^{-1}[S_2].$$

3. Другие свойства преобразования Фурье.

(См. [Гахов, с. 15]).
$$1) \quad F[\psi^*] = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \mathrm{e}^{-ix_k x} dx =$$
$$= \left(A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \mathrm{e}^{ix_k x} dx \right)^* = \left(A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(-x) \mathrm{e}^{-ix_k x} dx \right)^*.$$
То есть (обобщая на многомерный случай):
$$F[\psi^*] = (F[\psi(-x^\mu)])^*.$$
Аналогично
$$F^{-1}[S^*] = (F^{-1}[S(-x_k^\mu)])^*.$$
$$2) \quad F[\psi(\lambda x)] = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda x) \mathrm{e}^{-ix_k x} dx =$$
$$= \frac{A_F}{\lambda} \int\limits_{-\lambda\infty}^{\lambda\infty} \psi(\lambda x) \mathrm{e}^{\frac{-ix_k \lambda x}{\lambda}} d(\lambda x) =$$

$$= \frac{A_F}{|\lambda|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda x) e^{\frac{-ix_k \lambda x}{\lambda}} d(\lambda x) =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} S(\frac{x_k}{\lambda}).$$

То есть, если

$$F[\psi(x)] = S(x_k),$$

то

$$F[\psi(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|} S(\frac{x_k}{\lambda}).$$

Аналогично, если

$$F^{-1}[S(x_k)] = \psi(x),$$

то

$$F^{-1}[S(\lambda x_k)] = \frac{1}{|\lambda|} \psi(\frac{x}{\lambda}).$$

В частности

$$F[\psi(-x)] = S(-x_k),$$

$$F^{-1}[S(-x_k)] = \psi(-x).$$

В 4-х-мерном случае, если

$$F[\psi(x^\mu)] = S(x_k^\mu),$$

то

$$F[\psi(\lambda x^\mu)] = \frac{1}{\lambda^4} S(\frac{x_k^\mu}{\lambda}).$$

Если

$$F^{-1}[S(x_k^\mu)] = \psi(x^\mu),$$

то

$$F^{-1}[S(\lambda x_k^\mu)] = \frac{1}{\lambda^4} S(\frac{x^\mu}{\lambda}).$$

4. Применение преобразования Фурье к неинтегрируемым функциям. Источником получения обобщённых функций является применение преобразования Фурье к неинтегрируемым функциям. При этом, как доказывается в теории обобщённых функций, основные свойства преобразования Фурье остаются справедливыми [Гахов, с. 257].

⋆ ⋆ ⋆

Никто пути пройденного у нас не отберёт.

Название книги Виктора Конецкого.

Глава 6. АНАЛИЗ ЕДИНОГО ПОЛЯ

Весьма сложные поля можно строить из простых.

§1. Стационарные решения уравнения КГФ.

1. Стационарные волны. Произвольную плоскую волну можно записать в виде

$$\psi_j = A_j \; \mathrm{e}^{ik_{j\mu}x^\mu}. \tag{1}$$

Рассмотрим суперпозицию таких волн, у которых все частоты k_{j0} одинаковы в данной системе координат

$$k_{j0} = \omega,$$

$$\psi = \sum_j \psi_j = \sum_j A_j \; \mathrm{e}^{i\omega x^0 + i\mathbf{k}_j\mathbf{x}} =$$

$$= \mathrm{e}^{i\omega x^0} \sum_j A_j \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_j\mathbf{x}} = \mathrm{e}^{i\omega x^0} \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \sum_j A_j \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_j\mathbf{x}}. \tag{3}$$

Таким образом полученная функция ψ в этой системе координат распадается на два множителя, один из которых зависит только от времени и осциллирует с частотой $k_0 = \omega$, а другой зависит только от пространственных координат. Такие функции (волны) будем называть **стационарными**. Для них характерно, существование системы координат, в которой

$$|\psi(x^\mu)|^2 = |\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})|^2, \tag{4}$$

то есть квадрат модуля не зависит от времени.

Если для всех плоских волн такой суперпозиции волновые 4-векторы $k_{j\mu}$ удовлетворяют условию

$$k_{j\mu}k_j^\mu = k^2, \tag{5}$$

что характерно для единого поля, то такая суперпозиция, очевидно, является решением уравнения КГФ.

2. Движение стационарных волн. Так как все плоские волны, составляющие стационарную волну имеют одинаковые проекции $k_0 = \omega$ их волновых 4-векторов, то спектр стационарных волн должен лежать в гиперплоскости, ортогональной 4-вектору

$$k_\mu = (\omega e_0,\, 0), \tag{1}$$

где e_0 - орт временной оси. Отсюда

$$\omega = \varepsilon_k |\omega|, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_k = \omega/|\omega| = k/|k| = \pm 1 \tag{3}$$

в зависимости от знака направления оси времени.

Если произвести какое-либо Лоренцево преобразование координат, то частоты плоских волн перестанут быть одинаковыми, но гиперплоский характер носителя спектра (наклонная прямая на рисунке) сохранится. При этом орт гиперплоскости останется времениподобным ортом. Поэтому **в более общем смысле** под **стационарной волной** следует понимать волну, носитель спектра которой гиперплоский с времениподобным ортом. Тогда для любой стационарной волны существует система отсчёта, в которой она имеет вид

$$\psi = \mathrm{e}^{i\omega x^0}\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

Будем говорить, что в такой системе отсчёта стационарная волна **покоится** или,

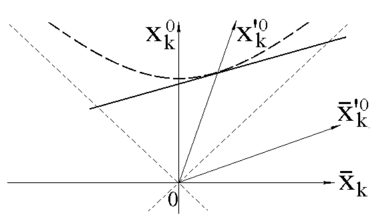


Рис. 106.1.

что эта система отсчёта **сопутствует** стационарной волне. Тогда можно говорить о **движении стационарной волны** относительно данной системы отсчёта, понимая под скоростью этого движения скорость системы отсчёта x', сопутствующей этой волне, относительно данной системы x. Обратим внимание, что системы координат x и x' подразумеваются в координатном представлении, на рисунке же изображены соответствующие системы координат x_k и x'_k в спектральном представлении.

3. Спектр стационарных волн. Ясно, что в сопутствующей системе отсчёта спектр стационарной волны с частотой $\omega = x'_{k0}$ можно записать в виде

$$S = \delta(x_{k0} - x'_{k0}) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k).$$

Если же стационарная волна удовлетворяет уравнению КГФ, то её спектр должен лежать на пересечении гиперплоскости и гиперсферы, то есть на трёхмерной сфере радиуса r'_k, принадлежащей гиперсферическому спектру. Поэтому спектр стационарной волны, удовлетворяющей уравнению КГФ можно записать в виде: (в сферических координатах)

$$S = \delta(x_{k0} - x'_{k0})\, \delta(r_k - r'_k) S_{\varphi\vartheta}(\varphi_k, \vartheta_k), \tag{1}$$

где

$$(x'_{k0})^2 - (r'_k)^2 = k^2. \tag{2}$$

При этом, если $S_{\varphi\vartheta}$ не зависит от φ_k, ϑ_k, то есть

$$S_{\varphi\vartheta} = C = \mathrm{const}, \tag{3}$$

то

$$\int S\; d\Omega_k = 4\pi r'^2_k C, \tag{4}$$

что определяет смысл выбраной нормировки спектра.

Тот же спектр в гиперсферических координатах можно записать в виде

$$S = \frac{1}{T'_k} \delta(\sigma_k - \sigma'_k)\, \delta(T_k - T'_k) S_{\varphi\vartheta}(\varphi_k, \vartheta_k), \tag{5}$$

при этом смысл нормировки остаётся прежним, так как при $S_{\varphi\vartheta} = C$:

$$\int S\; d\Omega_k = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{T'_k} \delta(\sigma_k - \sigma'_k)\, \delta(T_k - T'_k) C T_k^3 \mathrm{sh}^2\sigma_k\; dT_k\; d\sigma_k =$$

$$= 4\pi T'^2_k \mathrm{sh}^2\sigma'_k\; C = 4\pi r'^2_k C.$$

4. Стационарные центрально симметричные волны. Используя формулу для обратного преобразования Фурье времениподобного центрально симметричного спектра, для стационарной волны, удовлетворяющей уравнению КГФ, получим

$$\psi = \frac{-4\pi B_F^4}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k T_k \mathrm{ch}\, \sigma_k} \sin(r \varepsilon_k T_k \mathrm{sh}\, \sigma_k) \frac{1}{T'_k} \delta(\sigma_k - \sigma'_k) \times$$

$$\times \delta(T_k - T'_k) C T_k^2 \mathrm{sh}\, \sigma_k\; dT_k\; d\sigma_k =$$

$$= \frac{-4\pi B_F^4}{r} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon'_k T'_k \mathrm{ch}\, \sigma'_k} \sin(r\varepsilon'_k T'_k \mathrm{sh}\, \sigma'_k) T'_k \mathrm{sh}\, \sigma'_k C = \frac{-4\pi B_F^4 r'_k C}{r} \mathrm{e}^{ix^0 x'_{k0}} \sin(r r'_k)$$

или, обозначая

$$r'_k = |\mathbf{k}|, \quad x'_{k0} = \omega,$$

имеем

$$\psi = \frac{-4\pi B_F^4 |\mathbf{k}| C}{r} \mathrm{e}^{ix^0 \omega} \sin(r|\mathbf{k}|). \tag{1}$$

То есть получилось известное стационарное решение уравнения КГФ.

В частности, при $|\mathbf{k}| \to 0$ спектр вырождается в точку и функция ψ должна превратиться в плоскую волну.

Действительно

$$\psi\big|_{|\mathbf{k}|\to 0} = -4\pi B_F^4 |\mathbf{k}|^2 C \mathrm{e}^{ix^0 \omega} \lim_{|\mathbf{k}|\to 0} \frac{\sin(r|\mathbf{k}|)}{r|\mathbf{k}|} = -4\pi B_F^4 |\mathbf{k}|^2 C \mathrm{e}^{ix^0 \omega}. \tag{2}$$

Можно также использовать формулу для обратного преобразования Фурье центрально симметричного гиперсферического спектра:

$$\psi_{\sigma R} = \frac{-4\pi B_F^4 k^2}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k k \ \mathrm{ch}\, \sigma_k} \sin(r\varepsilon_k k \ \mathrm{sh}\, \sigma_k) G_k(\sigma_k) \ \mathrm{sh}\, \sigma_k d\sigma_k, \tag{3}$$

при этом, положив

$$G_k(\sigma_k) = \frac{1}{\mathrm{sh}\, \sigma_k} \delta(\sigma_k - \sigma'_k), \tag{4}$$

что удовлетворяет условию стационарности, получим

$$\psi_{\sigma R} = \frac{-4\pi B_F^4 k^2}{r} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k k \,\mathrm{ch}\, \sigma'_k} \sin(r\varepsilon_k k \,\mathrm{sh}\, \sigma'_k) = \frac{-4\pi B_F^4 k^2}{r} \mathrm{e}^{ik'^0 t} \sin(r r'_k) =$$

$$= \frac{-4\pi B_F^4 k^2}{r} \mathrm{e}^{i\omega t} \sin(r|\mathbf{k}|), \tag{5}$$

что (как и должно быть по смыслу решения) совпадает с (1). При этом

$$C = k^2/|\mathbf{k}|. \tag{6}$$

Обратим внимание, что в точке $r = 0$ значение функции конечно, то есть никакой сингулярности нет.

5. Стационарные центрально не симметричные волны. В случае, если функция $S_{\varphi\vartheta}$ центрально не симметрична, то есть в данном случае непостоянна, то её удобно разложить по сферическим гармоникам [Корн, с. 324]. Если плоскую волну, входящую в интеграл Фурье разложить по собственным функциям оператора углового момента [Ландау 3, с. 144], то вычисление обратного преобразования Фурье производится достаточно просто.

§2. Роль лагранжева формализма для единого поля.

1. Условно стационарные волны. Покажем, что волновое уравнение единого космического поля

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -k^2 u \tag{1}$$

имеет решения вида (**прямая сопутная волна**)

$$u = \varphi = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{ik^\mu x_\mu} = \mathrm{e}^{i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i\varkappa r} = u_t(t)\,u_r(r), \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^\mu k_\mu = k^2. \tag{2}$$

Действительно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\mathrm{e}^{i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i\varkappa r} = -\omega^2 u,$$

в сферических координатах

$$\Delta u_r(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{i\varkappa}{r}\right)\mathrm{e}^{i\varkappa r}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}((-1+i\varkappa r)\mathrm{e}^{i\varkappa r}) = \frac{1}{r^2}\left(i\varkappa\mathrm{e}^{i\varkappa r} - (1-i\varkappa r)i\varkappa\mathrm{e}^{i\varkappa r}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-r\varkappa^2\mathrm{e}^{i\varkappa r}\right) = -\varkappa^2 u_r,$$

тогда

$$\Delta u = -\varkappa^2 u.$$

Подставляя найденные производные в (1), получаем

$$-\omega^2 u + \varkappa^2 u = -k^2 u,$$

следовательно имеем решение (2) при

$$k^2 = \omega^2 - \varkappa^2. \tag{3}$$

Отсюда k^2 можно рассматривать как скалярный квадрат волнового времениподобного (вообще говоря, комплексного) 4-векторного центрального поля

$$k^\mu = (k^0, \mathbf{k}) = (\omega, \varkappa\mathbf{e}_r) = \mathrm{Re}\,k^\mu + i\mathrm{Im}\,k^\mu, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_r$ – единичный радиальный 3-вектор. Это поле определено в сопутствующей системе координат, поэтому параметры $\omega, \varkappa$, являются параметрами, характеризующими данную сопутную волну при $k = \pm\sqrt{N}$.

Заметим, что параметры $\varkappa, \omega$ могут быть как вещественными так и комплексными в пределах, допускаемых условием (3). При этом **комплексный волновой 4-вектор** $k^\mu = (\omega, \varkappa\mathbf{e}_r)$ удобно рассматривать как сумму вещественного волнового 4-вектора $(\mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Re}\,\varkappa\mathbf{e}_r)$, характеризующего синусоидальные колебания

сопутной волны вдоль этого 4-вектора и мнимого волнового 4-вектора $i(\operatorname{Im}\omega, \operatorname{Im}\varkappa\mathbf{e}_r)$, характеризующего экспоненциальное изменение волны во времени и в радиальном направлении. Для краткости, обозначения вещественной и мнимой частей параметров $\omega, \varkappa$ примем в виде

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \quad \varkappa = \varkappa_R + i\varkappa_I, \quad k^\mu = k^\mu_R + ik^\mu_I, \tag{5}$$

где $\omega_R, \omega_I, \varkappa_R, \varkappa_I, k^\mu_R, k^\mu_I$ – вещественны. Так как

$$k^\mu k_\mu = k^2 = k^{02} - \mathbf{k}^2 = \omega^2 - \varkappa^2 = (\omega_R + i\omega_I)^2 - (\varkappa_R + i\varkappa_I)^2 =$$

$$= \omega_R^2 - \varkappa_R^2 - \omega_I^2 + \varkappa_I^2 + 2i(\omega_R \cdot \omega_I - \varkappa_R \cdot \varkappa_I) = k^2, \tag{6}$$

то для вещественности и положительности k^2 необходимы условия

$$\begin{cases} k^2 = (\omega_R^2 - \varkappa_R^2) - (\omega_I^2 - \varkappa_I^2) > 0 \\ \omega_R \cdot \omega_I - \varkappa_R \cdot \varkappa_I = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Эти условия выполнимы, так как число неизвестных превышает число уравнений, оставляя ещё **две степени свободы для** $\omega, \varkappa$.

Выражение (7) наводит на мысль, что скаляр k можно интерпретировать как модуль вещественного волнового 4-вектора с координатами $(\sqrt{\omega_R^2 - \varkappa_R^2}, \sqrt{\omega_I^2 - \varkappa_I^2})$, однако это выражение не обязано преобразовываться как вещественный 4-вектор.

Решение (2) имеет особую точку $r = 0$, которая для всевозможных моментов времени образует прямую мировую линию в пространстве-времени, то есть – **особую гиперпрямую**. Это решение принципиально отличается от рассмотренных выше стационарных решений тем, что его спектр не лежит на одной сфере $k^0 = \omega$ спектрального пространства, а (как мы ниже покажем) распространяется на всю гиперсферу $k^\mu k_\mu = \text{const}$, в частности – на весь носитель космического спектра. Поэтому такие решения мы будем называть **условно-стационарными сопутными волнами**, так как они не вполне стационарны в силу обобщения вещественного волнового 4-вектора k^μ на комплексные значения при условии сохранения его квадрата модуля. Условно-стационарные сопутные волны приобретают дополнительные степени свободы, позволяющие мировым линиям особенностей этих волн иметь некоторую кривизну, что мы ниже продемонстрируем с помощью **обобщённых сопутных волн**.

Условно-стационарные сопутные волны можно записать в мгновенно сопутствующей системе в следующем общем виде

$$\varphi = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)}, \tag{8}$$

где необходимы условия (5),(7),

A – комплексная константа (вообще говоря, константа в космологическом смысле).

Заметим, что используя первое условие (7), можно получить:

$$k^\mu k^*_\mu = (\omega_R + i\omega_I, \varkappa_R + i\varkappa_I)(\omega_R - i\omega_I, \varkappa_R - i\varkappa_I) =$$

$$= \omega_R^2 + \omega_I^2 - (\varkappa_R^2 + \varkappa_I^2) = (\omega_R^2 - \varkappa_R^2) + (\omega_I^2 - \varkappa_I^2) = k^2 + 2(\omega_I^2 - \varkappa_I^2). \qquad (9)$$

2. Нестационарные особенности единого поля. Как мы ниже покажем, условно стационарное решение можно представить как суперпозицию последовательности специальных нестационарных решений, которые мы называем **транскосмическими волнами**. Параметр этой последовательности является точкой особой гиперпрямой. При этом условно стационарное решение является лишь частным случаем аналогичных (уже не стационарных) решений с параметром на гладкой гиперкривой. То есть **особенности единого поля могут двигаться криволинейно**.

3. О связи параметров сопутной волны. Пусть в системе уравнений (1.7) заданы значения $k, \omega_R, \varkappa_R$. Тогда из второго уравнения системы находим величину

$$\varkappa_I = \frac{\omega_R}{\varkappa_R}\omega_I, \qquad (1)$$

подставляя которую в первое уравнение, получим

$$\omega_R^2 - \omega_I^2 - \varkappa_R^2 + \omega_R^2\omega_I^2/\varkappa_R^2 = k^2$$

или

$$\omega_R^2\varkappa_R^2 - \omega_I^2\varkappa_R^2 - \varkappa_R^4 + \omega_R^2\omega_I^2 = k^2\varkappa_R^2,$$

откуда

$$\omega_I^2 = \frac{k^2\varkappa_R^2 - \omega_R^2\varkappa_R^2 + \varkappa_R^4}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} = \varkappa_R^2\left(\frac{k^2}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} - 1\right)$$

или

$$\omega_I = \pm\varkappa_R\sqrt{\frac{k^2}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} - 1}. \qquad (2)$$

Подставляя это выражение в (1), имеем

$$\varkappa_I = \pm\omega_R\sqrt{\frac{k^2}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} - 1}. \qquad (3)$$

Так как величины $\omega_I, \varkappa_I$ определены как вещесивенные, то необходимо

$$\omega_R^2 - \varkappa_R^2 \leqslant k^2. \qquad (4)$$

Для обеспечения локальности в 3-пространстве и почти стационарности во времени необходимо принять

$$\varkappa_I > 0, \quad \omega_I \to +0, \qquad (5)$$

то есть ω_I очень мало и положительно. Тогда формулы (2),(3) надо записать в виде

$$\omega_I = |\varkappa_R|\sqrt{\frac{k^2}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} - 1}, \tag{6}$$

$$\varkappa_I = |\omega_R|\sqrt{\frac{k^2}{\omega_R^2 - \varkappa_R^2} - 1}. \tag{7}$$

5. Замыкание дифференциальных уравнений, допускающих особенности. С математической точки зрения особые точки полей требуют особого рассмотрения. Часто эти точки рассматриваются как инородные (**заданные**) по отношению к полю, например, как источники поля или как граничные условия. В случае единого поля, которое полностью определяется космическим спектром как самодостаточное поле, любые его особенности должны принадлежать самому полю. Волновое уравнение КГФ вполне описывает поле вне заданных особых точек, но неприменимо (незамкнуто) на его особенностях. Примером замкнутого описания полей вместе с его особыми (материальными) точками является **лагранжев формализм** классической механики, который мы ниже рассмотрим. Этот формализм, являясь по-существу разделом математики, позволяет **математическим понятиям** придать **механический смысл**. Применение этого формализма к единому полю, как мы ниже продемонстрируем, позволяет замкнуто записать в совместной лагранжевой форме (с помощью особой функции – лагранжиана) как дифференциальное волновое уравнение единого поля, так и дифференциальное уравнение движения особенностей этого поля. При этом движение особенностей, вообще говоря, не прямолинейно.

§3. Глобальные компоненты единого поля.

1. Компоненты космического спектра. Космический спектр Σ можно представить в виде суммы двух его частей (компонент, составляющих), одна из которых $(+)$частотная ($(+)$**космический спектр** S_+), а другая – $(-)$частотная ($(-)$**космический спектр** S_-):

$$\Sigma = S_+ + S_-. \tag{1}$$

Кроме того космический спектр можно представить суммой двух других частей, одна из которых является **регулярной** компонентой (то есть усреднением $\tilde{\Sigma}$) спектра по его носителю (3.2.3.8), а другая является **нерегулярной** компонентой $\ddot{\Sigma}$, то есть оставшейся частью спектра:

$$\Sigma = \tilde{\Sigma} + \ddot{\Sigma}. \tag{2}$$

Аналогичное разложение на регулярную и нерегулярную компоненты можно сделать и для каждой из $(\pm)$частотных компонент:

$$S_+ = \tilde{S}_+ + \ddot{S}_+, \quad S_- = \tilde{S}_- + \ddot{S}_-. \tag{3}$$

Тогда

$$\Sigma = \tilde{S}_+ + \tilde{S}_- + \ddot{S}_+ + \ddot{S}_-. \tag{4}$$

Заметим, что регулярные спектры $S_+, S_-, \tilde{S}_+, \tilde{S}_-$ **определены положительно**, в отличие от нерегулярных спектров $\ddot{S}_+, \ddot{S}_-$. Согласно (3.2.3.8)

$$\tilde{S} = \frac{1}{2k^2}\delta(T_k \mp k), \tag{5}$$

тогда

$$\tilde{S}_+ = \tilde{S}\Big|_{\varepsilon_k=1} = \frac{1}{2k^2}\vartheta(\sigma_k)\ \delta(T_k - k), \tag{6}$$

$$\tilde{S}_- = \tilde{S}\Big|_{\varepsilon_k=-1} = \frac{1}{2k^2}\vartheta(-\sigma_k)\ \delta(T_k + k), \tag{7}$$

где

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

– **функция Хевисайда**,

2. Номенклатура компонент космического спектра и соответствующих полей. Подитожим список названий и обозначений компонент космического спектра и соответствующих полей:

Σ – **единыйй спектр**,
U – **единое поле**,
$\tilde{\Sigma}$ – **регулярный единый спектр**,
$\tilde{U}$ – **регулярное единое поле**,
$\ddot{\Sigma}$ – **нерегулярный единый спектр**,
$\ddot{U}$ – **нерегулярное единое поле**,
S_+ – **(+)космический спектр**,
u_+ – **(+)космическое поле**,
S_- – **(−)космический спектр**,
u_- – **(−)космическое поле**,
$\tilde{S}_+$ – **регулярный (+)космический спектр**,
$\tilde{u}_+$ – **регулярное (+)космическое поле, (+)космическая волна**,
$\tilde{S}_-$ – **регулярный (−)космический спектр**,
$\tilde{u}_-$ – **регулярное (−)космическое поле, (−)космическая волна**,
$\ddot{S}_+$ – **нерегулярный (+)космический спектр**,
$\ddot{u}_+$ – **нерегулярное (+)космическое поле**,
$\ddot{S}_-$ – **нерегулярный (−)космический спектр**,

$\ddot{u}_-$ – **нерегулярное (–)космическое поле**.
Эти спектры и поля связаны друг с другом соотношениями:

$$\Sigma = S_+ + S_-, \quad \Sigma = \tilde{\Sigma} + \ddot{\Sigma}, \quad S_+ = \tilde{S}_+ + \ddot{S}_+, \quad S_- = \tilde{S}_- + \ddot{S}_-, \tag{1}$$

$$U = u_+ + u_-, \quad U = \tilde{U} + \ddot{U}, \quad u_+ = \tilde{u}_+ + \ddot{u}_+, \quad u_- = \tilde{u}_- + \ddot{u}_-. \tag{2}$$

Индексы $+,-$ имеют смысл **знака частоты**. Их можно опускать, если подразумевается любой из них.

3. (+)**Космическая волна.** Рассмотрим регулярный (+)космический спектр (1.6)

$$\tilde{S}_+ = \tilde{S}_{+\sigma S}(\sigma_k,\ T_k) = \frac{1}{2k^2}\vartheta(\sigma_k)\ \delta(T_k - k), \quad \varepsilon_k = +1, \tag{1}$$

где

$$0 \leqslant T_k < \infty, \quad k > 0. \tag{2}$$

Найдём соответствующее координатное представление (5.3.2.14) ((+)**космическую волну**):

$$\tilde{u}_+(r,t) = \frac{-2\pi B_F^4}{k^2 r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0 \varepsilon_k T_k \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\varepsilon_k T_k \mathrm{sh}\,\sigma_k) \times$$

$$\times \vartheta(\sigma_k)\delta(T_k - k) T_k^2 \mathrm{sh}\,\sigma_k\ dT_k\ d\sigma_k.$$

Интегрируя по T_k, получаем

$$\tilde{u}_+(r,t) = \frac{-2\pi B_F^4}{r} J_1, \tag{3}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{it\varepsilon_k k\ \mathrm{ch}\,\sigma_k} \sin(r\varepsilon_k k\ \mathrm{sh}\sigma_k)\mathrm{sh}\,\sigma_k\ d\sigma_k, \tag{4}$$

$$t = x^0.$$

Сделаем замену

$$\varepsilon_k\,\mathrm{sh}\,\sigma_k = y, \quad \varepsilon_k\,\mathrm{ch}\,\sigma_k\ d\sigma_k = dy, \quad \mathrm{ch}\,\sigma_k = \sqrt{y^2+1}, \quad d\sigma_k = \frac{dy}{\varepsilon_k\sqrt{y^2+1}},$$

$$y_{|_{\sigma_k=0}} = 0, \quad y_{|_{\sigma_k=\infty}} = \varepsilon_k \infty. \tag{5}$$

Тогда при $\varepsilon_k = 1$

$$J_1 = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{itk\sqrt{y^2+1}} \sin(rky) \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy, \quad k > 0. \tag{6}$$

Используя таблицы интегралов [Прудников, 2.5.39.3, с.456; $b = rk > 0$, $p = -itk$, $\mathrm{Re}\, p \to +0$, $\mathrm{Re}\, z = 1 > 0$, $\mathrm{Re}\, \alpha = 2 > -1$, $n = 1$], получим

$$J_1 = \frac{rk}{\sqrt{-t^2k^2 + r^2k^2}} K_1(\sqrt{-t^2k^2 + r^2k^2}) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}} K_1(k\sqrt{r^2 - t^2}) =$$

[Корн, (21.8-32)],[Никифоров, с. 306]

$$= \frac{-\pi r}{2\sqrt{r^2 - t^2}} H_1^{(1)}(ik\sqrt{r^2 - t^2}), \quad k > 0. \tag{7}$$

Здесь $H_1^{(1)}(z)$ - функция Ганкеля 1-го рода, первого порядка,

$K_1(z)$ - функция Макдональда (модифицированная функция Ганкеля).

Таким образом

$$\tilde{u}_+(r,t) = \frac{-2\pi B_F^4}{\sqrt{r^2 - t^2}} K_1(k\sqrt{r^2 - t^2}), \quad k > 0. \tag{8}$$

4. $(-)$**Космическая волна.** Аналогично для регулярного $(-)$космического спектра:

$$\tilde{S}_- = \tilde{S}_{-\sigma S}(\sigma, T_k) = \frac{1}{2k^2}\vartheta(-\sigma_k)\ \delta(T_k + k), \quad \varepsilon_k = -1, \quad k < 0, \tag{1}$$

имеем координатное представление ($(-)$**космическую волну**):

$$\tilde{u}_-(r,t) = \frac{-2\pi B_F^4}{k^2 r} \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{ix^0\varepsilon_k T_k \mathrm{ch}\, \sigma_k} \sin(rT_k \mathrm{sh}\, \sigma_k) \times$$

$$\times \delta(T_k + k) T_k^2 \mathrm{sh}\, \sigma_k\ dT_k\ d\sigma_k = \frac{-2\pi B_F^4}{r} J_2, \tag{2}$$

где (см. предыдущий пункт)

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{it\varepsilon_k k\ \mathrm{ch}\, \sigma_k} \sin(r\varepsilon_k k\ \mathrm{sh}\sigma_k) \mathrm{sh}\, \sigma_k\ d\sigma_k, \quad k < 0. \tag{3}$$

Производя замену (2.5) предыдущего пункта, учитывая, что $y_{|\sigma_k = -\infty} = -\varepsilon_k \infty = \infty$, имеем, при $\varepsilon_k = -1$

$$J_2 = -\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-itk\sqrt{y^2+1}} \sin(rky)(-y) \frac{dy}{-\sqrt{y^2+1}} =$$

$$= +\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-itk\sqrt{y^2+1}} \sin(-rky) \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy, \quad k < 0.$$

Используя таблицы интегралов [Прудников, 2.5.39.3, с.456; $b = -rk > 0$, $p = itk$, $\mathrm{Re}\, p \to +0$, $\mathrm{Re}\, z = 1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha = 2 > -1$, $n = 1$], получим

$$J_2 = \frac{-rk}{\sqrt{-t^2k^2 + r^2k^2}} K_1(\sqrt{-t^2k^2 + r^2k^2}) = -J_1, \quad k < 0 \tag{4}$$

(см. предыдущий пункт).

Тогда имеем

$$\tilde{u}_- = \frac{2\pi B_F^4}{\sqrt{r^2 - t^2}} K_1(k\sqrt{r^2 - t^2}), \quad k < 0. \tag{5}$$

5. Разрешение неоднозначности космических волн. Таким образом функции $\tilde{u}_+$ и $\tilde{u}_-$, на первый взгляд, отличаются только знаком. Но тогда их сумма была бы равна нулю, что противоречит (по теореме Парсеваля) сумме их спектров $\tilde{S}_+, \tilde{S}_-$, которая не равна нулю, в силу разных носителей этих спектров. Противоречие разрешается если принять во внимание неоднозначность функций $\tilde{u}_+, \tilde{u}_-$, вызванную двузначностью константы

$$k = \pm\sqrt{N} = \pm|k| \tag{1}$$

и независимостью друг от друга частей этих функций, принадлежащих трём разным полостям

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ t^2 \leqslant r^2, \\ 2)\ t^2 > r^2,\ t > 0 \\ 3)\ t^2 > r^2,\ t < 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

изотропного конуса Вселенной.

В полости $t^2 \leqslant r^2$ выберем

$$k < 0,\ t^2 \leqslant r^2. \tag{3}$$

Тогда функция $K_1(k\sqrt{r^2 - t^2})$, согласно её асимптотическому представлению

$$K_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}, \quad z \to +\infty, \tag{4}$$

экспоненциально убывает, поэтому космическое поле существенно лишь при $t^2 > r^2$, то есть внутри Вселенной. Тогда, имея в виду только Вселенную, выберем согласно (3.2.3.8),(1.2.3)

$$\left\{\begin{array}{l} k > 0,\ t > 0,\ t^2 > r^2 \\ k < 0,\ t < 0,\ t^2 > r^2 \end{array}\right., \quad k = \varepsilon_k |k|. \tag{5}$$

Таким образом инверсии оси времени основной системы координат соответствует инверсия знака постоянной k. Если при этом не изменялось направление пространственных осей то **правая** система координат превращается в **левую** и наоборот.

Ясно, что инверсия пространственных осей без инверсии оси времени тоже изменяет знак k. Тогда инверсия всех 4-х осей не изменяет знака k, но заменяет

$\tilde{u}_+$ на $\tilde{u}_-$ и наоборот. Поэтому для определённости следует связать $\tilde{u}_+$ или $\tilde{u}_-$ с какой-то одной (правой или левой) пространственной системой координат при определённом знаке k. Выберем для $\tilde{u}_+$ в правой системе пространственных координат положительный знак k, то есть полость $t > 0$ изотропного конуса. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 \text{ для } \tilde{u}_+ \\ k < 0 \text{ для } \tilde{u}_- \end{array} \right. \quad \text{в правой системе.} \tag{6}$$

С учётом принятых соглашений (5),(6), можно просто писать

$$\tilde{u}_\pm = \frac{\mp 2\pi B_F^4}{\sqrt{r^2 - t^2}} K_1(k\sqrt{r^2 - t^2}) = \frac{\pm i 2\pi B_F^4}{\sqrt{t^2 - r^2}} K_1(ik\sqrt{t^2 - r^2}) =$$

$$= \frac{\pm i 2\pi B_F^4}{T} K_1(ikT), \; \left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ k < 0 \end{array} \right\}. \tag{7}$$

А с учётом формулы [Корн, (21.8-32)],[Никифоров, с.306]

$$K_m(z) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(iz) =_{|m=1} \; -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(iz), \tag{8}$$

получим

$$\tilde{u}_\pm = \tilde{u}_{\varepsilon_k} = \frac{\mp i\pi^2 B_F^4}{T} H_1^{(1)}(-kT), \; \left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ k < 0 \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Регулярное космическое поле

$$\tilde{U} = \tilde{u}_+ + \tilde{u}_- \tag{10}$$

будем называть также **единой космической** или **глобальной волной**.

6. Другие полезные выражения для космических волн. Согласно [Корн, (21.8-7)]

$$\left. \begin{array}{l} H_m^{(1)}(\mathrm{e}^{i\pi} z) = -\mathrm{e}^{-im\pi} H_m^{(2)}(z) = -H_{-m}^{(2)}(z) \\ H_m^{(2)}(\mathrm{e}^{-i\pi} z) = -\mathrm{e}^{im\pi} H_m^{(1)}(z) = -H_{-m}^{(1)}(z) \end{array} \right\}, \tag{1}$$

где $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$ – функции Ганкеля первого и второго рода,

в частности

$$H_1^{(1)}(-z) = H_1^{(2)}(z). \tag{2}$$

Эту же связь легко получить из интегрального представления Пуассона функций Ганкеля [Никифоров, с.303]:

$$H_\nu^{\binom{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\mathrm{e}^{\pm i(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad \mathrm{Re}\,\nu > \frac{-1}{2}. \tag{3}$$

Отсюда, деля $H_1^{(1)}(-z)$ на $H_1^{(2)}(z)$, получаем (2)

$$\frac{H_1^{(1)}(-z)}{H_1^{(2)}(z)} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\mathrm{e}^{-i(z+3\pi/4)}}{\mathrm{e}^{-i(z-3\pi/4)}} = -i\mathrm{e}^{-i3\pi/2} = \sin(-3\pi/2) = 1. \tag{4}$$

Функции Ганкеля вещественного аргумента комплексны, но их сумма и разность соответственно вещественная и чисто мнимая [Никифоров, с.304]:

$$H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z) = 2J_\nu(z), \quad H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z) = 2iY_\nu(z), \tag{5}$$

где $J(z), Y(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода.

Тогда ($\pm$)космические волны можно записать в виде

$$\tilde{u}_\pm = \frac{\mp i\pi^2 B_F^4}{T} H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|T), \tag{6}$$

а единая космическая волна оказывается вещественной

$$\tilde{U} = \tilde{u}_+ + \tilde{u}_- = \frac{i\pi^2 B_F^4}{T}(-H_1^{(2)}(|k|T) + H_1^{(1)}(|k|T)) = \frac{-2\pi^2 B_F^4}{T} Y_1(|k|T). \tag{7}$$

Заметим, что вид постоянного комплексного коэффициента $-2\pi^2 B_F^4$ определяется постоянным коэффициентом в определении плотности космического спектра (коэффициентом обратного преобразования Фурье). Этот коэффициент вполне мог бы иметь другой вид, изменяя лишь единицы измерения. Но будучи выбранным, он уже не должен изменяться в ходе развития теории.

7. Некоторые свойства космических волн. При больших $t^2 - r^2$, используя асимптотическое представление функции $H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(z)$ [Никифоров, с. 304]:

$$H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \mathrm{e}^{\mp i(z - 3\pi/4)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad z \to +\infty, \tag{2}$$

можно записать

$$\tilde{u}_\pm = \frac{\mp i\pi^2 B_F^4}{\sqrt{t^2 - r^2}} H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|\sqrt{t^2 - r^2}) = \Big|_{|t^2 - r^2| \to +\infty}$$

$$= \frac{\mp i\pi^2 B_F^4}{\sqrt{t^2 - r^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi |k| \sqrt{t^2 - r^2}}} \mathrm{e}^{\mp i(|k|\sqrt{t^2 - r^2} - 3\pi/4)}$$

или

$$\tilde{u}_\pm = \frac{-2\pi^2 B_F^4}{\sqrt{2\pi |k|}\ (t^2 - r^2)^{3/4}} \mathrm{e}^{\mp i|k|\sqrt{t^2 - r^2}}, \ |t^2 - r^2| \to +\infty. \tag{3}$$

То есть вне Вселенной эти поля экспоненциально быстро затухают, а внутри неё, при большом возрасте

$$T = \sqrt{t^2 - r^2} \tag{4}$$

Вселенной, являются **локально плоскими космическими волнами**:

$$\tilde{u}_\pm = \frac{-2\pi^2 B_F^4}{\sqrt{2\pi |k|}\ T^{3/2}} \mathrm{e}^{\mp i|k|\sqrt{t^2 - r^2}}, \ |t^2 - r^2| \to +\infty,$$

что, учитывая (5.6) и (4), можно переписать в виде

$$\tilde{u}_{\pm} = \frac{-2\pi^2 B_F^4}{\sqrt{2\pi|k|}\ T^{3/2}} \mathrm{e}^{-ikT},\ T \to +\infty. \tag{5}$$

В малой окрестности точки t_0: $(\Delta t = t - t_0)$

$$\sqrt{t^2 - r^2} \approx \sqrt{t_0^2 - r^2} + \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 - r^2}} \Delta t \tag{6}$$

и тогда

$$\tilde{u}_{\pm} \approx \frac{-2\pi^2 B_F^4}{\sqrt{2\pi|k|}(t_0^2 - r^2)^{3/4}} \mathrm{e}^{\mp i|k|\sqrt{t_0^2 - r^2}} \mathrm{e}^{\frac{-i|k|t_0}{\sqrt{t_0^2-r^2}}(t-t_0)}. \tag{7}$$

Дадим для функции $\tilde{u}_{\pm}$ ещё одно полезное выражение. Воспользуемся соотношением

$$\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z) \quad [\text{Прудников 2, с. 730}]. \tag{8}$$

Получим

$$K_1(k\sqrt{r^2 - t^2}) = -\frac{d}{d(k\sqrt{r^2 - t^2})} K_0(k\sqrt{r^2 - t^2}) =$$

$$= \frac{-\sqrt{r^2 - t^2}}{kr} \frac{d}{dr} K_0(k\sqrt{r^2 - t^2}).$$

Тогда

$$\tilde{u}_{\pm} = \frac{\pm 2\pi B_F^4}{kr} \frac{d}{dr} K_0(k\sqrt{r^2 - t^2}) = \frac{\pm 2\pi B_F^4}{kr} \frac{d}{dr} K_0(ik\sqrt{t^2 - r^2}). \tag{9}$$

Эта формула ниже нам пригодится.

8. Комплексность нерегулярного космического поля.
Обратим внимание, что в силу отсутствия поточечной симметрии положительно- и отрицательно-частотных частей космического спектра, координатное представление нерегулярного спектра $\ddot{\Sigma} = \ddot{S}_+ + \ddot{S}_-$ **не равно нулю и комплексно**:

$$\ddot{U} = \ddot{u}_+ + \ddot{u}_- \neq 0, \tag{1}$$

в то время как $\tilde{u}_+ + \tilde{u}_- = \tilde{U}$ вещественно. Поле $\ddot{U}$ **флуктуирует**, то есть шумоподобно (**шумовая компонента единого поля**).

9. Транс-космические волны. Линейные комбинации функций $\tilde{u}_+$, $\tilde{u}_-$, как и их спектры, не изменяются при преобразованиях Лоренца, то есть Лоренц-инвариантны и имеют **вершины** в Начале. Для их сдвига в произвольную точку, плотность их спектра нужно умножить на подходящую комплексную плоскую волну (6.4.1.1). Такие сдвинутые функции будем называть **транс-космическими волнами** или короче – **транс-волнами**.

Гиперповерхность $r^2 = t^2$ образует **изотропный конус транс-волны**, имеющей **вершину** в точке $r = t = 0$. В частном случае космической волны этот изотропный конус совпадает с изотропным конусом Начала Вселенной.

10. Космические волны как решения уравнения КГФ.
Представляя в уравнении КГФ оператор Даламбера в гиперсферических координатах и сохраняя только ту его часть, которая зависит от гиперрадиуса R, получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{3}{R}\,\frac{du}{dR} \pm k^2 u = 0, \tag{1}$$

решения которого зависят только от R. Это уравнение является частным случаем уравнения Бесселя (в частности Ломмеля), решения которого [Никифоров, с.303] имеют вид

$$u(R) = \frac{1}{R}\,Z_1(\pm\sqrt{\pm k^2}\,R), \tag{2}$$

где Z_1 – цилиндрическая функция.
Именно в таком общем виде представимы космические волны, так как они соответствуют регулярному космическому спектру, зависящему только от R.

§4. Синтетический подход к сопутным волнам.

1. Обобщённая сопутная волна. Путевая функция. Путь.
Вещественную (с вещественными коэффициентами) суперпозицию непрерывной последовательности транс-волн $\tilde{u}(x^\mu - x_l^\mu)$, вершины которых принадлежат непрерывной времениподобной мировой линии l будем называть **обобщённой сопутной волной**. Таким образом, коэффициенты этой суперпозиции являются функцией длины l этой линии

$$f = f(l).$$

Эту вещественную функцию будем называть **путевой функцией** обобщённой сопутной волны, а саму эту линию – **путём** обобщённой сопутной волны.

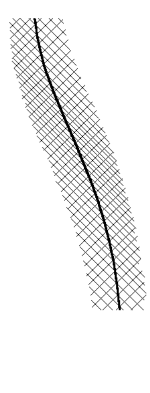


Рис. 106.2.

Таким образом, согласно определению, обобщённую сопутную волну можно выразить криволинейным интегралом

$$\varphi = \int\limits_C f(l)\ \tilde{u}(x^\mu - x_l^\mu)\, dl, \tag{1}$$

где $x_l^\mu = x_l^\mu(l)$ – точка, принадлежащая l.

Очевидно, что обобщённая сопутная волна, путь которой является кривой линией, нестационарна.

2. Прямые обобщённые сопутные волны. Если путь обобщённой сопутной волны является прямой линией, то её будем называть **прямой обобщённой сопутной волной**.

Совмещая ось времени системы отсчёта с путём прямой обобщённой сопутной волны, имеем для неё, используя (3.7.9):

$$\varphi_\pm = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \tilde{u}_\pm(t-\tau)\ d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\ \tilde{u}_\pm(\tau)\ d\tau =$$

$$= \frac{\pm 2\pi B_F^4}{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} K_0(ik\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})\ d\tau. \tag{1}$$

Путевую функцию $f(\tau)$ представим одномерным разложением Фурье в **спектр** вида (5.2.4.8)

$$f(\tau) = B_F \int\limits_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega\tau + B(\omega)\sin\omega\tau]\ d\omega, \tag{2}$$

где

$$A(\omega) = A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau, \quad A_F = 1, \tag{3}$$

$$B(\omega) = -A_F \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\ d\tau. \tag{4}$$

Тогда

$$\varphi_\pm = \frac{\pm 2\pi B_F^4}{kr}\frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{\infty} [A(\omega)\ J_1 + B(\omega)\ J_2]\ d\omega, \tag{5}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\omega\tau\ K_0(ik\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})\ d\tau =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\omega\tau\ K_0((ik+\alpha)\sqrt{(\tau-t)^2+(\varepsilon ir+\alpha)^2})\ d\tau,$$

где $\varepsilon = \pm 1$ введён для общности,

α позволяет использовать табличный интеграл.

Используя [Прудников 2, 2.16.17.1, с. 363] при $\omega > 0$, $t > 0$, $\mathrm{Re}(ik+\alpha) \to +0$, $\mathrm{Re}(\varepsilon ir+\alpha) \to +0$, получим

$$J_1 = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2+(ik+\alpha)^2}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon ir+\alpha)\sqrt{\omega^2+(ik+\alpha)^2}} \cos\omega t =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2-k^2}} \mathrm{e}^{-\varepsilon ir\sqrt{\omega^2-k^2}} \cos\omega t. \tag{6}$$

Аналогично [Прудников 2, 2.16.17.1, с. 363]

$$J_2 = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\omega\tau\ K_0((ik+\alpha)\sqrt{(\tau-t)^2+(\varepsilon ir+\alpha)^2})\ d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2-k^2}} \mathrm{e}^{-\varepsilon ir\sqrt{\omega^2-k^2}} \sin\omega t. \tag{7}$$

Таким образом

$$\varphi_\pm = \frac{\pm 2\pi^2 B_F^4}{kr\sqrt{\omega^2-k^2}} \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon ir\sqrt{\omega^2-k^2}} (A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t)\ d\omega$$

или

$$\varphi_\pm = \frac{\mp 2\pi^2 i\varepsilon B_F^4}{kr} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon ir\sqrt{\omega^2-k^2}} (A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t)\ d\omega. \tag{8}$$

3. Прямая монохроматическая обобщённая сопутная волна. В частности для путевой функции, не зависящей по модулю от знака частоты, с определённой частотой ω_0, спектральные коэффициенты имеют вид

$$A(\omega) = A(\omega_0)\,\delta(\omega-\omega_0), \quad B(\omega) = 0. \tag{1}$$

При этом

$$\varphi_\pm = \frac{\mp 2\pi^2 B_F^4 \varepsilon i A(\omega)}{kr} \mathrm{e}^{-i\varepsilon r\sqrt{\omega_0^2-k^2}} \cos(\omega_0 t). \tag{2}$$

Учитывая неопределённость комплексного коэффициента $A(\omega_0)$, имеем в общем виде

$$\varphi_\pm = \frac{2A}{r} \cos(\omega_0 t) \mathrm{e}^{-i\varepsilon r\sqrt{\omega_0^2-k^2}}. \tag{3}$$

Функцию $e^{-i\varepsilon r\sqrt{\omega_0^2-k^2}}$ при больших r можно рассматривать как почти плоскую волну с волновым вектором $-\varepsilon\sqrt{\omega_0^2-k^2}$, направленным по $\vec{r}$ или против него (в зависимости от ε). Ясно, что это направление изменяется при инверсии знаков трёх пространственных координат или (что эквивалентно) – временно́й координаты. Изменение индекса $\pm$ у функции $\varphi_\pm$ означает изменение знака частоты космической волны, что также эквивалентно инверсии временно́й координаты. Поэтому знаки $\pm$ и ε для одной и той же сопутной волны связаны, но, вообще говоря, по-разному. Тогда получим волну, которую назовём **полной сопутной волной**:

$$\varphi_\pm = \frac{2A}{r}\cos(\omega_0 t)e^{\pm ir\sqrt{\omega_0^2-k^2}} = \frac{2A}{r}\cos(\omega_0 t)e^{i\varkappa r}. \tag{4}$$

Таким образом, определённая ранее сопутная волна (2.1.8), является одной из двух экспоненциальных компонент полной сопутной волны при подходящем выборе A и при

$$\omega = \omega_0, \quad \varkappa = \pm\sqrt{\omega_0^2 - k^2}, \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^2. \tag{5}$$

Важно заметить, что полная сопутная волна, являясь суперпозицией транс-волн, является решением того же уравнения КГФ, что и сопутная волна (2.1.8).

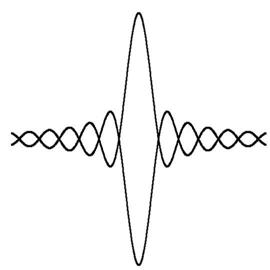
4. Непрямые сопутные волны. Синтетический подход позволяет строить сопутные волны для любого пути, в том числе криволинейного и с любой путевой функцией. Этот подход демонстрирует возможность существования сопутных волн с параметрами $\omega, \varkappa$, изменяющимися вдоль путевой линии, то есть в **собственном времени сопутной волны** и возможность непрямолинейного движения особенности сопутной волны.

5. Локальность сопутных волн. Уравнение КГФ, имея непрерывный спектр собственных чисел, не имеет квадратично интегрируемых решений во всём пространстве-времени. Однако существуют решения, квадратично-интегрируемые (**финитные**) в 3-пространстве. Такими решениями как раз являются сопутные волны при параметрах, обеспечивающих их экспоненциальное затухание с ростом расстояния от особой точки. Поэтому сопутные волны могут быть использованы для функционального анализа единого поля. Как мы покажем ниже, такой анализ оказывается познавательно ценным.

⋆ ⋆ ⋆

Земля – колыбель разума, но нельзя же вечно жить в колыбели.

Циолковский К.Э.



Глава 7. 4-ТОК

Вводимое здесь для скалярных полей понятие 4-тока важно тем, что для единого поля 4-ток неразрывен (сохраняется заряд).

§1. Абстрактная среда.

1. Плотность скаляра. [Ландау 2, с. 96] Пусть q есть некоторая инвариантная величина в пространстве-времени, аддитивная в трехмерном пространстве. Это значит, что существует такая функция пространственных координат и времени $\varrho(x^0, x^i)$, называемая **плотностью величины** q, что количество dq величины q в элементе объема dv дается формулой

$$dq = \varrho\, dv. \tag{1}$$

По самому своему определению, q – величина инвариантная, то есть не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, ϱ не есть инвариант, – инвариантом является лишь произведение $\varrho\, dv$.

Умножим равенство (1) с двух сторон на dx^μ, то есть на элемент мировой линии любого семейства не пересекающихся и не имеющих разрывов мировых линий

$$dq\, dx^\mu = \varrho\, dv\, dx^\mu = \varrho\, dv\, dt \frac{dx^\mu}{dt} = d\Omega\ \varrho \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (т. к. dq есть скаляр, а dx^μ – 4-вектор). Значит и справа должен стоять 4-вектор. Но $dv\ dt = d\Omega$ есть скаляр, а потому $\varrho\, dx^\mu/dt$ есть 4-вектор. Этот 4-вектор (обозначим его через j^μ) носит название **4-вектора плотности потока величины** q.

$$j^\mu = \varrho \frac{dx^\mu}{dt} = (\varrho,\ \varrho \mathbf{v}). \tag{2}$$

Величину q называют **сохраняющейся**, а j^μ – **неразрывной**, при условии

$$\nabla_\mu j^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)(j^0, \mathbf{j}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)(j^0, -\mathbf{j}) = \frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0, \tag{3}$$

которое называется **уравнением неразрывности**.

Однокомпонентное условие (3) можно выполнить (притом неоднозначно), выбирая подходящее dx^μ. Заметим, что условие (3) содержало бы n компонент, если бы q было n-компонентной величиной. При этом оно могло бы удовлетворяться только при $n \leqslant 4$.

Три пространственные компоненты 4-вектора j^μ образуют трехмерную **плотность потока величины** q

$$\mathbf{j} = \varrho\, \mathbf{v}, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}$ есть **скорость потока величины** q в данной точке. Временная же составляющая 4-вектора j^μ есть ϱ.

Таким образом

$$j^\mu = (\varrho, \mathbf{j}). \tag{5}$$

j^μ можно представить и в другом виде:

$$j^\mu = \varrho\frac{dx^\mu}{dt} = \varrho\sqrt{1-v^2}\frac{dx^\mu}{ds} = \varrho_0 u^\mu = \varrho_0(u^0, \mathbf{u}), \tag{6}$$

где

u^μ – 4-скорость (2.5.4.2),

ϱ_0 – **плотность покоя** (инвариантная величина).

Так как $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \mathbf{j}/\varrho$, то при $\mathbf{j}^2 = \varrho^2$, $v = 1$, то есть в этом случае плотность 4-тока j^μ светоподобна.

Величина j^μ определяет некоторую **абстрактную среду**.

Понятие плотности d_3q/dv не следует путать с понятием **4-плотности** $\varrho_4 = d_4q/d\Omega$, так как в первом случае dv – трёхмерный объём, а d_3q – количество величины q в этом трёхмерном объёме. Во втором же случае $d\Omega$ – четырёхмерный объём и d_4q – количество величины q в этом 4-х-мерном объёме.

Так как

$$\frac{d_3q}{dv} = \varrho_3 = \varrho,$$

то

$$\frac{d_3q}{dv\ dt} = \frac{d_3q}{d\Omega} = \frac{\varrho}{dt} = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-v^2}dt} = \frac{\varrho_0}{ds},$$

откуда имеем инвариантное выражение

$$\frac{d_3q\ ds}{d\Omega} = \varrho_0.$$

d_4q будет инвариантом, если его определить в виде $d_4q = d_3q \cdot ds$, откуда найдём, что при этом **4-плотность совпадает с плотностью покоя**

$$\frac{d_4q}{d\Omega} = \varrho_0 = \varrho_4. \tag{7}$$

Однако, смысл определённой таким образом величины d_4q требует пояснения.

2. Другой подход к определению плотности. К понятию плотности можно подойти и с другой стороны следующим образом.

Любое непрерывное поле времениподобного 4-вектора будем называть **4-потоком** или **4-током**. Обозначим его здесь j^μ. 4-поток всегда можно представить в виде

$$j^\mu = \varrho_0 u^\mu, \tag{1}$$

где u^μ – направляющий орт 4-вектора j^μ (**4-скорость 4-потока** j^μ)

ϱ_0 – скаляр, который назовём **плотностью покоя**.

Очевидно

$$\varrho_0 = \sqrt{j^\mu j_\mu} = j^\mu u_\mu. \tag{2}$$

Запишем (1) в виде

$$j^\mu = \varrho_0 \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\varrho_0\ dv}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dx^\mu}{d\Omega}, \tag{3}$$

где dv – элемент 3-объёма, $d\Omega = dv\ dt$ – элемент 4-объёма.

Откуда видно, что величина (обозначенная как dq)

$$\frac{\varrho_0\ dv}{\sqrt{1-v^2}} = dq \tag{4}$$

является скаляром. Скалярная величина q (абстрактно будем её называть **зарядом**), может быть определена для любого 3-объёма как интеграл по этому объёму (аддитивность величины q)

$$q = \int\limits_v dq = \int\limits_v \frac{\varrho_0 dv}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{5}$$

При этом неинвариантную величину

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-v^2}} = \varrho_0 u^0, \tag{6}$$

где u^0 – временна́я компонента 4-скорости потока, будем называть **3-плотностью величины** q.

Таким образом

$$q = \int \varrho\ dv, \quad \frac{dq}{dv} = \varrho. \tag{7}$$

Скаляр ϱ_0 можно записать в виде

$$\varrho_0 = \sqrt{1-v^2}\frac{dq}{dv} = \sqrt{1-v^2}\frac{dq\ dt}{dt\ dv} = \frac{dq\ ds}{d\Omega} = \varrho_4\ ds, \tag{8}$$

где обозначено

$$\varrho_4 = \frac{dq}{d\Omega} = \frac{dq}{dv \cdot dt} \tag{9}$$

– **4-плотность величины** q. Из (8) видно, что, вообще говоря, связь между 3-плотностью и 4-плотностью требует доопределения, так как дифференциал ds произволен, хотя его можно доопределить физически как микроскопическую конечную величину (**шаг**). Если этому можно придать смысл, то 4-плотность назовём **шаговой плотностью**. Такой смысл существует.

Действительно. 4-объём – инвариант (2.5.2.4), поэтому инвариантно число событий в нём и число пар этих событий, а следовательно инвариантен средний интервал между этими событиями, так как инвариантна сумма интервалов, делённая на постоянное число пар частиц. Если события являются столкновениями частиц газа, то **средний интервал между столкновениями** является инвариантным релятивистским обобщением понятия **длины свободного пробега**, который поэтому можно назвать **интервалом свободного пробега**. Понимая ds как интервал свободного пробега, 4-плотность можно понимать как среднее число dn столкновений частиц газа в единице его 4-объёма.

Входящие в формулу (9) достаточно малые величины могут быть конечными. Если под dv понимать 3-объём dv_1, содержащий в среднем одну частицу газа, то величина ϱ_4 приобретёт смысл **вероятности столкновений** $p_1 = dn/dt$ одной (любой) частицы.

3. Концентрация. Положение точечной частицы в точке $\mathbf{x}_i$ можно однозначно определить дельта-функцией $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, которую можно рассматривать как точную **плотность распределения положения** точечной частицы. Однако положение точечной частицы можно определить более абстрактно (статистически) с помощью её **плотности вероятности местоположения** $w_i \to \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, статистически стремящейся к точному распределению. Для определения положения множества точечных частиц можно использовать сумму делта-функций $\sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, которую назовём **точной концентрацией** множества частиц. Соответствующее статистическое распределение назовём просто **концентрацией множества частиц**:

$$w = \sum_i w_i \to \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

Вероятность dp_i местоположения i-й частицы в данном элементе объёма с заданными координатами определяется плотностью вероятности w_i, умноженной на величину dv элемента объёма

$$dp_i = w_i \, dv.$$

Если элемент объёма dv достаточно мал, то вероятность попадания в него какой-нибудь точечной частицы много меньше единицы, а вероятность попадания в него сразу двух или более частиц имеет бо́льший порядок малости и её можно

игнорировать. Поэтому вероятность dp_n попадания в элемент объёма любой частицы множества является суммой вероятностей попадания в него каждой из частиц в отдельности, делённой на число частиц n в множестве

$$dp_n = \frac{1}{n}\sum_i dp_i = \frac{dv}{n}\sum_i w_i = \frac{w}{n}dv.$$

Тогда концентрация w, делённая на число число частиц n этого множества представляет собой **плотность вероятности местоположения множества точечных частиц**

$$w_n = \frac{dp_n}{dv} = \frac{w}{n}, \tag{1}$$

при этом, как и положено, она нормирована на единичную вероятность

$$p_n = \int w_n\, dv = 1. \tag{2}$$

Соответственно концентрация w нормирована на число частиц множества

$$np_n = \int w\, dv = n. \tag{3}$$

Согласно (2.7) и (1) концентрация w является плотностью величины np_n. рассматриваемого множества. Причём по определению вероятности

$$p_n = \int w_n\, dv = 1.$$

Это означает, что вероятность p_n и в месте с ней величина np_n сохраняется, а 4-плотность тока этой вероятности и вместе с ней 4-плотность тока концентрации

$$j^\mu = (w, \mathbf{j})$$

неразрывна

$$\nabla_\mu j^\mu = 0.$$

Для концентрации применимы те же понятия как и для любой плотности. В частности, концентрация покоя связана с её током j^μ формулой (2.2)

$$\varrho_0 = \sqrt{j^\mu j_\mu} = j^\mu u_\mu = \varrho/u^0. \tag{4}$$

В случае множества точек в 4-пространстве-времени, это множество можно разбить на упорядоченные во времени множества, лежащие на времениподобных мировых линиях. На этих линиях можно ввести понятие линейной плотности (линейной концентрации) точек

$$\varrho_1 = \frac{dN_l}{ds} = \frac{dN_l}{dt}u^0,$$

где u^0 – временнáя компонента 4-скорости мировой линии, а не потока.

Сами линии в 3-пространстве (являясь точками) могут характеризоваться 3-плотностью (концентрацией)

$$\varrho_3 = \frac{dN}{dv}.$$

Тогда

$$\varrho_4 = \frac{dN\ dN_l}{d\Omega} = \frac{dN}{dv}\cdot\frac{dN_l}{dt},$$

то есть

$$\varrho_4 = \varrho_3\frac{1}{u^0}\frac{dN_l}{dt} = \varrho_0\frac{dN_l}{ds} = \varrho_0\varrho_1.$$

Таким образом, в случае если 4-плотность является 4-концентрацией, связь между 4-плотностью и 3-плотностью приобретает определённый смысл.

Заметим, что имеет смысл осреднение концентрации по инвариантным элементам 4-объёма (гипершарам), так как ограниченные функции времениподобных мировых линий (являющихся отрезками внутри этих гипершаров) всегда интегрируемы внутри таких гипершаров. То есть имеем инвариантное 4-осреднение функции.

4. Плотности тензорных величин. Всё, сказанное о скалярной величине q, можно обобщить на тензорную величину q^T, где T обобщает совокупность тензорных индексов. Достаточно лишь отвлечься от её собственных тензорных индексов, чтобы определить плотность этой величины ϱ^T, которая будет тензором в том же смысле, что и q^T и не будет тензором в том же смысле, что и ϱ. Можно также определить сохраняющуюся **плотность потока** $j^{T\mu}$ **тензорной величины** q^T, которая будет тензором по индексам T и одновременно 4-вектором по индексам μ. Настоящий тензор, конечно, должен быть тензором по всем индексам. Тензорный характер многокомпонентной величины позволяют установить тензорные признаки (см. гл. 2).

§2. Абстрактный 4-ток (4-поток).

1. Плотность 4-тока. **Плотностью 4-тока** комплексного скалярного поля $u(x_\mu)$ назовем величину

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u\bigtriangledown^\mu u^* - u^*\bigtriangledown^\mu u) = -\operatorname{Im}(u\bigtriangledown^\mu u^*) = \operatorname{Im}(u^*\bigtriangledown^\mu u) \tag{1}$$

(сравните с [Соколов, (17.12)],[Ландау 2, (19,4)],[Ландау 4, (10,18)] где знак $\mathbf{j}$ иной). Можно было бы определить 4-ток с другим постоянным коэффициентом, но это не изменило бы ничего, кроме его единиц измерения.

В заданной системе отсчёта

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}), \quad j_\mu = (\rho, -\mathbf{j}), \tag{2}$$

где ρ назовём **плотностью заряда** поля u, $\mathbf{j}$ назовём **плотностью тока** поля u.

Поток величины $\mathbf{j}$ через некоторую поверхность S будем называть **током** J через эту поверхность.

$$J = \int\limits_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \tag{3}$$

Интеграл величины ρ по некоторому объему v будем называть **зарядом** q в этом объеме.

$$q = \int\limits_v \rho\, dv. \tag{4}$$

Заметим, что **понятие плотности 4-тока обобщается на матричные величины** (u) простой заменой операции * комплексного сопряжения на операцию $^+$ **эрмитового сопряжения**, означающую не только комплексное сопряжение матричных элементов, но и транспонирование матрицы, то есть превращение строк в столбцы. При этом, если матрица является строкой или столбцом, то 4-ток остаётся 4-вектором

$$j^\mu = \frac{i}{2}((u) \bigtriangledown^\mu (u)^+ - (u)^+ \bigtriangledown^\mu (u)) = -\operatorname{Im}((u) \bigtriangledown^\mu (u)^+) = \operatorname{Im}((u)^+ \bigtriangledown^\mu (u)). \tag{5}$$

2. Плотность 4-тока суммы двух полей.

Обзначим

j_1^μ – плотность 4-тока поля u_1,

j_2^μ – плотность 4-тока поля u_2,

j^μ – плотность 4-тока $u_1 + u_2$.

Найдем связь j^μ с j_1^μ и j_2^μ. По определению

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u \bigtriangledown^\mu u^* - u^* \bigtriangledown^\mu u) =$$

$$= \frac{i}{2}((u_1 + u_2) \bigtriangledown^\mu (u_1 + u_2)^* - (u_1 + u_2)^* \bigtriangledown^\mu (u_1 + u_2)) =$$

$$= \frac{i}{2}(u_1 \bigtriangledown^\mu u_1^* - u_1^* \bigtriangledown^\mu u_1 + u_2 \bigtriangledown^\mu u_2^* - u_2^* \bigtriangledown^\mu u_2 +$$

$$+ u_1 \bigtriangledown^\mu u_2^* - u_1^* \bigtriangledown^\mu u_2 + u_2 \bigtriangledown^\mu u_1^* - u_2^* \bigtriangledown^\mu u_1) =$$

$$= j_1^\mu + j_2^\mu + j_{(12)}^\mu,$$

где

$$j_{(12)}^\mu = j_{12}^\mu + j_{21}^\mu,$$

$$j_{12}^\mu = \frac{i}{2}(u_1 \bigtriangledown^\mu u_2^* - u_1^* \bigtriangledown^\mu u_2),$$

$$j_{21}^\mu = \frac{i}{2}(u_2 \bigtriangledown^\mu u_1^* - u_2^* \bigtriangledown^\mu u_1).$$

Величину $j^\mu_{(12)}$ назовём плотностью **взаимного 4-тока** полей u_1 и u_2.

В заданной системе координат

$$j^\mu_{(12)} = (\rho_{(12)}, \mathbf{j_{(12)}}),$$

где $\rho_{(12)}$ назовём плотностью **взаимного заряда** полей u_1 и u_2,

$\mathbf{j}_{(12)}$ назовём плотностью **взаимного тока** полей u_1 и u_2.

Величину

$$j^\mu_{12} = (\rho_{12}, \mathbf{j_{12}})$$

будем называть **плотностью относительного 4-тока** или **плотностью 4-тока поля** u_1 **относительно поля** u_2.

ρ_{12} будем называть **плотностью относительного заряда** или **плотностью заряда поля** u_1 **относительно поля** u_2.

$\mathbf{j}_{12}$ будем называть **плотностью относительного тока** или **плотностью тока поля** u_1 **относительно поля** u_2.

Соответствующие токи и **заряды** $J_{(12)}, J_{12}, J_{21}$, $q_{(12)}, q_{12}$, q_{21} получаются аналогично J и q интегрированием соответствующих плотностей токов и зарядов.

Будем также пользоваться обозначениями

$j^\mu = j^\mu_u = (\rho_u, \mathbf{j}_u)$ для поля u,

$j^\mu_{12} = j^\mu_{u_1,u_2} = (\rho_{u_1,u_2}, \mathbf{j}_{u_1,u_2})$

и

$j^\mu_{(12)} = j^\mu_{(u_1,u_2)} = (\rho_{(u_1,u_2)}, \mathbf{j}_{(u_1,u_2)})$ для полей u_1, u_2.

Иногда удобно j^μ_u рассматривать как результат операции $\hat{j}^\mu$, примененной к полю u.

$$j^\mu_u = \hat{j}^\mu u(x^\mu).$$

Заметим, что оператор $\hat{j}^\mu$ очевидно **нелинейный**.

3. Плотность 4-тока суммы нескольких полей. Статистическая аддитивность осреднённых 4-токов.

Пусть

$$u = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Плотность 4-тока поля u, по определению:

$$j^\mu = \frac{i}{2}(\sum_{i=1}^n u_i \bigtriangledown^\mu \sum_{i=1}^n u_i^* - (\sum_{i=1}^n u_i^*) \bigtriangledown^\mu \sum_{i=1}^n u_i) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{i}{2}(u_i \bigtriangledown^\mu u_j^* - u_i^* \bigtriangledown^\mu u_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2}(u_i \bigtriangledown^\mu u_i^* - u_i^* \bigtriangledown^\mu u_i) +$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{i}{2}(u_i\bigtriangledown^\mu u_j^*-u_i^*\bigtriangledown^\mu u_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}j_i^\mu+\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{n}(j_{ij}^\mu+j_{ji}^\mu)=\sum_{i=1}^{n}j_i^\mu+\sum_{j>i\geqslant 1}j_{(ij)}^\mu.$$

Таким образом плотность 4-тока суммы полей складывается из плотностей 4-токов всех слагаемых полей и плотностей взаимных 4-токов всех пар этих полей.

Заметим, что при осреднении 4-токов по не слишком малым элементам пространства-времени, **4-токи разных скалярных полей аддитивны**, то есть осреднённый 4-ток суммы таких полей равен сумме осреднённых 4-токов этих полей в отдельности. Это ясно из того, что взаимные токи разных полей обычно слабо коррелируют на не слишком малых элементах, то есть осциллируют и при осреднении обнуляются (сглаживаются).

В этой связи будем говорить о **статистической аддитивности плотностей 4-токов**.

4. Ротация плотности тока. Применяя оператор rot к плотности тока

$$\mathbf{j}=-j^k=-\frac{i}{2}(u\,\mathrm{grad}\,u^*-u^*\mathrm{grad}\,u),$$

получим

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{j}=-\frac{i}{2}([\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,u^*]+$$
$$+u\ \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\,u^*-[\mathrm{grad}\,u^*,\mathrm{grad}\,u]-u^*\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u)=$$
$$=-i[\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,u^*].$$

То есть, вообще говоря,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{j}\neq 0.$$

Заметим, что в отличие от $\mathbf{j}$, у величины

$$\mathbf{\Phi}=\frac{\mathbf{j}}{uu^*}$$

ротация отсутствует.

Действительно

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi}=\mathrm{rot}(-\frac{i}{2}(\frac{\mathrm{grad}\,u^*}{u^*}-\frac{\mathrm{grad}\,u}{u}))=$$
$$=-\frac{i}{2}([\mathrm{grad}\frac{1}{u^*},\mathrm{grad}\,u^*]+$$
$$+\frac{1}{u^*}\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u^*-[\mathrm{grad}\frac{1}{u},\mathrm{grad}\,u]-\frac{1}{u}\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u)=$$
$$=-\frac{i}{2}(\frac{-1}{(u^*)^2}[\mathrm{grad}\,u^*,\mathrm{grad}\,u^*]+\frac{1}{u^2}[\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,u])=0+0=0.$$

5. Бестоковые поля. Если $u = \pm u^*$, то

$$j_u^\mu = \pm\frac{i}{2}(u \bigtriangledown^\mu u - u \bigtriangledown^\mu u) = 0,$$

то есть любое вещественное или чисто мнимое поле имеет нулевой 4-ток (**бестоковое**). Бестоковым, очевидно, будет и любое комплексное постоянное поле $u = const$.

Заметим, что любое бестоковое поле можно представить суммой **токовых** полей. Очевидно, что токи этих слагаемых полей и их взаимные токи взаимнокомпенсируются.

6. Плотность 4-тока произведения двух полей.
Пусть поле w представлено в виде

$$w = u \cdot v.$$

Тогда

$$j_w^\mu = \frac{i}{2}(uv(u^* \bigtriangledown^\mu v^* + v^* \bigtriangledown^\mu u*) - u^*v^*(u \bigtriangledown^\mu v + v \bigtriangledown^\mu u)) =$$

$$\frac{i}{2}(uu^*(v \bigtriangledown^\mu v^* - v^* \bigtriangledown^\mu v) + vv^*(u \bigtriangledown^\mu u^* - u^* \bigtriangledown^\mu u)) = uu^* j_v^\mu + vv^* j_u^\mu. \qquad (1)$$

В частности, если u – вещественное, чисто мнимое или постоянное поле, то

$$j_w^\mu = uu^* j_v^\mu. \qquad (2)$$

Таким образом, если u рассматривать как бестоковую амплитуду, то плотность 4-тока пропорциональна квадрату модуля такой амплитуды.

7. Плотность 4-тока произведения нескольких полей.
Пусть

$$\psi = u \cdot v \cdot w, \qquad (1)$$

тогда

$$j_\psi^\mu = uu^* j_{vw}^\mu + vv^*ww^* j_u^\mu = uu^*vv^* j_w^\mu + uu^*ww^* j_v^\mu + vv^*ww^* j_u^\mu. \qquad (2)$$

Естественно сделать предположение, что если

$$\psi = \prod_i^n u_i, \qquad (3)$$

то

$$j_\psi^\mu = \sum_{i=1}^n (j_{u_i}^\mu \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j u_j^*). \qquad (4)$$

Для $n = 1, 2, 3$ это предположение верно. Покажем, что из верности этого предположения при $n = k-1$ следует верность его при $n = k$, то есть из

$$j^\mu_\psi = \sum_{i=1}^{k-1} (j^\mu_{u_i} \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k-1} u_j u_j^*) \tag{5}$$

следует

$$j^\mu_{\psi u_k} = \sum_{i=1}^{k} (j^\mu_{u_i} \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} u_j u_j^*). \tag{6}$$

Действительно, пусть справедливо (5).

Найдем $j^\mu_{\psi u_k}$

$$j^\mu_{\psi u_k} = \psi\psi^* j^\mu_{u_k} + u_k u_k^* j^\mu_\psi = (\prod_{j=1}^{k-1} u_j u_j^* j^\mu_{u_k} + u_k u_k^* \sum_{i=1}^{k-1} j^\mu_{u_i} \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k-1} u_j u_j^*) =$$

$$= (\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{k-1} u_j u_j^*) j^\mu_{u_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (j^\mu_{u_i} \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} u_j u_j^*) = \sum_{i=1}^{n} (j^\mu_{u_i} \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} u_j u_j^*). \tag{7}$$

Таким образом мы доказали формулу (4) методом полной математической индукции.

8. Плотность 4-тока обратного поля. Пусть $u = 1/v$ Тогда

$$j^\mu_u = j^\mu_{1/v} = \frac{i}{2}(\frac{1}{v} \bigtriangledown^\mu \frac{1}{v^*} - \frac{1}{v^*} \bigtriangledown^\mu \frac{1}{v}) =$$

$$= \frac{-i}{2}(\frac{1}{v(v^*)^2} \bigtriangledown^\mu v^* - \frac{1}{v^* v^2} \bigtriangledown^\mu v) = \frac{-i}{2(vv^*)^2}(v \bigtriangledown^\mu v^* - v^* \bigtriangledown^\mu v) =$$

$$= \frac{-1}{(vv^*)^2} j^\mu_v.$$

И так

$$j^\mu_{1/v} = \frac{-1}{(vv^*)^2} j^\mu_v.$$

9. Плотность 4-тока модулированной плоской волны.

Если

$$u = A(x_\mu) \mathrm{e}^{jk^\mu x_\mu}, \tag{1}$$

где $k^\mu = \mathrm{const}$, то

$$j^\mu_u = AA^* \hat{j}^\mu \mathrm{e}^{jk^\mu x_\mu} + 1 \cdot \hat{j}^\mu A,$$

$$\hat{j}^\mu \mathrm{e}^{jk^\mu x_\mu} = \frac{i}{2}(\mathrm{e}^{jk^\mu x_\mu}(-jk^\mu)\mathrm{e}^{-jk^\mu x_\mu} - \mathrm{e}^{-jk^\mu x_\mu} jk^\mu \mathrm{e}^{jk^\mu x_\mu}) = k^\mu.$$

Таким образом
$$j^\mu_u = AA^* k^\mu + j_A. \qquad (2)$$
Если амплитуда A бестоковая, то есть вещественная, чисто мнимая или постянная, то
$$j^\mu_u = AA^* k^\mu. \qquad (3)$$

10. Плотность 4-тока суммы плоских волн. Для поля $u = \sum_{i=1}^n u_i$ было найдено
$$j^\mu = \sum_{i=1}^n j^\mu_i + \sum_{j>i\geqslant 1}^n j^\mu_{(ij)}.$$
Пусть
$$u = \sum_{i=1}^n A_i e^{jk^\mu_i x_\mu} = \sum_{i=1}^n u_i,$$
где $A_i = \mathrm{const}$

Тогда
$$|u_i| = |A_i|,$$
$$j^\mu_i = A_i A^*_i k^\mu_i,$$
$$j^\mu = \sum_{i=1}^n A_i A^*_i k^\mu_i + \sum_{j>i\geqslant 1}^n j(ij)^\mu.$$
Заметим, что первый член положителен и, следовательно, при интегрировании накапливается как сигнал. Второй член осциллирует и при интегрировании накапливается как шум.

Если поле представлено как n плоских волн одинаковой амплитуды A, то
$$j^\mu = nA \sum_{i=1}^n k^\mu_i + \sum_{j>i\geqslant 1}^n j^\mu_{(ij)}.$$

11. 4-ток поля, представленного показательной функцией. Любое поле $u(x^\mu)$ можно представить в виде
$$u(x^\mu) = a(x^\mu)\mathrm{e}^{is(x^\mu)},$$
где $a = |u| \geqslant 0$ и s вещественны.

Тогда
$$j^\mu_u = aa^* \hat{j}^\mu \mathrm{e}^{is} = a^2 \hat{j}^\mu \mathrm{e}^{is},$$
$$\hat{j}^\mu \mathrm{e}^{is} = \frac{i}{2}(\mathrm{e}^{is}(-i)\mathrm{e}^{-is} \bigtriangledown^\mu s - \mathrm{e}^{-is} i \mathrm{e}^{is} \bigtriangledown^\mu s) = \frac{i}{2}(-i)2 \bigtriangledown^\mu s = \bigtriangledown^\mu s.$$
Таким образом
$$\hat{j}^\mu(a\mathrm{e}^{is}) = a^2 \bigtriangledown^\mu s.$$

Интересно заметить, что если $u(x^\mu)$ есть амплитудно модулированная плоская волна, то есть

$u(x^\mu) = a(x^\mu)\mathrm{e}^{ik_\nu x^\nu}$, где $a(x^\mu) \geqslant 0$,

то

$\hat{j}^\mu u = a^2(x^\mu) \bigtriangledown^\mu (k_\nu x^\nu)$.

Сумма такого вида волн (при одинаковых k^μ) есть

$$u(x^\mu) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x^\mu)\mathrm{e}^{ik_\nu x^\nu} = \mathrm{e}^{ik_\nu x^\nu} \sum_{i=1}^{n} a_i(x^\mu)$$

и тогда

$$\hat{j}^\mu u = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \bigtriangledown^\mu (k_\nu x^\nu).$$

12. Плотнсть 4-тока в сферических координатах. По определению

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u \bigtriangledown^\mu u^* - u^* \bigtriangledown^\mu u) = \frac{i}{2}(u\frac{\partial u^*}{\partial x_\mu} - u^*\frac{\partial u}{\partial x_\mu}), \quad \nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right).$$

Так как в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

$$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{r\ \sin\ \vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{i}_\varphi$$

[Корн, с. 187] , то в этих координатах

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}) = \frac{i}{2}(u\frac{\partial}{\partial t}u^* - u^*\frac{\partial}{\partial t}u)\mathbf{i_t} - \frac{i}{2}(u\frac{\partial}{\partial r}u^* - u^*\frac{\partial}{\partial r}u)\mathbf{i_r} -$$

$$-\frac{i}{2}(u\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}u^* - u^*\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}u)\mathbf{i}_\vartheta -$$

$$-\frac{i}{2}(u\frac{1}{r\ \sin\ \vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}u^* - u^*\frac{1}{r\ \sin\ \vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}u)\mathbf{i}_\varphi =$$

$$= \rho\mathbf{i_t} + \mathbf{j_r} + \mathbf{j}_\vartheta + \mathbf{j}_\varphi.$$

Если переменные функции $u(x^\mu)$ в сферических координатах разделяются, то есть

$$u(x^\mu) = u_t(t) \cdot u_r(r) \cdot u_\vartheta(\vartheta) \cdot u_\varphi(\varphi),$$

то

$$\rho = \frac{i}{2}(u_t\frac{\partial}{\partial t}u_t^* - u_t^*\frac{\partial}{\partial t}u_t)|u_r u_\vartheta u_\varphi|^2,$$

$$\mathbf{j_r} = -\frac{i}{2}(u_r\frac{\partial}{\partial r}u_r^* - u_r^*\frac{\partial}{\partial r}u_r)|u_t u_\vartheta u_\varphi|^2\mathbf{i_r},$$

$$\mathbf{j}_\vartheta = -\frac{i}{2r}(u_\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} u_\vartheta^* - u_\vartheta^* \frac{\partial}{\partial\vartheta} u_\vartheta)|u_t u_r u_\varphi|^2 \mathbf{i}_\vartheta,$$

$$\mathbf{j}_\varphi = -\frac{i}{2r\,\sin\vartheta}(u_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi^* - u_\varphi^* \frac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi)|u_t u_r u_\vartheta|^2 \mathbf{i}_\varphi.$$

13. Плотность 4-тока в цилиндрических координатах. По определению

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u \bigtriangledown^\mu u^* - u^* \bigtriangledown^\mu u) = \frac{i}{2}(u\frac{\partial u^*}{\partial x_\mu} - u^* \frac{\partial u}{\partial x_\mu}), \quad \nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right).$$

Так как в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_\mathbf{z}$$

[Савельев 1, с. 387] , то в этих координатах

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}) = \frac{i}{2}(u\frac{\partial}{\partial t}u^* - u^*\frac{\partial}{\partial t}u)\mathbf{i}_\mathbf{t} - \frac{i}{2}(u\frac{\partial}{\partial\rho}u^* - u^*\frac{\partial}{\partial\rho}u)\mathbf{i}_\rho -$$

$$-\frac{i}{2}(u\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}u^* - u^*\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}u)\mathbf{i}_\varphi - \frac{i}{2}(u\frac{\partial}{\partial z}u^* - u^*\frac{\partial}{\partial z}u)\mathbf{i}_\mathbf{z} =$$

$$= \rho\mathbf{i}_\mathbf{t} + \mathbf{j}_\rho + \mathbf{j}_\varphi + \mathbf{j}_\mathbf{z}.$$

Если переменные функции $u(x^\mu)$ в цилиндрических координатах разделяются, то есть

$$u(x^\mu) = u_t(t) \cdot u_\rho(\rho) \cdot u_\varphi(\varphi) \cdot u_z(z),$$

то

$$\rho = \frac{i}{2}(u_t \frac{\partial}{\partial t} u_t^* - u_t^* \frac{\partial}{\partial t} u_t)|u_\rho u_\varphi u_z|^2,$$

$$\mathbf{j}_\rho = -\frac{i}{2}(u_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} u_\rho^* - u_\rho^* \frac{\partial}{\partial\rho} u_\rho)|u_t u_\varphi u_z|^2 \mathbf{i}_\rho,$$

$$\mathbf{j}_\varphi = -\frac{i}{2\rho}(u_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi^* - u_\varphi^* \frac{\partial}{\partial\varphi} u_\varphi)|u_t u_\rho u_z|^2 \mathbf{i}_\varphi,$$

$$\mathbf{j}_\mathbf{z} = -\frac{i}{2}(u_z \frac{\partial}{\partial z} u_z^* - u_z^* \frac{\partial}{\partial z} u_z)|u_t u_\rho u_\varphi|^2 \mathbf{i}_\mathbf{z}.$$

§3. Особые состояния 4-тока.

1. Стационарный 4-ток. Если существует система координат, в которой плотность 4-тока не зависит от времени, то такой 4-ток будем называть **стационарным**. Соответствующее скалярное поле u тоже будем называть **стационарным**, хотя оно, очевидно, может зависеть от времени посредством множителя $\mathrm{e}^{\omega t}$, где $\omega = \mathrm{const}$. Важность стационарных 4-токов в том, что (как мы покажем ниже) они не излучают электромагнитных волн и поэтому не теряют энергии на излучение.

2. Заряд стационарного поля. Для стационарной функции $u(x^\mu)$, то есть такой, что

$$u_t = \mathrm{e}^{i\omega t}$$

имеем

$$\rho = \frac{i}{2}|u_r u_\vartheta u_\varphi|^2(u_t\frac{\partial}{\partial t}u_t^* - u_t^*\frac{\partial}{\partial t}u_t) =$$

$$= \frac{i}{2}|u_r u_\vartheta u_\varphi|^2(u_t(-i\omega)u_t^* - u_t^* i\omega u_t) = |u|^2\omega, \quad u_t = \mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{1}$$

В этом случае заряд по всему пространству

$$q = \int \rho dv = \omega \int |u|^2 dv$$

и если $|u|^2$ нормирована так, что

$$\int |u|^2 dv = 1,$$

то

$$q = \omega. \tag{2}$$

3. Неразрывные 4-токи. КГФ-поля. Покажем, что для любого скалярного поля (в том числе **единого поля**), удовлетворяющего уравнению

$$\Box u = -k^2 u, \tag{1}$$

где $k = k(x^\mu)$ – заданная **вещественная** функция координат, заряд сохраняется, то есть j^μ удовлетворяет уравнению неразрывнсти (**4-ток неразрывен**):

$$\bigtriangledown^\mu j_\mu = 0. \tag{2}$$

Действительно, умножая (1) на u^*, а сопряженное ему уравнение

$$\Box u^* = -k^2 u^* \tag{3}$$

на u и вычитая из первого второе, имеем

$$u^* \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown^\mu u - u \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown^\mu u^* = 0$$

или

$$(\bigtriangledown_\mu u^*) \bigtriangledown^\mu u + u^* \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown^\mu u - (\bigtriangledown_\mu u) \bigtriangledown^\mu u^* - u \bigtriangledown_\mu \bigtriangledown^\mu u^* = 0.$$

Так как индексы μ можно менять в паре сомножителей местами, то

$$\bigtriangledown_\mu(u^* \bigtriangledown^\mu u) - \bigtriangledown_\mu(u \bigtriangledown^\mu u^*) = 0$$

или

$$\bigtriangledown_\mu(u^* \bigtriangledown^\mu u - u \bigtriangledown^\mu u^*) = 0$$

или

$$\bigtriangledown_\mu j^\mu = 0. \qquad (4)$$

Справедливо и обратное, то есть, если 4-ток с плотностью

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u) \qquad (5)$$

(где u – любое скалярное поле)
сохраняется, то есть

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \qquad (6)$$

то поле u должно удовлетворять уравнению:

$$\Box u = -k^2 u, \qquad (7)$$

где k^2 – действительное скалярное поле.

Действительно, из (6) и (5) следует

$$u\Box u^* - u^*\Box u = 0 \qquad (8)$$

откуда, обозначив $\Box u/u = -k^2$, получим

$$\frac{\Box u}{u} = \frac{\Box u^*}{u^*} = -k^2, \qquad (9)$$

где

$$k^2 = k^{2*}, \qquad (10)$$

что и требовалось доказать. Таким образом **свойство скалярного поля удовлетворять уравнению КГФ эквивалентно сохранению его 4-тока.**

При $k = \text{const}$ уравнение (1) есть уравнение КГФ. Так как сумма **КГФ-полей** (то есть удовлетворяющих уравнению КГФ) с одним и тем же значением k^2 является КГФ-полем, то очевидно сохраняется не только ток этих полей, но и взаимные токи этих полей. Взаимные же токи КГФ-полей с разными k^2, вообще говоря, не сохраняются.

§4. 4-ток космических волн.

1. Плотность 4-тока космических волн. Так как единая космическая волна $\tilde{u}$ вещественна, то её плотность 4-тока

$$j^{\mu}_{\tilde{u}} = 0. \tag{1}$$

Плотность 4-тока $(\pm)$космических волн

$$\tilde{u}_{\pm} = \frac{\mp i\pi^2 B_F^4}{T} H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|T) \tag{2}$$

определяется формулой:

$$j^{\mu}_{\pm} = -\operatorname{Im}(\tilde{u}_{\pm}\nabla^{\mu}\tilde{u}^{*}_{\pm}) = \frac{\pi^4 B_F^8}{T}\operatorname{Im}\left(H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|T)\nabla^{\mu}\left[\frac{1}{T}H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)*}(|k|T)\right]\right). \tag{3}$$

Так как [Прудников 2, с. 728],[Корн, (21.8-5)]

$$H_{\nu}^{\left(\left\{\substack{1\\2}\right\}\right)} = J_{\nu}(z) \pm iY_{\nu}(z), \tag{4}$$

то при вещественном

$$z = z^{*} = |k|\sqrt{t^2 - r^2} = |k|T,$$

имеем

$$H_{\nu}^{(2)*}(z) = H_{\nu}^{(1)}(z), \quad H_{\nu}^{(1)*}(z) = H_{\nu}^{(2)}(z). \tag{5}$$

Тогда

$$j^{\mu}_{\pm} = \frac{\pi^4 B_F^8}{T}\operatorname{Im}\left(H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|T)\nabla^{\mu}\left[\frac{1}{T}H_1^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T)\right]\right). \tag{6}$$

В гиперсферических координатах $(T = Q)$:

$$\nabla^{\mu}\left[\frac{1}{T}H_1^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T)\right] = e^{\mu}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}H_1^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T)\right] = k^2 e^{\mu}\frac{\partial}{\partial |k|T}\left[\frac{1}{|k|T}H_1^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T)\right] =$$

[Прудников 2, с.728]

$$= k^2 e^{\mu}\frac{-1}{|k|T}H_2^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T),$$

где

$$e^{\mu} = \frac{X^{\mu}}{T} = \left(\frac{X^0}{T}, \frac{\mathbf{X}}{T}\right) = \left(\frac{t}{T}, \frac{\mathbf{r}}{T}\right) \tag{7}$$

– единичный 4-радиус-вектор.

Таким образом

$$j^{\mu}_{\pm} = \frac{\pi^4 B_F^8}{T}\operatorname{Im}\left(H_1^{\left(\substack{2\\1}\right)}(|k|T)\frac{-|k|e^{\mu}}{T}H_2^{\left(\substack{1\\2}\right)}(|k|T)]\right) =$$

$$= \frac{-\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} \mathrm{Im}\,(H_1^{\binom{2}{1}}(|k|T)\ H_2^{\binom{1}{2}}(|k|T)]) = \tag{8}$$

$$= \frac{-\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} \mathrm{Im}\,((J_1(|k|T) \mp iY_1(|k|T))(J_2(|k|T) \pm iY_2(|k|T)) =$$

$$= \frac{-\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} (\pm J_1(|k|T)\, Y_2(|k|T) \mp Y_1(|k|T)\, J_2(|k|T)) =$$

$$= \frac{\mp\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} (J_1(|k|T)\, Y_2(|k|T) - Y_1(|k|T)\, J_2(|k|T)). \tag{9}$$

Последнее выражение очевидно вещественно.

2. Асимптотические выражения для плотности 4-тока космических волн. При $T \to \infty$ удобно использовать асимптотическое выражение [Никифоров, с.304]:

$$H_\nu^{\binom{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \mathrm{e}^{\pm i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)}. \tag{1}$$

При этом из (1.8)

$$j_\pm^\mu = \frac{-\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} \mathrm{Im} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi|k|T}} \mathrm{e}^{\mp i(|k|T - \pi/2 - \pi/4)} \sqrt{\frac{2}{\pi|k|T}} \mathrm{e}^{\pm i(|k|T - \pi - \pi/4)} \right) =$$

$$= \frac{-2\pi^3 B_F^8 e^\mu}{T^3} \mathrm{Im}\, e^{\pm i\pi/2} = \frac{\pm 2\pi^3 B_F^8 e^\mu}{T^3}, \quad T \to \infty. \tag{2}$$

При $T \to 0$ удобно использовать разложения в ряды [Никифоров, с.304]:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\, \Gamma(\nu + k + 1)}, \tag{3}$$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(z)\, \ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \left[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)\right] \right\}. \tag{4}$$

Сохраняя лишь слагаемые наименьшей степени z, получим

$$J_1(z) = \frac{z}{2},\ J_2(z) = \frac{z^2}{8},\ Y_1(z) = \frac{-2}{\pi z},\ Y_2(z) = \frac{-4}{\pi z^2},\ z \to +0. \tag{5}$$

При этом из (1.9)

$$j_\pm^\mu = \frac{\mp\pi^4 B_F^8 |k| e^\mu}{T^2} \left(\frac{|k|T}{2} \cdot \frac{-4}{\pi k^2 T^2} - \frac{-2}{\pi|k|T} \cdot \frac{k^2 T^2}{8} \right) =|_{T\to 0}\ \ \frac{\pm 2\pi^3 B_F^8 e^\mu}{T^3},$$

$$T \to 0. \tag{6}$$

Таким образом на границе Вселенной осреднённая плотность 4-тока бесконечна. Асимптотические выражения $j^{\mu}_{\pm}$ имеют одинаковый вид как при $T \to \infty$ так и при $T \to 0$.

3. Плотность тока космических волн. Из (1.9),(1.7) плотность тока $\mathbf{j}_{\pm}$ космических волн, в изначальной системе координат в направлении радиус-вектора, принимает вид

$$\mathbf{j}_{\pm} = \frac{\mp\pi^4 B_F^8 |k| \mathbf{r}}{T^3} (J_1(|k|T)\, Y_2(|k|T) - Y_1(|k|T)\, J_2(|k|T)). \tag{1}$$

Асимптотически при больших и малых T, соответственно получаем из (2.2) и (2.6):

$$\mathbf{j}_{\pm} = \frac{\pm 2\pi^3 B_F^8 \mathbf{r}}{T^4}, \quad T \to \infty,\ T \to 0. \tag{2}$$

4. Плотность заряда космических волн. Из (1.9),(1.7) плотность заряда $\varrho_{\pm}$ космических волн, в изначальной системе координат (где $t = T$), принимает вид

$$j^0_{\pm} = \varrho_{\pm} = \frac{\mp\pi^4 B_F^8 |k|}{T^2} (J_1(|k|T)\, Y_2(|k|T) - Y_1(|k|T)\, J_2(|k|T)). \tag{1}$$

Асимптотически при больших и малых T, соответственно получаем из (2.2) и (2.6):

$$j^0_{\pm} = \varrho_{\pm} = \frac{\pm 2\pi^3 B_F^8}{T^3}, \quad T \to \infty,\ T \to 0. \tag{2}$$

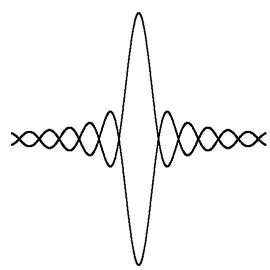
Отсюда видно, что **знак частоты космической волны совпадает со знаком её заряда**. Интегрируя последнее выражение по 3-пространству, можно убедится, что **заряд космической волны бесконечен**, так как этот интеграл расходится при $T \to 0$, то есть на границе Вселенной. Однако, мы ниже покажем (8.4.5.5), что из этого распределённого по всему пространству заряда можно выделить локальную конечную точечную часть, доминирующую над распределённой (непрерывной) частью, в силу космологически малой плотности последней.

5. Нерегулярный космический 4-ток. Комплексному нерегулярному космическому полю соответствует **нерегулярный космический 4-ток**, не содержащий конечных точечных зарядов.

⋆⋆⋆

Жизнь – это школа души.

Чехов А.П.



Глава 8. НОРМИРОВАННОСТЬ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

§1. Естественная нормированность сопутных волн.

1. Естественная норма. Паразаряд. Единое поле удовлетворяет уравнению КГФ. Сопутные волны, удовлетворяющие тому же линейному уравнению имеют особенности, которые по их смыслу определены как совпадающие с особенностями самого единого поля по крайней мере в бесконечно малой окрестности этой особенности. Тогда, в силу линейности уравнения КГФ, сопутную волну φ можно рассматривать как компоненту единого поля, **функциональное скалярное произведение** которой на космическое поле u равно её функциональному скалярному квадрату по крайней мере в бесконечно малой окрестности их общей особенности

$$(\varphi,\ u) = (\varphi,\ \varphi) = |\varphi|^2. \tag{1}$$

При этом будем говорить, что функция φ взята в **естественной нормировке**, или функция φ **целиком присутствует** в поле u. Естественная нормировка устраняет произвол в выборе амплитуды сопутных волн относительно амплитуды космических волн. Если функция φ', в частности сопутная волна (6.2.1.8), задана в произвольной нормировке, то её нормированный вариант имеет общий вид:

$$\varphi = A\varphi' = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)}, \tag{2}$$

где A – некоторый постоянный **нормирующий множитель**, то есть значение этого множителя, обеспечивающего естественную нормировку функции φ, можно легко найти, подставляя (2) в (1). Получим

$$(A\varphi',\ u) = (A\varphi',\ A\varphi'), \tag{3}$$

откуда

$$A = \frac{(\varphi',\ u)}{(\varphi',\ \varphi')}. \tag{4}$$

Мы умолчали пока о том, что указанные скалярные произведения являются расходящимися (по крайней мере по времени) интегралами. В случае сопутных волн в едином поле эти интегралы сходятся по плоскому пространству сопутствующему путевой линии. Сходимость их по времени можно обеспечить, ограничивая область интегрирования конечным интервалом собственного времени Δs, который можно свести к нулю, рассматривая тем самым **мгновенные скалярные произведения** $(\varphi, u)_3$, $(\varphi, \varphi)_3$ по сопутствующему 3-пространству. При этом нормирующий множитель

$$A = \frac{(\varphi',\ u)_3 \cdot \Delta s}{(\varphi',\ \varphi')_3 \cdot \Delta s} = \frac{(\varphi',\ u)_3}{(\varphi',\ \varphi')_3}, \tag{5}$$

вообще говоря, становится функцией путевой линии и может произвольно зависеть от системы отсчёта, а поэтому не является объективной характеристикой. Но формула (4) требует, чтобы величина A была лоренцевым инвариантом, так как справа стоит 4-скаляр. Этому требованию можно удовлетворить (см. ниже), используя степени свободы 4-скорости и комплексных параметров $\omega, \varkappa$ (6.2.1.6), получая **определённую связь между ними**, хотя сами они инвариантами не являютсся. Такие сопутные волны будем называть **нормальными сопутными волнами**. Важно, что параметры скалярных сопутных волн, в том числе их скорость не обязаны быть постоянными величинами, что допускается демонстрированным выше синтетическим подходом к сопутным волнам.

В интеграле $(\varphi', u)_3$ нерегулярная компонента единого поля u не коррелирует (по определению) с φ', поэтому **в этом скалярном произведении единое поле может быть представлено только регулярным полем**. Сопутная волна имеет с единным полем общее происхождение от одного и того же волнового уравнения КГФ. Волновой 4-вектор k^μ сопутной волны как и волновой 4-вектор K^μ плоской волны, локально аппроксимирующей регулярное поле, имеют одинаковый скалярный квадрат

$$k^\mu k_\mu = K^\mu K_\mu = k^2, \tag{6}$$

поэтому эти волны естественно коррелируют, то есть существование нормальной сопутной волны естественно, что покажет конкретное вычисление. Естественную **нормальность сопутной волны примем как её доопределение**. (7)

Требование нормальности сопутной волны, как мы увидем, разрешается двузначно, что обозначим числом (**паразарядом**), имеющим два значения

$$q_p = \pm 1. \tag{8}$$

Сохранение паразаряда необходимо, так как процесс перехода от одного его значения к другому нарушает нормальность сопутной волны и поэтому запрещён. (9)

2. Функциональный скалярный квадрат сопутной волны. Сопутную волну запишем (в мгновенно сопутствующей системе $t, \mathbf{r}$) в виде

$$\varphi = A\varphi', \tag{1}$$

где (6.2.1.8)

$$\varphi' = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{i\omega_R t - \omega_I t\; + i\varkappa_R r - \varkappa_I r} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{i\omega_R t + i\varkappa_R r - \varkappa_I r}, \tag{2}$$

$$\omega = \omega_R + i\omega_I,\ \varkappa = \varkappa_R + i\varkappa_I,\ \omega^2 - \varkappa^2 = k^2,\ (6.2.1.6). \tag{3}$$

Здесь член $-\omega_I t$ в показателе экспоненты мы вычеркнули, полагая, что на рассматриваемом интервале времени Δt зависимость от t достаточно медленная, чтобы её можно было включить в медленно изменяющуюся величину A, (что мы и подразумеваем).

Рассмотрим функциональный скалярный квадрат φ' по 3-пространству Вселенной:

$$(\varphi',\,\varphi')_3 = \int \varphi'\varphi'^*\,dv = 4\pi\int\limits_0^\infty \varphi'\varphi'^* r^2\,dr. \tag{4}$$

Этот интеграл сходится только в случае

$$\mathrm{Im}\,\varkappa = \varkappa_I > 0, \tag{5}$$

где $\varkappa_I$ – вещественное число.

Напомним (6.2.1.5), что

$$k^2 = \omega^2 - \varkappa^2.$$

Тогда

$$(\varphi',\,\varphi')_3 = 4\pi\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2\varkappa_I r}dr = \frac{4\pi}{-2\varkappa_I}\mathrm{e}^{-2\varkappa_I r}\Big|_0^\infty = \frac{2\pi}{\varkappa_I}. \tag{6}$$

Заметим, что при космологически большом возрасте Вселенной T этот интеграл сходится уже при $r \ll T$.

Чтобы распространить этот скалярный квадрат на 4-пространство достаточно проинтегрировать его по интервалу $\Delta T = \Delta s$, на котором задана сопутная волна. Получим

$$(\varphi',\,\varphi') = \frac{2\pi}{\varkappa_I}\int\limits_t^{t+\Delta t} dt = \frac{2\pi}{\varkappa_I}t\Big|_t^{t+\Delta s} = \frac{2\pi}{\varkappa_I}\Delta s. \tag{7}$$

Таким образом, обобщая, можно сказать, что **переход от 3-скалярного произведения стационарных функций к 4-скалярному сводится к умножению первого на интервал Δs, являющийся носителем произведения этих функций**

$$(f_1, f_2) = (f_1, f_2)_3 \cdot \Delta s. \tag{8}$$

3. Функциональное скалярное произведение сопутной и регулярной волны, аппроксимированной плоской волной. Сопутная волна в системе координат x^μ, мгновенно сопутствующей её сингулярности, имеет вид (6.2.1.8)

$$\varphi = A\varphi' = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)}, \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^2, \tag{1}$$

где $\omega = k^0 = \omega_R + i\omega_I, \varkappa = |\mathbf{k}^r| = \varkappa_R + i\varkappa_I$ являются комплексными компонентами центрального поля 4-вектора k^μ ($\varkappa$ – его радиальная компонента в обычных сферических координатах).

Общий вид регулярной волны в этой же системе соответствует (по крайней мере в **плосковолновой области** с диаметром порядка не больше $\sqrt{T}$) плоской волне

$$u = B\,\mathrm{e}^{iK_\mu x^\mu}, \qquad K_\mu K^\mu = k^2 = k^\mu k_\mu, \tag{2}$$

движущейся с 4-скоростью

$$u_K^\mu = \frac{K^\mu}{k} \tag{3}$$

(в смысле направления её волнового 4-вектора K^μ).

Тогда функциональное скалярное произведение этих волн по 3-пространству

$$(\varphi',\ u)_3 = \int \varphi' u\, dv = BJ, \tag{4}$$

где

$$J = \int \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r + K_\mu x^\mu)}\, dv.$$

Область, существенная для интегрирования, определяется параметром затухания $\varkappa_I$ и имеет линейный размер порядка $1/\varkappa_I$. Эта область должна быть достаточно маленькой, чтобы в неё не входила та часть космического поля, которая значительно отличается от плоской волны, то есть размер этой области должен иметь порядок плосковолновой области $\sqrt{T}$, что космологически меньше размера Вселенной T, то есть можно использовать оценку

$$\varkappa_I \gg \frac{1}{\sqrt{T}}. \tag{5}$$

Проектируя K_μ на оси системы, сопутствующей сингулярности, имеем

$$K_\mu x^\mu = K_0 t - |\mathbf{K}| r\cos\vartheta = u_0 k t - |\mathbf{u}| k r\cos\vartheta, \tag{6}$$

где u^μ – 4-скорость сингулярности в изначальной системе.

Тогда, проинтегрировав J по координате φ, имеем

$$J = 2\pi \int\limits_0^\infty r \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r + k u^0 t - k|\mathbf{u}| r\cos\vartheta)} \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr =$$

$$= 2\pi \mathrm{e}^{i(\omega + k u^0)t} \int\limits_0^\infty r\,\mathrm{e}^{i\varkappa r} J_1\, dr,$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-ik|\mathbf{u}| r\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$(-\cos\vartheta = x, \quad \sin\vartheta\, d\vartheta = dx, \quad x_{\big|\vartheta=0} = -1, \quad x_{\big|\vartheta=\pi} = 1)$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ik|\mathbf{u}|rx} dx = \frac{1}{ik|\mathbf{u}|r}\, \mathrm{e}^{ik|\mathbf{u}|rx}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{k|\mathbf{u}|r} \sin k|\mathbf{u}|r,$$

тогда

$$J = \frac{4\pi}{k|\mathbf{u}|}\, \mathrm{e}^{i(\omega + ku^0)t} J_2,$$

где

$$J_2 = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{i\varkappa r} \sin k|\mathbf{u}|r\, dr =$$

$$[\text{Прудников}, 2.5.30.8, c.445,\ p = -i\varkappa,\ \operatorname{Re} p = \varkappa_I > |\operatorname{Im} b|,\ b = k|\mathbf{u}|]$$

$$= \frac{k|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}^2 k^2 - \varkappa^2},$$

и

$$J = \frac{4\pi}{\mathbf{u}^2 k^2 - \varkappa^2}\, \mathrm{e}^{i(\omega + ku^0)t}.$$

Тогда из (4)

$$(\varphi',\ u)_3 = \frac{4\pi B}{\mathbf{u}^2 k^2 - \varkappa^2}\, \mathrm{e}^{i(\omega + ku^0)t}. \tag{7}$$

Модуль этой величины

$$|(\varphi',\ u)_3| = \frac{4\pi|B|}{|\mathbf{u}^2 k^2 - \varkappa^2|} = \frac{4\pi|B|}{|\mathbf{u}^2 k^2 - \omega^2 + k^2|} = \frac{4\pi|B|}{|u^{02} k^2 - \omega^2|}. \tag{8}$$

Где (6.3.7.5)

$$|B| = \frac{2\pi^2 B_F^4}{\sqrt{2\pi|k|}\, T^{3/2}}. \tag{9}$$

4. О константах и точности вычислений. При вычислении интегралов, мы обращались с коэффициентом B как с постоянной величиной, хотя он является степенной функцией возраста T Вселенной. Это оправдывается тем, что относительная потеря точности при условии (3.5) имеет порядок $1/T$, что для физических вычислений является очень хорошей точностью, так как порядок возраста Вселенной (как мы покажем) $\sim 10^{61}$. По этой же причине, с определённой осторожностью, можно допускать необходимые космологически медленные изменения других констант, в частности $A, \omega, \varkappa$.

5. Условия для параметров нормальной сопутной волны. Используя (2.8), имеем для кусочной сопутной волны:

$$|(\varphi',\ u)| = |(\varphi',\ u)_3 \cdot \Delta s| = \frac{4\pi|B|\ \Delta s}{|\mathbf{u}^2 k^2 - \varkappa^2|} = \frac{4\pi|B|\ \Delta s}{|u^{02} k^2 - \omega^2|}. \tag{1}$$

Левая часть выражения (1) представляет собой, по определению, 4-скаляр. Тогда и правая часть должна быть 4-скаляром, что однако не очевидно для знаменателя, который записывается в двух формах с равными значениями:

$$|\mathbf{u}^2k^2 - \varkappa^2| = |u^{02}k^2 - \omega^2|, \tag{2}$$

где величина

$$u^{02}k^2 - \mathbf{u}^2k^2 = k^2 \tag{3}$$

– 4-скаляр, а величины $\omega, \varkappa$ связаны условиями (6.2.1.7)

$$\begin{cases} \omega_R^2 - \varkappa_R^2 - \omega_I^2 + \varkappa_I^2 = k^2 \\ \omega_R \cdot \omega_I = \varkappa_R \cdot \varkappa_I \end{cases}. \tag{4}$$

Тогда (2) является 4-скаляром в двух различных случаях:

6. Случай 1. Так как (5.3) – 4-скаляр и

$$\varkappa^2 = (\varkappa_R + i\varkappa_I)^2 = \operatorname{Re}\varkappa^2 + 2i\varkappa_R\varkappa_I, \tag{1}$$

то (5.2) является 4-скаляром при условиях

$$\operatorname{Re}\varkappa^2 = \varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 = u^{02}k^2, \quad 2i\varkappa_R\varkappa_I \text{ – 4-скаляр}, \tag{2}$$

при этом

$$|\mathbf{u}^2k^2 - \varkappa^2| = |-k^2 - 2i\varkappa_R\varkappa_I| = \sqrt{k^4 + 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2}. \tag{3}$$

По условию (2) **4-скорость сингулярности в изначальной системе координат**

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u}) = (u^0, \mathbf{e}_u\sqrt{u^{02} - 1}) = \frac{1}{|k|}(\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 - k^2}), \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_u$ – орт 3-вектора $\mathbf{u}_u$, откуда

$$\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 = k^2u^{02}. \tag{5}$$

Используя (5), из первого равенства условий (5.4) находим

$$\omega_R^2 - \omega_I^2 = k^2u^{02} + k^2. \tag{6}$$

Из (2) $\varkappa_R\varkappa_I$ – 4-инвариант, что с учётом (5.4) означает, что обе равные величины:

$$\omega_R \cdot \omega_I = \varkappa_R \cdot \varkappa_I \text{ – 4-скаляры}. \tag{7}$$

7. Случай 2. Так как (5.3) – 4-скаляр и

$$\omega^2 = (\omega_R + i\omega_I)^2 = \operatorname{Re}\omega^2 + 2i\omega_R\omega_I, \tag{1}$$

то (5.2) является 4-скаляром при условиях

$$Re\,\omega^2 = \omega_R^2 - \omega_I^2 = \mathbf{u}^2 k^2, \quad 2i\omega_R\omega_I \text{ – 4-скаляр}, \tag{2}$$

при этом

$$|u^{02}k^2 - \omega^2| = |k^2 - 2i\omega_R\omega_I| = \sqrt{k^4 + 4\omega_R^2\omega_I^2}. \tag{3}$$

По условию (2) **4-скорость сингулярности в изначальной системе координат**

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u}) = (\sqrt{\mathbf{u}^2+1}, \mathbf{u}) = \frac{1}{|k|}(\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2 + k^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2}), \tag{4}$$

откуда

$$\omega_R^2 - \omega_I^2 = k^2\mathbf{u}^2 = k^2u^{02} - k^2. \tag{5}$$

Используя (5), из первого равенства условий (5.4) находим

$$\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 = k^2\mathbf{u}^2 - k^2 = k^2u^{02} - 2k^2. \tag{6}$$

Из (2) опять следует (6.7).

8. Два типа сопутных волн (пара- и анти-). Хотя оба случая имеют одинаковый модуль $|A|$ нормирующего множителя, они различны, что видно из сравнения их скоростей при **одних и тех же параметрах** или из сравнения их параметров при **одних и тех же темпах**. При одних и тех же параметрах из (6.4),(7.4) имеем

$$\begin{aligned} u_1^\mu &= \frac{1}{|k|}(\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 - k^2}) = \\ &= \frac{1}{|k|}(\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2 - k^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2 - 2k^2}) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u_2^\mu &= \frac{1}{|k|}(\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 + 2k^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 + k^2}) = \\ &= \frac{1}{|k|}(\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2 + k^2}, \mathbf{e}_u\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2}), \end{aligned} \tag{2}$$

где нижний индекс при 4-скорости указывает номер случая. Выражения (1),(2), с учётом (6.2),(7.2), можно записать в виде

$$u_1^{02} = \frac{1}{k^2}\text{Re }\varkappa^2 \;=\; \frac{1}{k^2}\text{Re }\omega^2 - 1, \qquad \mathbf{u}_1^2 = \frac{1}{k^2}\text{Re }\varkappa^2 - 1 = \frac{1}{k^2}\text{Re }\omega^2 - 2, \tag{3}$$

$$u_2^{02} = \frac{1}{k^2}\text{Re }\varkappa^2 + 2 = \frac{1}{k^2}\text{Re }\omega^2 + 1, \quad \mathbf{u}_2^2 = \frac{1}{k^2}\text{Re }\varkappa^2 + 1 = \frac{1}{k^2}\text{Re }\omega^2. \tag{4}$$

Вычитая (3) из (4), имеем

$$u_2^{02} - u_1^{02} = 2, \quad \mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2 = 2, \tag{5}$$

откуда видно, что при одних и тех же $\omega, \varkappa$ **во втором случае квадраты обоих компонент 4-скорости больше на 2 единицы относительно первого**.

При одних и тех же темпах, выражения (3), (4) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\varkappa_1^2 = k^2 u^{02}, \quad \operatorname{Re}\omega_1^2 = k^2\mathbf{u}^2 + 2k^2 = k^2 u^{02} + k^2, \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\varkappa_2^2 = k^2 u^{02} - 2k^2, \quad \operatorname{Re}\omega_2^2 = k^2\mathbf{u}^2 = k^2 u^{02} - k^2, \tag{7}$$

где нижние индексы указывают номер случая. Вычитая (7) из (6), имеем

$$\operatorname{Re}\varkappa_1^2 - \operatorname{Re}\varkappa_2^2 = 2k^2, \quad \operatorname{Re}\omega_1^2 - \operatorname{Re}\omega_2^2 = 2k^2, \tag{8}$$

откуда видно, что при одних и тех же темпах **в первом случае модули квадратов параметров $\varkappa, \omega$ больше на $2k^2$ относительно первого**.

Сопутные волны для первого случая будем называть **анти-волнами**, а для второго случая – **пара-волнами**.

Эти свойства сопутных волн найдены в изначальной системе координат независимо от скорости движения сингулярности в этой системе. Ниже мы покажем, что при космологически большом возрасте Вселенной эта скорость ультрарелятивистская и определяется статистически с учётом механических законов. **Параметры $\varkappa, \omega$ определяются 4-скоростью** из найденных в этом параграфе условий, но расщепляются на пары очень мало отличающихся значений в зависимости от **пара-заряда**, то есть в зависимости от принадлежности к **пара-волне** (пара-заряд 1) или к **анти-волне** (пара-заряд –1).

Несовместность стучаев 1 и 2 препятствует переходам между значениями паразаряда, обеспечивая **сохранение паразаряда** (1.8).

9. Нормирующий множитель нормальной сопутной волны. В силу (3.8) **модуль нормирующего множителя нормальной сопутной волны в обоих случаях одинаков**. Его можно записать, используя второе из условий (5.4):

$$\begin{cases} \omega_R^2 - \varkappa_R^2 - \omega_I^2 + \varkappa_I^2 = k^2 \\ \omega_R \cdot \omega_I = \varkappa_R \cdot \varkappa_I \end{cases}, \tag{1}$$

в виде:

$$|A| = \left|\frac{(\varphi',\ u)}{(\varphi',\ \varphi')}\right| = \left|\frac{4\pi|B|\,\Delta s}{\sqrt{k^4 + 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2}}\right| \cdot \frac{\varkappa_I}{2\pi\,\Delta s} =$$

$$= \frac{2|B|\varkappa_I}{\sqrt{k^4 + 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2}} = \frac{4\pi^2 B_F^4 \varkappa_I}{\sqrt{2\pi|k|(k^4 + 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2)}\,T^{3/2}}, \tag{2}$$

$$|A|^2 = \frac{8\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|(k^4 + 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2)T^3} = \frac{8\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|(k^4 + 4\omega_R^2\omega_I^2)T^3}. \tag{3}$$

Заметим, что к условию $\omega_R \cdot \omega_I = \varkappa_R \cdot \varkappa_I$ следует также добавть условие (2.5) и, при $t > 0$, условие $\omega_I > 0$ (2.2), тогда

$$\varkappa_I > 0,\ \omega_I > 0, \quad \omega_R/|\omega_R| = \varkappa_R/|\varkappa_R| = \omega/|\omega| = \varkappa/|\varkappa|. \tag{4}$$

Нормальные сопутные волны вполне пригодны для функционального анализа космических волн, в отличие от не нормальных сопутных волн, функциональное скалярное произведение которых на космические волны неопределённо, так как зависит от выбора системы отсчёта. Поэтому в дальнейшем **сопутные волны** мы обычно будем понимать в смысле – **нормальные сопутные волны**.

Условия (1),(4) ещё не определяют однозначно параметры сопутной волны. Согласно (3) квадрат заряда сопутной волны пропорционален $|A|^4$ (5.5.9). Ниже мы обоснуем необходимость минимизации квадрата заряда, имеющего размерность действия (**принцип наименьшего действия**), а следовательно и минимизации нормирующего множителя $|A|$. Поэтому выбор соотношения между параметрами $\varkappa_R^2, \varkappa_I^2$ сделаем из **условия минимизации нормирующего множителя** $|A|$.

Пусть значение $\varkappa_I$ произвольно задано. Тогда $|A|^2$ **монотонно** зависит от $\varkappa_R$ так, что чем больше $\varkappa_R$ тем меньше $|A|^2$. Рассмотрим значение $|A|^2$ при двух предельных противоположных условиях для $\varkappa_R^2$, записанных сильными неравенствами:

$$|A|^2\Big|_{4\varkappa_R^2\varkappa_I^2 \ll k^4} = \frac{8\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|^5 T^3}, \tag{5}$$

$$|A|^2\Big|_{4\varkappa_R^2\varkappa_I^2 \gg k^4} = \frac{2\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|\varkappa_R^2\varkappa_I^2 T^3} \ll \frac{8\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|^5 T^3}. \tag{6}$$

Откуда ясно, что минимизации $|A|^2$ отвечает условие (6). Таким образом

$$|A|^2 = \frac{2\pi^3 B_F^8 \varkappa_I^2}{|k|\varkappa_R^2\varkappa_I^2 T^3} = \frac{2\pi^3 B_F^8}{|k|\varkappa_R^2 T^3}, \quad 4\varkappa_R^2\varkappa_I^2 \gg k^4. \tag{7}$$

Отсюда также видно, что при заданном произведении $\varkappa_R^2\varkappa_I^2$, с точки зрения уменьшения значения $|A|^2$, выгодно увеличение $\varkappa_R^2$ за счёт уменьшения $\varkappa_I^2$, то есть минимизации $|A|^2$ отвечает также условие

$$\varkappa_I^2 \ll \varkappa_R^2. \tag{8}$$

С учётом неравенства $4\varkappa_R^2\varkappa_I^2 \gg k^4$ можно записать

$$\frac{k^4}{4\varkappa_R^2} \ll \varkappa_I^2 \ll \varkappa_R^2. \tag{9}$$

В пункте 3 мы потребовали ограничение на порядок величины $\varkappa_I^2$:

$$\varkappa_I^2 \gg 1/T. \tag{10}$$

что совместимо с предыдущим неравенством. Из (9) также следует

$$k^2 \ll 2\varkappa_R^2. \tag{11}$$

С учётом 4-скалярности $\varkappa_R\varkappa_I$, из (2) видна необходимость 4-скалярности отдельно $\varkappa_I$, а следовательно и всего $\varkappa$

$$\varkappa \text{ – 4-скаляр}, \tag{12}$$

что, однако, не распространяется на ω.

10. Ультрарелятивистский случай для сопутных волн. Ниже мы покажем, что компонента u^{02} 4-скорости сопутных волн в изначальной системе координат имеет космологически большое значение порядка

$$u^{02} \sim T, \tag{1}$$

то есть каждая сопутная волна движется сугубо с ультрарелятивистской скоростью относительно Начала. Это означает, что с космологической степенью точности, в обоих случаях (состояниях) сопутной волны

$$u^{02} \approx \mathbf{u}^2 \gg 1, \quad \varkappa_R^2 - \varkappa_I^2 = \operatorname{Re} \varkappa^2 = u^{02} k^2 \gg k^2. \tag{2}$$

То есть в ультрарелятивистском случае выражения для скорости сопутных волн можно записать в виде

$$u^\mu = \frac{1}{|k|}(\sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2}, \mathbf{e}_u \sqrt{\varkappa_R^2 - \varkappa_I^2}). \tag{3}$$

С учётом условия (9.8)

$$\varkappa_R^2 \gg \varkappa_I^2, \tag{4}$$

можно написать

$$\varkappa_R^2 = \varkappa^2 = k^2 u^{02}, \quad \varkappa_R^2 \gg \varkappa_I^2. \tag{5}$$

Откуда

$$\varkappa^2 \gg k^2 \tag{6}$$

и поскольку $\omega^2 - \varkappa^2 = k^2$, то

$$\omega^2 \approx \omega_R^2 \approx \varkappa^2 = k^2 u^{02} \gg k^2. \tag{7}$$

В более общем виде, в ультрарелятивистском состоянии, имеем (учитывая, что $\omega_R \cdot \omega_I = \varkappa_R \cdot \varkappa_I$)

$$u^\mu = \frac{1}{|k|}(|\omega|, \mathbf{e}_u|\omega|) = \frac{1}{|k|}(|\varkappa|, \mathbf{e}_u|\varkappa|), \quad \omega^2 = \varkappa^2 \gg \varkappa_I^2 = \omega_I^2, \quad \omega^2 \approx \omega_R^2,$$

$$\varkappa^2 \approx \varkappa_R^2, \tag{8}$$

в частности для временно́й и пространственной компонент имеем

$$\omega^2 = \varkappa^2 = k^2 u^{02},$$

тогда

$$|A|^2 = \frac{2\pi^3 B_F^8}{|k|^3 u^{02} T^3} = \frac{2\pi^3 B_F^8}{|k| \omega^2 T^3}. \tag{9}$$

11. Гэп. Разницу между параметрами пара- и анти- сопутных волн будем называть **гэпом**. С учётом (8.8), для угловых частот пара- и анти- сопутных волн можно написать

$$\Delta\omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 = 2k^2 \approx 2\omega\Delta\omega. \tag{1}$$

Это выражение для **частотного гэпа**. Откуда

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx k^2/|\omega|, \quad |\omega| \approx |\omega_1| \approx |\omega_2|. \tag{2}$$

На том же основании для модуля волнового вектора пара- и анти- сопутных волн можно написать

$$\Delta\varkappa = \varkappa_2 - \varkappa_1 \approx k^2/\varkappa, \quad \varkappa \approx \varkappa_1 \approx \varkappa_2. \tag{3}$$

Заметим, что гэпы (8.5),(8.8) **инвариантны**. (4)

Так как в ультрарелятивистском случае

$$\omega^2 = \varkappa^2 = k^2 u^{02}, \tag{5}$$

то в этом случае имеем выражение для **гэпа темпа** в аналогичном виде

$$\Delta u^0 = u_2^0 - u_1^0 = 1/u^0, \quad u^0 \approx u_1^0 \approx u_2^0 > 1. \tag{6}$$

Так как частота ω_1 определена для анти-волн, а ω_2 – для пара-волн, то **гэп частоты, а следлвательно и темпа положителен**

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0, \quad \Delta u^0 = u_2^0 - u_1^0 > 0. \tag{7}$$

§2. Условно инвариантные величины.

1. Условия инвариантности. Величина называется **ковариантной**, если однозначно определён закон её изменения при любом преобразовании системы координат. Ковариантными являются, например, компоненты 4-векторов. Но **инвариантами** (не зависящими от выбора системы координат) эти компоненты не являются.

Ковариантная величина, не являющаяся инвариантом по общему определению (например энергия), может быть доопределена принадлежностью к определённой системе отсчёта (например, как энергия покоя, то есть масса) Тогда эта величина становится (**условным инвариантом**). Её **условием инвариантности** является измерение в изначальной (реликтовой) системе отсчёта, определённой универсально для всей Вселенной (например, средний темп протистона. В этом же смысле инвариантен возраст T Вселенной. Ещё одним примером условно инвариантной величины является плотность покоя (7.1.6).

2. Двойной тензорный смысл величины возраста Вселенной. Заметим, что скаляр T (возраст Вселенной) можно понимать как временну́ю координату

изначальной системы, где протистон находится вблизи начала пространственных координат, то есть можно использовать **временно́е представление** $T = t^0$. Это всегда можно делать при достаточно малой рассматриваемой области. С другой стороны, можно использовать **скалярное представление** T, как интервала до Начала. То есть, с учётом этих замечаний, величина T может с космологической точностью рассматриваться (локально) и как временна́я координата изначальной (реликтовой) системы и как скаляр. Тогда, например, производные $d\mathcal{E}/dT$ и dm/dT обе могут локально рассматриваться как скаляры, но, конечно, не равные друг другу ($\mathcal{E} = mu^0$). Космологически большой возраст Вселенной часто позволяет в физических задачах пренебрегать даже очень большими его приращениями, которые относительно являются малыми.

3. Полный и световой возраст Вселенной. Видимый (световой) диаметр Вселенной $R_V = R/2$ в два раза меньше полного возраста Вселенной T (рис. 108.1).

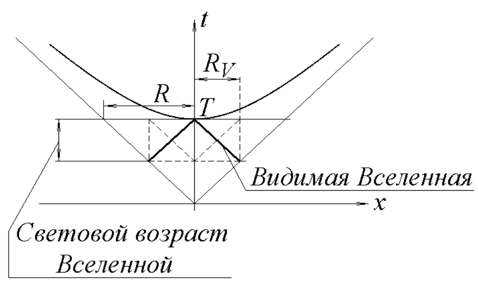


Рис. 108.1.

Соответственно, **световой возраст Вселенной** в 2 раза меньше полного возраста Вселенной.

В литературе обычно даётся полный возраст Вселенной, так как считается $T = 1/H$.

§3. 4-ток нормальных сопутных волн.

1. Плотность 4-тока нормальной сопутной волны. Согласно определению плотности 4-тока:

$$j^\mu = (j_0, \mathbf{j}) = \frac{i}{2}(\varphi\nabla^\mu\varphi^* - \varphi^*\nabla^\mu\varphi), \quad \nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \ \nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \tag{1}$$

в сопутствующей системе плотность 3-тока нормальной сопутной волны (1.3.1) (помеченной здесь штрихом, чтобы ниже отличать её от полной сопутной волны)

$$\varphi' = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)}, \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^2 \tag{2}$$

равна величине

$$\mathbf{j}' = -\frac{i}{2}(\varphi'\nabla\varphi'^* - \varphi'^*\nabla\varphi') =$$

$$= -\frac{i|A|^2}{2}\left(-i\frac{\varkappa}{r^2} - \frac{1}{r^3} - i\frac{\varkappa}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\mathbf{e}_r = -\frac{|A|^2\varkappa}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{3}$$

независимо от частоты ω, а её плотность заряда равна

$$j_0' = \frac{i}{2}\left(\varphi'\frac{\partial}{\partial t}\varphi'^* - \varphi'^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi'\right) = \frac{i|A|^2}{2r^2}(-i\omega - i\omega) = \frac{|A|^2\omega}{r^2}, \tag{4}$$

независимо от $\varkappa$. Таким образом **плотность 4-тока нормальной сопутной волны** выражается через почти вещественный (1.10.5), (1.10.7) (в ультрарелятивистском случае) 4-вектор

$$K^\mu = (\omega, -\varkappa\mathbf{e}_R) \to (\omega_R, -\varkappa_R\mathbf{e}_R) \tag{5}$$

в виде

$$j'^\mu = (j^0, \mathbf{j}) = \frac{|A|^2}{r^2}\,K^\mu. \tag{6}$$

Является ли ток втекающим или вытекающим, а точечный заряд соответственно положительным или отрицательным, определяют знаки величин $\varkappa, \omega$. При $\omega/|\omega| = \varkappa/|\varkappa| = (+1, -1)$, ток (3) соответственно **втекающий,вытекающий**. (7)

2. 4-ток нормальной сопутной волны. Заряд внутри сферы радиуса r (исключая особую точку $r = 0$):

$$q_r' = 4\pi\int\limits_0^r j'^0 r^2\,dr = 4\pi|A|^2\omega r = \varepsilon_q 4\pi|A|^2|\omega|r = \varepsilon_q 4\pi|A|^2|k|u^0 r, \tag{1}$$

где (6.1.2.3) $\varepsilon_q = \omega/|\omega| = \varepsilon_k = k/|k| = \pm 1.$ (2)

Интеграл (1) расходится на изотропном конусе ($r \to T$).

Радиальный ток I_r' через сферическую границу радиуса r не зависит от значения этого радиуса, а его направление определяет знак $\varkappa$

$$I_r' = -\frac{\varkappa}{|\varkappa|}4\pi r^2|\mathbf{j}'| = -4\pi|A|^2\varkappa = -\frac{8\pi^4 B_F^8}{|k|\varkappa T^3}. \tag{3}$$

Это означает, что единственным источником (или стоком) этого **сплошного тока** может быть только особая точка $r = 0$. При этом (в силу закона сохранения заряда) она должна содержать **точечный заряд** q', изменение которого обеспечивает этот ток. Интегрирование этого тока по элементам ds собственного времени точечного заряда приводит к монотонному изменению точечного заряда в одном из направлений времени. Поскольку амплитуда сопутной волны бесконечна при нулевом возрасте Вселенной, то следует принять, что точечный заряд на изотропном конусе Вселенной (при $T = 0$) бесконечен, а затем монотонно уменьшается (по модулю) с возрастом Вселенной (то есть при $T \to \infty, s \to \infty$). Поэтому точечный

заряд убывает в собственном времени пропорционально радиальному току ($dq' = -I'_r\,ds$)

$$q' = -\int\limits_s^\infty I'_r\,ds = -4\pi\int\limits_s^\infty |A|^2\varkappa\,ds = \frac{-8\pi^4 B_F^8}{|k|}\int\limits_s^\infty \frac{ds}{\varkappa T^3}, \qquad (4)$$

$$I'_r = -\frac{dq'}{ds}. \qquad (5)$$

Заметим, что остальной непрерывно распределённый (**сплошной**) заряд q'_r сопутной волны не локален, так как он пропорционален r.

Точечность зарядов, создающих ток I', означает также, что их суммарный ток I'_n изнутри любой замкнутой поверхности равен

$$I'_n = -\sum_{i=1}^{n}\frac{8\pi^4 B_F^8}{|k|\varkappa_i T^3}, \qquad (6)$$

где n – число точечных зарядов внутри этой замкнутой поверхности, $\varkappa_i$ – значение $\varkappa$ для i-того точечного заряда.

Конечность модуля точечного заряда сопутной волны совместима только с его убыванием с возрастом Вселенной. При этом знак $\varkappa$ сопутной волны совпадает со знаком частоты согласно (1.9.5) и второму из условий (1.9.1), что определяет пара-заряд

$$q_p = \varkappa/|\varkappa| = \omega/|\omega|. \qquad (7)$$

3. Точечный заряд нормальной сопутной волны. Для нормальной сопутной волны

$$|\varkappa| = |k|u^0, \quad (1.11.5). \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$ds = dT/u^0, \qquad (2)$$

имеем (с учётом (2.7) и (2.2))

$$q' = -\int\limits_T^\infty \frac{I'_r}{u^0}\,dT = \frac{-8\pi^4 B_F^8}{|k|}\int\limits_T^\infty \frac{dT}{\varkappa u^0 T^3} = \frac{\varepsilon_q 8\pi^4 B_F^8}{k^2}\int\limits_T^\infty \frac{dT}{u^{02}T^3}, \qquad (3)$$

$$I'_r = -u^0\frac{dq}{dT}, \qquad (4)$$

где u^{02} – квадрат временно́й компоненты **4-скорости** u^μ **точечного заряда** сингулярности сопутной волны в изначальной системе.

Таким образом точечный заряд нормальной сопутной волны в любой изначальной системе определяется инвариантным образом относительно преобразований Лоренца. Учитывая, что при космологически большом возрасте Вселенной, его относительное изменение для реального наблюдателя практически

незаметно, можно вообще говорить об инвариантности точечного заряда, рассматривая возраст Вселенной T как **космологическую константу**, однако имея в виду её очень медленное (**вековое**) изменение.

4. Полная сопутная волна. Нормальная сопутная волна в **комплексном виде**

$$\varphi' = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t+\varkappa r)}, \quad \omega^2 - \varkappa^2 = k^2, \tag{1}$$

является компонентой единого поля, соответствующей спектральным точкам с частотой ω. Заметим, что **объективность сопутной волне** даёт её корреляция с полным единым полем. Статистически это сводится к корреляции с **глобальной волной** (6.3.5.10). А так как глобальной волне в любой инерциальной системе координат соответствует нулевой заряд и почти постоянное значение частоты ω, то нормальные сопутные волны статистически объединяются в нейтральные инерциальные пары с одинаковым модулем частоты, образующие **полную сопутную волну** (6.4.3.4)

$$\varphi = \frac{A}{r}\left(\mathrm{e}^{i(\omega t+\varkappa r)} + \mathrm{e}^{-i(\omega t-\varkappa r)}\right) = \frac{2A}{r}\mathbf{e}^{i\varkappa r}\cos\omega t, \tag{2}$$

которая имеет двойную среднюю плотность 3-тока относительно волны (1), но пульсирующую согласно положительному множителю $4\cos^2\omega t$. Кроме того полная сопутная волна отличается тем, что не имеет непрерывно распределённого (сплошного) заряда (1.4), а имеет лишь точечный заряд, удвоенный (в среднем) по сравнению с волной (1). Поэтому **заряд полной сопутной волны является локальным**, образуя **точечный заряд**. Более подробно 4-ток полной сопутной волны будет рассмотрен в главе 10.

Общий вид полной сопутной волны, не зависящий от выбора начала отсчёта времени:

$$\varphi = \frac{2A}{r}\mathbf{e}^{i\varkappa r}\cos(\omega t + \phi), \tag{3}$$

где ϕ – **начальная фаза полной сопутной волны**.

Хотя полная сопутная волна наиболее фундаментальна, её анализ гораздо удобнее в комплексном представлении, что мы и будем обычно делать. Ввиду возможности пренебрежения сплошными зарядами по сравнению с точечными (см. следующий пункт), эти представления практически эквивалентны (с точностью до множителя 2) за исключением случая, когда имеет значение **микропульсация точечного заряда полной сопутной волны** (см. главу 10 и главу 5 второй части). Поэтому точечный 4-ток полной φ и нормальной φ' сопутных волн с космологической точностью связаны соотношением

$$j^\mu = 2j'^\mu. \tag{4}$$

5. О заряде сопутных волн. Все сопутные волны удовлетворяют уравнению КГФ, что означает сохранение заряда для каждой такой волны в отдельности и для

любой их суперпозиции. Согласно (1.4) знак плотности сплошного электрического заряда определяется знаком частоты ω нормальной сопутной волны. А для полной сопутной волны плотность сплошного заряда равна 0, но отлична от нуля плотность пространственно-подобного радиального тока, от направления которого зависит точечный заряд в центре. Знак этого заряда зависит от направления радиального тока. Согласно (2.2),(1.9.4)

$$q/|q| = \omega/|\omega| = \varkappa/|\varkappa| = \varepsilon_k = \varepsilon_q. \tag{1}$$

4-скорость сопутной волны, вообще говоря может быть любой, но в реликтовой системе отсчёта эта 4-скорость связана с параметрами сопутной волны одним из двух способов (1.8.1),(1.8.2), определяющих паразаряд сопутной волны, имеющий соответственно 2 значения

$$q_p = (-1, +1). \tag{2}$$

Квадраты временны́х компонент 4-скорости при разных значениях q_p всегда отличаются на одну и ту же величину $u_2^{02} - u_1^{02} = 2$, что при характерной ультрарелятивистской скорости сопутных волн в реликтовой системе, делает различие паразарядов относительно очень малым.

§4. Анализ единого поля полными сопутными волнами.

1. Представление космического поля системой сопутных волн и полем их взаимодействия. Поскольку функциональная проекция сопутной волны на космическое поле конечна, а сопутные волны с разными параметрами линейно независимы, то космическое поле может быть спроектировано на систему таких волн.

Разность между космическим полем и такой его проекцией мы назовём **полем взаимодействия**). Это поле скалярное. Минимизация его функционального модуля означает наилучшее представление космического поля суммой этих сопутных волн. Минимизация возможна подходящим выбором системы сопутных волн по их числу и параметрам.

Поле взаимодействия удовлетворяет космическому волновому уравнению КГФ, так как является линейной комбинацией полей, удовлетворяющих этому уравнению. Поэтому поле взаимодействия имеет 11 интегралов движения (3 постоянных разделения и 8 постоянных интегрирования), то есть 11 сохраняющихся однокомпонентных величин. Иначе говоря, для таких полей существуют 11 законов сохранения. Один из них должен быть отождествлён с законом сохранения заряда. Остальные 10 законов могут быть представлены как механические законы сохранения, следующие из подходящего представления уравнения КГФ в лагранжевой форме. Поле взаимодействия является скаляром, поэтому его можно рассматривать как плотность действия. Тогда минимизация поля взаимодействия сводится к принципу наименьшего действия при любом выборе

обобщённых координат. Выберем обобщённые координаты как у электромагнитного лагранжиана. Этим самым поле взаимодействия мы отождествляем с плотностью электромагнитного действия. Определив таким образом электромагнитное взаимодействие, мы берём на себя задачу сведения любых взаимодействий (**кроме гравитационного**) к электромагнитному, считая его **универсальным**.

В результате этой минимизации мы получим **квантовое представление космического поля** системой точечных зарядов сопутных волн в поле их взаимодействия. Поле взаимодействия можно разложить на **регулярную часть**, поддающуюся аналитическому описанию в виде **макроскопического электромагнитного поля** и оставшуюся часть, которую мы будем называть **электромагнитным шумом**. Согласно электромагнитным представлениям, поле взаимодействия не включает самих точечных зарядов, поэтому его нужно определить так, чтобы его заряд, осреднённый по большим элементам объёма был нулевым. Тогда, с учётом ортогональности плотностей точечных зарядов, средняя плотность заряда космического поля должна быть равна средней плотности заряда системы сопутных волн. При этом можно легко найти среднюю концентрацию c_q точечных зарядов во Вселенной, деля среднюю плотность заряда ϱ космического поля на величину q точечного заряда сопутной волны

$$c_q = \frac{\varrho}{q}. \tag{1}$$

2. Что определяет конкретную мировую линию точечного заряда (протистона). Решить вопрос о характере движения точечных зарядов (**протистонов**) сопутных волн можно опираясь на законы сохранения, вытекающие из инвариантного вида волнового уравнения единого поля. Из него сразу вытекает закон сохранения электрического заряда, а после представления его в лагранжевой форме возникают понятия ещё 10 сохраняющихся (механических) величин. Закон сохранения механических величин можно сформулировать в виде вариационного принципа экстремального действия Гамильтона. Этот принцип позволяет максимально полным образом определить траектории сингулярностей (точечных зарядов). Однозначность такого определения точечных зарядов позволяет говорить об их **объективности.**

3. Виртуальные и реальные сопутные волны. Для представления космических полей сопутными волнами нам пришлось постепенно переходить от самых абстрактных сопутных волн ко всё более и более конкретным. На каждой ступени конкретизации система сопутных волн приобретает всё новые свойства. Выделение из бесконечного множества всевозможных, абстрактных (**виртуальных**) сопутных волн, только тех, которые образуют наиболее точное представление космического поля, придаёт таким виртуальным волнам (точечным зарядам) объективность, конкретность, делает их **реальными**.

4. Осреднённая плотность (+) и (−)точечных зарядов во Вселенной. (+)частотные (ПЧ) и (−)частотные (ОЧ) компоненты глобального поля есть

осреднённые (по спектру) ПЧ и ОЧ компоненты единого поля. Точечный заряд образует временіподобную компоненту 4-тока и (+)компонента этого заряда не нейтрализуется (−)компонентой, так как эти заряды точечны и создаются полями с независимыми спектрами, что делает совпадение (+)точечного заряда с (−)точечным зарядом почти невозможным. Плотности пространственноподобного 4-тока (непрерывные токи) двух компонент (ПЧ и ОЧ) в среднем нейтрализуют друг друга. Поэтому осреднённую плотность (+)точечных зарядов можно приравнять к плотности заряда ОЧ компоненты глобального поля, а осреднённую плотность (−)точечных зарядов можно приравнять к плотности заряда ПЧ компоненты глобального поля.

Как ПЧ так и ОЧ компоненты единого поля удовлетворяют уравнению КГФ. Поэтому заряды этих компонент, рассматриваемых независимо друг от друга, должны сохраняться так же как и заряд обеих компонент, взятых в сумме. Поэтому существуют **раздельные законы сохранения (+)точечных зарядов и (−)точечных зарядов**, то есть – **зарядов одного знака**.

Если знать среднее значение отдельного точечного заряда, то можно вычислить среднюю их концентрацию во Вселенной.

§5. Элементарный заряд. Основная и эталонная метрики.

1. Космологическое растекание заряда. При равномерном распределении точечного заряда q_v **одного знака** (сплошной заряд нейтрализован (4.4.*)) в абсолютном пространстве расширяющейся Вселенной, его плотность

$$\varrho(T) = \frac{q_v}{V(T)}, \quad q_v = \text{const} \tag{1}$$

является плотностью заряда космической волны, которая известна. Здесь q_v – сохраняющийся заряд одного знака в расширяющемся (вместе со Вселенной) объёме $V(T)$ постоянной формы. В частности, для шарового объёма

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad r \sim T. \tag{2}$$

В расширяющейся Вселенной

$$\frac{dr}{r} = \frac{dT}{T}. \tag{3}$$

Из (1) и (2)

$$q_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho(T). \tag{4}$$

Малое изменение Δr радиуса r шара за время ΔT:

$$\Delta r = r\,\frac{\Delta T}{T}. \tag{5}$$

Малое изменение ΔV шарового объёма V за время ΔT:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \; \Delta r = 4\pi r^3 \, \frac{\Delta T}{T}. \tag{6}$$

При этом плотность заряда изменяется на величину

$$\Delta \varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial V} \Delta V = \frac{-q_v}{V^2} \Delta V, \tag{7}$$

то есть новое значение ϱ:

$$\varrho + \Delta \varrho = \frac{q_v}{V} - \frac{q_v}{V^2} \Delta V = \frac{q_v}{V} \left(1 - \frac{\Delta V}{V} \right) \approx \frac{q_v}{V} = \varrho. \tag{8}$$

то есть при $\Delta V \ll V$, изменением плотности заряда можно пренебречь и тогда заряд в приращённом объёме ΔV:

$$\Delta q_{\Delta v} = \varrho \, \Delta V = \frac{q_v}{V} 4\pi r^3 \frac{\Delta T}{T} = \frac{q_v}{V} 3V \frac{\Delta T}{T} = 3q_v \frac{\Delta T}{T}. \tag{9}$$

А **в прежнем объёме** V_0 заряд соответственно уменьшится то есть изменится на противоположную величину

$$\Delta q_v = -3 q_v \frac{\Delta T}{T}, \tag{10}$$

В пределе $\Delta T \to 0$ это выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{dq_v}{q_v} = -3 \frac{dT}{T}, \quad V_0 = \text{const}, \tag{11}$$

решением которого является зависимость

$$q_v = \frac{\text{const}}{T^3}, \quad V_0 = \text{const}. \tag{12}$$

То есть q_v можно рассматривать как сумму точечных зарядов в постоянном объёме V_0. Нормированность амплитуды сопутной волны требует чтобы **точечные заряды не сливались и не дробились**. Это означает, что **число точечных зарядов в постоянном объёме V_0 в среднем постоянно**.

2. Скорость точечного заряда. Из предыдущего пункта следует, что если для последней формулы под постоянным объёмом V_0 понимать **средний объём V_1, занимаемый одним точечным зарядом** q, то

$$q = \frac{\varepsilon_q \, k_q}{T^3}, \tag{1}$$

где k_q – пока неопределённая **положительная постоянная**. Сравнивяя с ранее полученным выражением (3.3.3) (учитывая (3.4.4)):

$$q = \frac{\varepsilon_q 16\pi^4 B_F^8}{k^2} \int\limits_T^\infty \frac{dT}{u^{02} T^3}, \tag{2}$$

получаем для временнóй компоненты u^0 4-скорости точечного заряда (**в изначальной системе координат**) выражение

$$u^{02} = \check{u}^{02} = \frac{16\pi^4 B_F^8 T}{3k^2 k_q} = \frac{T}{2^4 3\pi^4 k^2 k_q}. \tag{3}$$

Это выражение обеспечивает заряду в форме (2) требуемую формулой (1) зависимость от T, которая чаще будет применяться в виде:

$$q^2 = \frac{k_q^2}{T^6}. \tag{4}$$

В дальнейшем мы покажем, что возраст Вселенной имеет порядок $T \sim 10^{60}$, поэтому формула (3) очень хорошо удовлетворяет неравенству $u^0 \ll T$.

Из (3) следует, что при достаточно большом возрасте Вселенной **скорости точечных зарядов сугубо ультрарелятивистские**

$$u^{02} \gg 1. \tag{5}$$

Ультрарелятивистские значения u^0 имеют принципиальное значение для дальнейшего развития теории, поэтому теория работоспособна при условии достаточно большого возраста Вселенной:

$$T \gg \frac{3k^2 k_q}{16\pi^4 B_F^8}. \tag{6}$$

Заметим, что локальные значения k_q, u^0 не детерминированы формулами (1) и (2). Формула (3) определяет связь лишь их глобальных значений. При этом глобальное значение k_q определяется в (5.2) как среднее локальных значений. А **глобальное значение** $\check{u}^0$ неходится из (3) как пока неопределённая статистическая характеристика локальных значений темпов протистонов u^0, которую необходимо согласно (II.7.3.5.9) определить следующим осреднением

$$1/\check{u}^0 = \langle 1/u^0 \rangle, \tag{7}$$

обеспечивающим универсальную определённость понятия массы связанных частиц. Заметим, что из (7) следует

$$\langle \check{u}^0/u^0 \rangle = 1. \tag{8}$$

3. Точечные заряды во Вселенной. Глобальную концентрацию $\varrho = \varrho_\pm$ точечных зарядов (каждого знака) можно найти, деля плотность заряда космической волны (7.4.4.2)

$$\check{\varrho} = \frac{\pm 2\pi^3 B_F^8}{T^3} = \frac{\varepsilon_q 2\pi^3 B_F^8}{T^3} \tag{1}$$

на один точечный заряд

$$q = \frac{\varepsilon_q k_q}{T^3}, \tag{2}$$

то есть получим для глобальной концентрации выражение

$$\check{c}_q = \frac{\varrho}{q} = \frac{2\pi^3 B_F^8}{k_q}. \tag{3}$$

Откуда видно, что **глобальная концентрация точечных зарядов не зависит от** T и **одинакова для обоих знаков**. Значения модулей точечных зарядов каждого знака медленно убывают с возрастом Вселенной, что не противоречит их сохранению в силу уравновешивания сплошными токами.

Так как концентрация, как и должно быть, оказалась положительной, то равенство (1) определяет **смысл знаков ± для плотности заряда** (и вообще – 4-тока).

Результат о независимости от T концентрации точечных зарядов важен. Он говорит о том, что во Вселенной пополнение количества точечных зарядов происходит вблизи её границы. В приграничной области регулярно рождаются пары мировых линий точечных зарядов.

Благодаря независимости концентрации от T, легко вычисляется общее **число** N_U **точечных зарядов в пространстве Вселенной**

$$N_U = \frac{4}{3}\pi \check{c}_q T^3 = \frac{8\pi^4 B_F^8 T^3}{3k_q} = \frac{T^3}{2^5 3\pi^4 k_q}. \tag{4}$$

Значение константы k_q мы определим позже. Из (2) видно, что она имеет смысл объёма, умноженного на заряд. Обратим внимание, что **концентрация** $\check{c}_q$ **является инвариантом**. (5)

4. Статистическое представление непрерывных зарядов точечными. Человек, как наблюдатель всех физических процессов, состоит из частиц вещества, сводящихся к точечным зарядам. То есть все взаимодействия наблюдателя со средой сводятся к взаимодействиям точечных зарядов. Поэтому познавательно ценным является представление непрерывных зарядов точечными зарядами. Это возможно только статистически с применением понятия **плотности вероятности местоположения точечного заряда**. Существенно, что согласно (3.1) и (3.2) между средней плотностью заряда ϱ космической волны и значением точечного заряда имеется простая связь:

$$\check{\varrho} = 2\pi^3 B_F^8 q/k_q = \frac{q}{2^7\pi^5 k_q}. \tag{1}$$

По смыслу формулы (2.1) выражение (1) справедливо не только для глобальной плотности заряда, но и для её локально осреднённых значений. Тогда плотность одиночного точечного заряда можно записать в виде

$$\mathring{\varrho} = q\delta(\mathbf{r}) = 2^7\pi^5 k_q \varrho\delta(\mathbf{r}) = 2^7\pi^5 k_q \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{2}$$

δ-функцию в сферических координатах можно записать в виде

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}, \tag{3}$$

что при интегрировании её в сферических координатах даёт 1.

5. Единицы измерения интервала. Согласно (2.1), от постоянной k_q зависит средний объём, занимаемый одним точечным зарядом. Величина этого объёма зависит не только от распределения точечных зарядов, но и от единицы измерения интервала (в частности возраста Вселенной). Эту единицу мы уже определили постоянным коэффициентом преобразования Фурье от единого спектра к единому полю. При этом коэффициент k_q не может быть выбран произвольно, так как от этого выбора зависит **смысл единицы измерения интервала**, а согласно определению (2.1), значение k_q должно быть выбрано так чтобы был **равен 1 средний объём, занимаемый одним точечным зарядом любого знака**. Тогда **глобальная средняя плотность заряда каждого знака будет численно равна абсолютной величине заряда**

$$\varrho = |q|, \quad V_1 = 1 \tag{1}$$

и согласно (4.1) определится значение k_q в виде

$$k_q = \frac{1}{2^7\pi^5}, \quad V_1 = 1. \tag{2}$$

Такой выбор величины k_q будем называть **естественным нормированием плотности заряда**. Вместе с плотностью заряда **нормируется заряд** (2.4). Связь заряда с его электромагнитным полем и единицы измерения электромагнитного поля мы определим в соответствующей главе.

Тогда из (2.3)

$$\check{u}^{02} = \frac{T\cdot 2^7\pi^5}{2^4 3\pi^4 k^2} = \frac{8\pi T}{3k^2}, \tag{3}$$

а из (3.3) в изначальной (реликтовой) системе координат

$$\check{c}_q = 2\pi^3 B_F^8 \cdot 2^7\pi^5 = 1. \tag{4}$$

Как $\check{u}^0$ так и $\check{c}_q$ можно рассматривать как **условные инварианты** (2.1.*), то есть они одинаковы в любой изначальной (реликтовой) системе координат.

Статистический смысл постоянных величин $\check{u}^0, \check{c}_q$ не запрещает им изменяться локально, поэтому следует различать их локальные значения u^0, c_q и глобальные значения $\check{u}^0, \check{c}_q$, являющиеся **постоянными компонентами** локальных значений:

$$u^0 = \check{u}^0 + \delta u^0, \quad c_q = \check{c}_q + \delta c_q, \tag{5}$$

где $\delta u^0, \delta c_q$ – **локальные вариации**. Глобальные значения универсальны, а локальные значения зависят от места и, вообще говоря, от знака заряда. Поэтому,

не противореча своему определению, вообще говоря, **величины** u^0, c_q **могут изменяться** (локально) и зависеть от знака заряда. Однако, как мы ниже увидим

$$\delta u^0 \ll u^0, \quad \delta c_q \ll c_q \tag{6}$$

везде, кроме интегрируемых особенностей, так что при достаточно больших элементах осреднения

$$u^0 \to \check{u}^0 \to \text{const}, \quad c_q \to \check{c}_q \to \text{const}. \tag{7}$$

Поэтому **непостоянство** u^0, c_q **может быть существенным только при осреднении по достаточно малым элементам 4-объёма**. При увеличении элемента осреднения сначала исчезает зависимость локальных вариаций от знака заряда, так как статистически заряды стремятся к взаимной нейтрализации (то есть к выравниванию их концентраций). Оставшиеся при этом локальные вариации, не зависящие от знака заряда, назовём **гравитационными вариациями**. Разность между общими локальными вариациями и гравитационными вариациями будем называть **электромагнитными вариациями**. Смысл всех этих **статистических вариаций** прояснится ниже.

Величина ϱ определена как постоянная 3-плотность (1), поэтому она может иметь только **микроскопические флуктуации**, в отличие от u^0, c_q, имеющих вариации, не ограниченные условием постоянства среднего значения. (8)

Электрический заряд (3.2),(5.2) выражается через возраст Вселенной и поэтому является космологически постоянной величиной

$$q = \frac{\varepsilon_q}{2^7 \pi^5 T^3}, \tag{9}$$

хотя если определить единицу заряда пропорциональной $1/T^3$, то он будет точно постоянной величиной.

Очевидно, $1/\check{c}_q$ имеет смысл 3-объёма, поэтому величина $1/\sqrt[3]{\check{c}_q}$ имеет смысл интервала (длины, времени). Универсальность этой величины позволяет использовать её в качестве единицы интервала в прямой **основной метрике**. В качестве единицы (**эталона**) интервала можно также использовать значения величины $1/\sqrt[3]{c_q}$, но её локальные изменения требуют геометризации пространства, то есть представления его искривлённым в соответствии с **эталонной метрикой**.

Так как гравитацию удаётся интерпретировать геометризацией 4-пространства (например в ОТО), то поле c_q связано с **гравитационным полем**. В ДФ такая геометризация возможна, но не является необходимой как в ОТО, то есть ДФ может рассматриваться как **биметрическая теория гравитации** по типу РТГ Логунова или подходящего варианта ОТО. **Геометризация гравитации** может быть полезной в смысле использования понятий **локальных эталонов интервала** и **геометрической оптики**.

6. Космологическое движение точечных зарядов.
Нормированность амплитуды сопутных волн и существование отдельных законов сохранения для положительных и отрицательных зарядов не позволяет их взаимного уничтожения и обратного процесса – рождения пар. Но **постоянство осреднённой по Вселенной концентрации точечных зарядов требует пополнения их убыли от расширения Вселенной, что возможно только на изотропном конусе Начала, являющемся особой гиперповерхностью**. Вблизи границы Вселенной (то есть на изотропном конусе Начала) нарушается условие малости значения T, что не позволяет считать точечные заряды преобладающими над непрерывными (3.6), откуда вытекает **возможность рождения точечных зарядов из сплошных на границе Вселенной**.

То есть **условие постоянства концентрации точечных зарядов нарушается вблизи границы Вселенной**. (1)

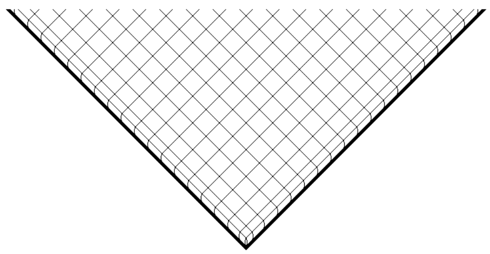


Рис. 108.2.

Рисунок изображает **идеализированную двумерную схему ультрарелятивистского движения точечных зарядов** (5.3) во Вселенной, которые относительно любого наблюдателя либо движутся от него вблизи границы Вселенной, испытывая космологическое ускорение, либо (при благоприятном направлении этого ускорения) когда-то начинают двигаться в сторону наблюдателя. На схеме мировые линии изображены гиперболами с фокусами вблизи границы Вселенной и прямыми асимптотами, так как космологически движение точечных зарядов стремится к **ультрарелятивистскому**.

Рождение точечных зарядов, в силу закона их сохранения может происходить только парами и только вблизи границы Вселенной, где может нарушаться требование постоянной концентрации зарядов, которое опирается на условие космологически большого возраста Вселенной T. Парное рождение точечных зарядов требует **равенство модулей точечных зарядов разных знаков и равенство их числа**. (2)

7. Частицы и анти-частицы. Происхождение пара-заряда связано с необходимостью неравенства $\varkappa_I > 0$ (1.2.5). Так как $|\varkappa_R| \gg |\varkappa_I|$, то инверсия величины $\varkappa$ очень мало отличается от инверсии величины $\varkappa_R$, инвертированному значению которой при сохранении положительного знака $\varkappa_I$ соответствует своя нормальная сопутная волна, отличающаяся лишь малым гэпом от исходной. Таким образом **инверсия** $\varkappa = \varkappa_R + i\varkappa_I$ **изменяет пара-заряд на противоположный**, так как $\varkappa_I$ не может инвертироваться. (1)

При этом согласно (1.9.4) инвертируется и знак ω, а согласно (3.2.2) и знак электрического заряда q, равный знаку ω. Вообще говоря, **знаки электрического и пара-заряда могут как совпадать так и быть противоположными, хотя инвертируются вместе**. (2)

В согласии с (1.8.*) **пара-простоны** будем относить к пара-волнам, для которых частота $|\omega_2|$ чуть больше, чем для анти-волн частота $|\omega_1|$ (1.11.7). Соответствующие анти-волнам протистоны будем называть **анти-протистонами**. Тогда пара-заряды анти-протистонов q_{p1} и пара-протистонов q_{p2}:

$$q_{p1} = -1, \quad q_{p2} = +1. \tag{3}$$

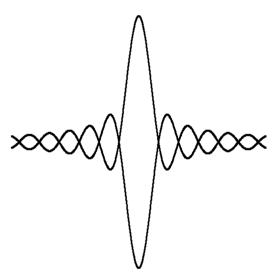
Ниже мы покажем, что существуют стационарные метаболирующие состояния движения протистонов (**квантовые частицы**), которые образуют наблюдаемое **вещество**. Каждая квантовая частица характеризуется конечным набором **квантовых чисел**. Например, сам протистон вполне определяется параметрами $\varkappa, \omega$ своей сопутной волны.

Сложные квантовые частицы характеризуются своими квантовыми числами, зависящими от квантовых чисел протистонов. Для них существуют понятия **пара-** и **анти-частиц**, которые тесно связаны с непростым понятием **аннигиляции** (II.7.10.1.*).

⋆⋆⋆

Зри в корень.

Козьма Прутков.



Глава 9. АБСТРАКТНАЯ МЕХАНИКА

(**Теория сохраняющихся абстрактных величин**).

Абстрактная механика рассматривает свойства сохраняющихся величин (инегралов движения) в пространстве-времени, используя так называемый **Лагранжев формализм**. Весь опыт современной физики утверждает существование ровно десяти интегралов движения (4-импульс, 6-компонентный тензор момента импульса), имеющих большую познавательную ценность. Существование интегрального закона сохранения этих величин возможно только в плоском псевдоэвклидовом пространстве-времени. Поэтому геометризация гравитации возможна лишь в биметрических теориях (типа РТГ Логуноваа). Лагранжев формализм непосредственно соединяет математику с физикой, отождествляя многие математические понятия с физическими. В частности, механическая система может рассматриваться как математическое понятие.

§1. Метризованные системы величин.

1. Обобщённые координаты и обобщённые производные Любое множество величин $\{q_a\}$, являющихся функциями координат метрического пространства $\{x_\nu\}$ (**метрических координат**), будем называть **метризованной системой величин**. В частности, различные системы координат (в том числе криволинейные) являются метризованными системами величин.

Величины q_a, дифференцируемые по метрическим координатам, будем называть **обобщёнными координатами** метризованной системы величин. Например, в механике полей пространственно-временные координаты являются метрическими координатами, а их функции (поля) – обобщёнными. (Сами метрические координаты, как мы покажем в §2.1 нельзя рассматривать как обобщённые.)

Производные $\partial q_a/\partial x^\nu = \dot{q}_{a\nu} = q_{a,\nu}$ будем называть **обобщёнными производными** метризованной системы величин. В частности, при $x_\nu = t$ их будем называть также **обобщёнными скоростями** метризованной системы величин.

Для случая криволинейного метрического пространства $\{x_\nu\}$ заметим, что так как обобщённые производные определяются не в ковариантном смысле, то если какие-либо обобщённые кординаты образуют компоненты тензора в пространстве $\{x_\nu\}$, то соответствующие обобщённые производные могут образовывать тензор лишь в специальных случаях. Именно такой случай, как мы увидим ниже, реализуется для векторного потенциала электромагнитного поля, рассматриваемого в качестве обобщённых координат.

Обычно под $\{x_\nu\}$ мы будем понимать четырёхмерное псевдоэвклидово пространство с прямой метрикой. При этом координаты x^ν не обязательно прямолинейные (но ортогональные). **В этой главе** под x^0 будем понимать времениподобную координату, в частности, прямое время t, а под x_1, x_2, x_3 – пространственноподобные , в частности, прямолинейные декартовы координаты x, y, z.

Таким образом, **абстрактная механика определена в четырёхмерном псевдоэвклидовом плоском пространстве**. Применение её в кривых пространствах, вообще говоря, возможно лишь постольку, поскольку эти кривые пространства связаны с псевдоэвклидовым плоским 4-пространством.

2. Уравнения связи. Обобщённые координаты и обобщённые производные, вообще говоря, могут зависеть друг от друга. Эти зависимости, даваемые в общем виде выражением

$$\varphi_j(q_1, ..., q_n,\ \frac{\partial q_1}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial q_n}{\partial x_0},\ \frac{\partial q_1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial q_n}{\partial x_1},\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial q_n}{\partial x_2},\ \frac{\partial q_1}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial q_n}{\partial x_3}) = 0,$$

будем называть **дополнительными условиями** или **уравнениями связи**.

Например, в механике точечных объектов (материальных частиц) положение частиц задаётся пространственными координатами, но здесь это не метрические, а обобщённые координаты, которые зывисят друг от друга, определяя мировую линию частицы.

Если для метризованной системы заданы уравнения связи, то такую систему будем называть **системой со связями**.

§2. Механические системы.

1. Обобщённые уравнения Лагранжа. 4-плотность функции Лагранжа и действия. Механические системы. (Сравни с [Савельев, с. 144].) Если существует такая **скалярная** функция $\Lambda(q_a, \dot{q}_{a\nu})$ обобщённых координат метризованной системы величин и их обобщённых производных, которая удовлетворяет

уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q_{a\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} = 0, \quad a = 1, 2, ..., \quad \dot q_{a\nu} = \partial q_a/\partial x^\nu \tag{1}$$

(подразумевается суммирование по $\nu = 0, 1, 2, 3$),

называемым **обобщёнными уравнениями Лагранжа**, то такая функция называется **4-плотностью функции Лагранжа замкнутой механической системы** (сравни с [Савельев, с. 147]). Иногда 4-плотность функции Лагранжа замкнутой механической системы кратко называют **лагранжианом**.

Обратим внимание на то, что 4-плотность функции Лагранжа замкнутой механической системы (по определению) не зависит **явно** от метрических координат (то есть, хотя и зависит, то только через промежуточные аргументы: обобщённые координаты и их производные). Заметим также, что если в качестве обобщённых координат выбрать метрические координаты, то обобщённое уравнение Лагранжа теряет смысл, так как производные обобщённых координат по им самим превращаются в константы (0 или 1) и дифференцирование по этим константам бессмысленно, хотя можно использовать подходящий предельный переход. Таким образом, **обобщённые производные должны быть не постоянными функциями метрических координат**

$$\partial q_a/\partial x^\nu \neq \mathrm{const}\,(x^\nu) \tag{2}$$

(что может быть не обязательно для **незамкнутых механических систем**).

Величину Λ, рассматриваемую как функцию метрических (а не обобщённых) координат, будем называть **4-плотностью действия**.

Если 4-плотность функции Лагранжа замкнутой механической системы может быть представлена суммой нескольких функций, каждая из которых зависит лишь от части обобщённых координат и соответствующих обобщённых производных всей системы, то об этих функциях будем говорить как о **4-плотностях функции Лагранжа (лагранжианах) соответствующих подсистем** данной механической системы. Такие 4-плотности функции Лагранжа могут не удовлетворять обобщённому уравнению Лагранжа, при этом сответствующие подсистемы будем называть **незамкнутыми механическими системами**.

2. Функция Лагранжа. Уравнение Лагранжа (Сравни с [Савельев 1 (40.7), (40.13)]). Функцию

$$L = L(x^0, q_a, \partial q_a/\partial x^0) = \int \Lambda(q_a, \dot q_{a\nu})\; dv, \tag{1}$$

где интегрирование произвдится по всему трехмерному пространству ($dv = dx^1 dx^2 dx^3$), будем называть **функцией Лагранжа механической системы**. В отличие от Λ, L – не инвариант, поэтому, вообще говоря, зависит от единственной 4-координаты x^0, по которой не производится интегрирование.

Из этого определения и обобщённого уравнения Лагранжа (после его интегрирования по dv) следует, что для **замкнутой механической системы** имеет место уравнение:

$$\frac{d}{dx^0}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0, \tag{2}$$

(где $\dot{q}_a = \dot{q}_{a0} = q_{a,0} \quad a = 1, 2, ...$). Уравнения (2) называются **уравнениями Лагранжа** замкнутой механической системы.

3. Удельная сила. Сила. Третий закон Ньютона. Пусть плотность функции Лагранжа замкнутой системы представима в виде суммы

$$\Lambda(q_1, \dot{q}_{1\nu}, ..., q_a, \dot{q}_{a\nu}, ..., q_n, \dot{q}_{n\nu}) = \Lambda_1(q_1, \dot{q}_{1\nu}) + ... + \Lambda_n(q_n, \dot{q}_{n\nu}), \tag{1}$$

где под q_a можно понимать сразу несколько обобщённых координат. Тогда n функций $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ будем называть **функциями Лагранжа механических подсистем данной замкнутой системы**. Вообще говоря, подсистемы могут быть как замкнутыми так и не замкнутыми, то есть могут не удовлетворять обобщённому уравнению Лагранжа. Таким образом возникает понятие **незамкнутой механической системы**. В силу обобщённого уравнения Лагранжа для данной замкнутой системы можно написать

$$f_1 + ... + f_a + ... + f_n = 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\tfrac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{1\nu}} - \tfrac{\partial \Lambda}{\partial q_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\tfrac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{n\nu}} - \tfrac{\partial \Lambda}{\partial q_n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Функции $f_1, ..., f_n$ будем называть **обобщёнными удельными силами** (или **плотностями силы**) на подсистемах $1, ..., n$. Интегралы

$$\begin{aligned} F_1 &= \textstyle\int f_1 \, dv = \tfrac{d}{dx^0}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{10}} - \tfrac{\partial L}{\partial q_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdot \\ F_n &= \textstyle\int f_n \, dv = \tfrac{d}{dx^0}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n0}} - \tfrac{\partial L}{\partial q_n} \end{aligned} \tag{4}$$

будем называть **обобщёнными силами**, действующими на подсистемы $1, ..., n$. Очевидно

$$\sum_{a=1}^{n} F_a = 0. \tag{5}$$

Это условие выражает **третий закон Ньютона**. Выражения (4) при заданных F_a будем называть **уравнениями Лагранжа для незамкнутой механической системы**. Условие (5) является необходимым и достаточным для того чтобы незамкнутые части системы образовали систему, подчиняющуюся уравнению

Лагранжа, то есть оно **замыкает** незамкнутую систему. Так как понятие силы возникает только для незамкнутой механической системы, **то сила характеризует степень влияния этих частей друг на друга**, то есть степень зависимости движения одной части от движения другой. В этом смысл понятия **взаимодействия**.

Поскольку сила, действующая на данную подсистему, может быть представлена суммой сил на остальных подсистемах, взятых с обратным знаком

$$F_b = -\sum_{\substack{a=1 \\ a\neq b}}^{n} F_a,$$

то о силе, действующей на данную подсистему, можно говорить как о сумме **сил, действующих со стороны других подсистем**, или о сумме **реакций других подсистем**, понимаемых как силы на этих подсистемах, взятые с обратным знаком.

4. Сохранение (инвариантность) свойства замкнутости механической системы в преобразованиях обобщённых координат. В обобщённых уравнениях Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} = 0 \tag{1}$$

заменим обобщённые координаты q_a $(a = 1, 2, ..., n)$ на обобщённые координаты r_b $(b = 1, 2, ..., n)$, то есть

$$\begin{gathered} q_1 = q_1(r_1, r_2, ..., r_n), \\ q_2 = q_2(r_1, r_2, ..., r_n), \\ \dots\dots\dots \\ q_n = q_n(r_1, r_2, ..., r_n). \end{gathered} \tag{2}$$

Разумеется, значения 4-плотности действия Λ, как скалярной функции метрических координат x^ν, не зависят от замены обобщённых координат. Умножив обобщённое уравнение Лагранжа (1) на $\partial q_a/\partial r_b$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{a,\nu}} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial r_b} - \frac{\partial \Lambda}{\partial r_b} = 0. \tag{3}$$

Из формул (2)

$$q_{a,\nu} = \frac{\partial q_a}{\partial r_b} r_{b,\nu}. \tag{4}$$

Так как $\partial q_a/\partial r_b$ не содержат обобщенных производных $r_{b,\nu}$, то, дифференцируя (4) по $r_{b,\nu}$, имеем

$$\frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial r_{b,\nu}} = \frac{\partial q_a}{\partial r_b}.$$

Используя это равенство в (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{a,\nu}} \cdot \frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial r_{b,\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial r_b} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Lambda}{\partial r_{b,\nu}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial r_b} = 0,$$

что является обобщённым уравнением Лагранжа в обобщённых координатах r_b, то есть **замкнутость механической системы не зависит от преобразования обобщённых координат**. (Напомним, что при этом обобщённые координаты должны не быть постоянными функциями метрических координат (1.2).)

5. 4-плотность действия как инвариантная характеристика механической системы. Итак, замкнутая механическая система остаётся таковой при любых преобразованиях обобщённых координат (при условии (1.2)). При этом 4-плотность действия остаётся неизменной, то есть **4-плотность действия определяется как характеристика механической системы, не зависящая от произвола в выборе обобщённых координат**. Кроме того 4-плотность действия является скаляром, то есть **4-плотность действия не зависит от преобразований метрических координат**. 4-плотность действия можно представить как сложную функцию метрических координат. Тогда промежуточные аргументы являются обобщёнными координатами и обобщёнными производными, а 4-плотность действия является 4-плотностью функции Лагранжа этих обобщённых координат и обобщённых производных.

6. Основные понятия вариационного исчисления. Следуя [Тракимус], дадим краткую сводку этих понятий. Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y \in M$ по некоторому закону поставлено в соответствие определённое число F, то говорят что в классе M определён **функционал** F, и пишут $F = F[y]$. Класс M функций $y(x)$, на котором определён функционал $F[y]$, называется **областью задания функционала**. Кривые (функции) $y(x)$, на которых сравниваются значения функционала $F[y]$, называются **допустимыми** или **кривыми (функциями) сравнения**. Дадим пример функционала: Если M – совокупность всех непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, то функционалом от $y(x)$ является, **например**, значение определённого интеграла от функции $y(x)$, вычисленного на этом отрезке.

Основная задача вариационного исчисления – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается.

Вариацией (Ли) или **приращением** δy аргумента $y(x)$ функционала $F[y]$ называется разность между двумя близкими функциями $y_1(x)$ и $y(x)$, принадлежащими выбранному классу M:

$$\delta y = y_1(x) - y(x), \quad y_1 \to y. \tag{1}$$

Говорят, что кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, **близки в смысле близости нулевого порядка**, если для заданного $\varepsilon > 0$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо: $|y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$. Геометрически это означает, что эти кривые на отрезке $[a, b]$ **близки по ординатам**.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ **близки в смысле близости k-го порядка**, если для заданного $\varepsilon > 0$ и для всех $x \in [a,b]$ выполняется: $|y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$, $|y'(x) - y_1'(x)| < \varepsilon, \ldots$, $|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| < \varepsilon$. Если кривые близки в смысле близости k-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Расстоянием между кривыми $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, где $y(x)$ и $y_1(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, называется неотрицательное число ρ_0, равное максимуму $|y(x) - y_1(x)|$ на отрезке $[a,b]$:

$$\rho_0 = \rho_0[y(x), y_1(x)] = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - y_1(x)|. \tag{2}$$

Пусть кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные n-го порядка. **Расстоянием n-го порядка между кривыми** $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ называется наибольший из максимумов следующих величин: $|y(x) - y_1(x)|, |y'(x) - y_1'(x)|, \ldots, |y^{(n)}(x) - y_1^{(n)}(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Будем обозначать это расстояние так:

$$\rho_n = \rho_n[y(x), y_1(x)] = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)|. \tag{3}$$

ε-окрестностью n-го порядка кривой $y = y(x)$ называется совокупность кривых $y = y_1(x)$, расстояния n-го порядка которых от кривой $y = y(x)$ меньше ε: $\rho_n = \rho_n[y(x), y_1(x)] < \varepsilon$.

ε-окрестность нулевого порядка называют **сильной ε-окрестностью функции** $y = y(x)$. Сильная ε- окрестность кривой $y = y(x)$ состоит из кривых, расположенных в полоске ширины 2ε вокруг кривой $y = y(x)$.

ε-окрестность первого порядка называют **слабой ε-окрестностью функции** $y = y(x)$.

Пусть функционал $F[y]$ задан на множестве M функций $y(x)$. **Приращением функционала** $F[y]$, отвечающим приращению δy аргумента, называется величина

$$\Delta F = \Delta F[y(x)] = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)] \tag{4}$$

$$(\delta y(x) = y_1(x) - y(x), \text{ где } y(x) \in M, \; y_1(x) \in M).$$

Если приращение функционала $\Delta F = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta F = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\|\delta y\|$, где $L[y(x), \delta y]$ – линейный по отношению к δy функционал и $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е. $L[y(x), \delta y]$, называется **вариацией функционала** и обозначается δF. В этом случае функционал $F[y]$ называется **дифференцируемым** в точке $y(x)$.

Можно также дать **второе определение вариации функционала**: Вариацией функционала $F[y]$ в точке $y = y(x)$ называется значение производной функционала $F[y(x) + \alpha\, \delta y(x)]$ по параметру α, когда $\alpha = 0$:

$$\delta F = \frac{d}{d\alpha} F[y(x) + \alpha\, \delta y(x)]_{|\alpha=0}. \tag{5}$$

Если существует вариация функционала как главная линейная часть его приращения, то есть в смысле первого определения, то существует и вариация как значение производной по параметру α при $\alpha = 0$ и эти вариации совпадают.

Говорят, что функционал $F[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ **максимума**, если значения функционала $F[y]$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $F[y_0]$, то есть

$$\Delta F = F[y] - F[y_0] \leqslant 0. \tag{6}$$

Если $\Delta F \leqslant 0$, причём $\Delta F = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается **строгий максимум**. Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется **минимум**. В этом случае $\Delta F \geqslant 0$ на всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

Говорят, что функционал $F[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ **сильного относительного максимума**, если для всех допустимых кривых $y = y(x)$, расположенных в некоторой ε-окрестности **нулевого** порядка кривой $y = y_0(x)$, имеем $F[y] \leqslant F[y_0]$. Аналогично определяется **сильный относительный минимум функционала**.

Говорят, что функционал $F[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ **слабого относительного максимума**, если для всех допустимых кривых $y = y(x)$, расположенных в некоторой ε-окрестности **первого** порядка кривой $y = y_0(x)$, имеем $F[y] \leqslant F[y_0]$. Аналогично определяется **слабый относительный минимум функционала**.

Максимумы и минимумы (сильные и слабые) функционала $F[y]$ называют **относительными экстремумами**. Всякий сильный экстремум есть в то же время и слабый, но не наоборот. Экстремум функционала $F[y]$ на всей совокупности функций, на которых он определён, называется **абсолютным экстремумом**. Всякий абсолютный экстремум является слабым и сильным относительным экстремумом, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным.

Необходимое условие экстремума: Если дифференцируемый функционал $F[y]$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$ имеем $\delta F[y_0(x)] = 0$. Функции, для которых $\delta F = 0$, **в вариационном исчислении называют стационарными функциями**.

Дифференциал dy является изменением значения функции $y(x)$ при бесконечно малом изменении значения аргумента x

$$dy = y(x_1) - y(x), \quad \text{при } x_1 \to x. \tag{7}$$

В отличие от дифференциала, **вариация функции** δy является бесконечно малым изменением функции y (в некотором классе допустимых функций) и поэтому δy **является функцией**.

Если множество допустимых функций образует **линейное пространство**, то есть любая линейная комбинация допустимых функций является допустимой

функцией, **то вариация Ли допустимых функций линейна**. В частности

$$\delta(y+z) = y_1(x) + z_1(x) - y(x) - z(x) = \delta y + \delta z,$$

$$\delta(cy) = cy_1(x) - cy(x) = c\,\delta y \tag{8}$$

и, с учётом линейности дифференциала,

$$\delta\ dy = dy_1(x) - dy(x) = d(y_1(x) - y(x)) = d\ \delta y. \tag{9}$$

Согласно (6.1) вариация Ли определена независимо от дифференциалов координат, то есть не зависит от метрики системы координат, поэтому сам **оператор** $\delta = \delta_L$ **вариации Ли** можно рассматривать как скалярный оператор, хотя сама вариация является тензором того же типа, что и тензор к которому она применена. Надо иметь в виду, что **более общее** понятие вариации может включать в себя и изменение системы координат. Оператор такой вариации, вообще говоря, нельзя считать скаляром (инвариантом).

Как всякую функцию, вариацию можно интегрировать или вообще брать от неё функционал F, который в случае его линейности является вариацией δF функционала, которая сама является функционалом. В частности, если $F(y) = \int y(x)\,dx$, то **для линейного пространства функций** $y(x)$

$$\delta F(y) = \int \delta y(x)\,dx, \tag{10}$$

что при данном $F(y)$ следует и из (5):

$$\delta F(y) = \frac{d}{d\alpha}\int [y(x) + \alpha\,\delta y(x)]dx = \int \delta y(x)\,dx.$$

Если функция $y(x)$ представлена сложной функцией $y(x) = y(f(x))$, то её вариацию Ли можно представить в виде

$$\delta y(x) = \frac{y(f'(x)) - y(f(x))}{f'(x) - f(x)}(f'(x) - f(x))_{|f'\to f} = \frac{\partial y}{\partial f}\delta f, \tag{11}$$

в частности, при $f(x) = x$, $f'(x) = x + \delta x$, где δx означает **вариацию Ли аргумента функции** $y(x)$, не изменяющую координату x рассматриваемой точки, имеем

$$\delta y(x) = \frac{\partial y}{\partial x}\delta x. \tag{12}$$

Вообще говоря, величина f может быть не только скаляром и быть не единственным промежуточным аргументом функции $y(x)$. Обобщение очевидно.

Заметим, что **вариация Ли ковариантна**, то есть не зависит от метрики, так как определена в одной точке x.

7. Принцип экстремального действия (Гамильтона). (Сравни с [Савельев 1, с. 145]). **Действием** механической системы назовём скалярную величину

$$S = \int \Lambda(q_a, \dot{q}_{a\nu})\, d\Omega \quad (d\Omega = dt\, dv). \tag{1}$$

Для краткости под q_a будем понимать всю совокупность обобщённых координат системы. Используя (2.1), действие можно представить также в виде

$$S = \int_1^2 dt \int \Lambda\, dv = \int_1^2 L\, dt. \tag{2}$$

(Напомним, что при этом обобщённые производные не должны лишь быть постоянными функциями метрических координат (1.2)).

С механической точки зрения действие является функционалом, в котором роль независимых переменных играют обобщённые координаты и их производные.

Покажем, что обобщённые уравнения Лагранжа получаются как решения вариационной задачи на экстремумы действия (так называемый **принцип экстремального действия**, или **принцип Гамильтона**). Для этого вычислим вариацию действия (1) по формуле (6.11) и приравняем ее нулю.

$$\delta S = \int (\sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a}\delta q_a + \sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta \dot{q}_{a\nu}) d\Omega. \tag{3}$$

Согласно соотношению (6.9)

$$\delta \dot{q}_{a\nu} = \delta \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta q_a.$$

Осуществив такую замену, получим

$$\delta S = \int (\sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a}\delta q_a + \sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta q_a) d\Omega. \tag{4}$$

По правилам дифференцирования произведения

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a) = \sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta q_a + \sum_a \delta q_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}.$$

Первая сумма в правой части тождественна со вторым членом подинтегрального выражения в формуле (4). Поэтому можно написать

$$\delta S = \int [\sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a}\delta q_a + \sum_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a) - \sum_a \delta q_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}] d\Omega. \tag{5}$$

Вторая из сумм:

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a)$$

есть 4-дивергенция вектора, ν-я компонента которого равна

$$\sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a.$$

Поэтому, воспользовавшись 4-мерным аналогом теоремы Остроградского-Гаусса [Савельев (XII.72)], второй из трех интегралов в формуле (5) можно заменить интегралом по замкнутой гиперповерхности, ограничивающей 4-объём, по которому осуществляется интегрирование в (5):

$$\int \sum_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a) d\Omega = \oint \sum_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\delta q_a \ df_\nu. \quad (6)$$

Однако на границе рассматриваемого 4-объёма вариации $\delta q_a = 0$. Поэтому интеграл (6) равен нулю, так что в формуле (5) остаются только первая и третья суммы. Мы объединим их, вынеся за скобки общий множитель δq_a:

$$\delta S = \int \sum_a (\frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}}) \ \delta q_a d\Omega. \quad (7)$$

В силу произвольности вариации δq_a полученное выражение может равняться нулю только в том случае, если равны нулю все выражения в скобках. Таким образом мы приходим к обобщённым уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} = 0 \ \ (a = 1, 2, ...).$$

Таким образом понятие лагранжиана даёт простой универсальный способ определения механических систем скалярной функцией обобщённых координат и их производных по метрическим координатам. Такие механические системы могут быть как полями так и точечными объектами (материальными точками). Их уравнениями движения являются обобщённые уравнения Лагранжа, которые получаются из лагранжиана применением принципа наименьшего действия. Такой универсальный способ описания механических систем называется **лагранжевым формализмом**. Лагранжев формализм позволяет ввести понятие **сохраняющихся механических величин** для замкнутых механических систем, сохранение которых является **главной познавательной ценностью механики**. Понятие силы позволяет обобщить применение сохраняющихся механических величин к незамкнутым механическим системам, составляющих замкнутую систему.

§3. Особенности механических систем со связями.

1. 4-плотность функции Лагранжа системы со связями. Если на механическую систему с 4-плотностью функции Лагранжа $\Lambda(q_a, \dot{q}_a)$, $(a = 1, 2, ..., n)$, где q_a представляет собой все n обобщённых координат, наложить дополнительные условия (уравнения связи)

$$\varphi_j(q_a, \dot{q}_a) = 0, \quad (j = 1, 2, ..., m, \ m < n), \tag{1}$$

то функция $\Lambda(q_a, \dot{q}_a)$, вообще говоря, перестанет удовлетворять обобщённым уравнениям Лагранжа, то есть она в этом случае не может называться 4-плотностью функции Лагранжа замкнутой системы. Однако, согласно **методу множителей Лагранжа** [Корн, с. 348,], роль 4-плотности функции Лагранжа в этом случае может играть другая функция:

$$\Lambda_c(q_a, \dot{q}_a) \equiv \Lambda(q_a, \dot{q}_a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x^\mu)\, \varphi_j(q_a, \dot{q}_a), \quad \lambda_j = \lambda_j(q_a, \dot{q}_a), \tag{2}$$

где неизвестные функции $\lambda_j(x^\mu)$ называются **множителями Лагранжа**. Если задача имеет решение, то $n + m$ функций $q_a, \dot{q}_a, \lambda_j$ определяются через $q_a, \dot{q}_a$, из m уравнений (1) и n обобщённых уравнений Лагранжа (в вариационном исчислении – уравнений Эйлера):

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Lambda_c}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \frac{\partial \Lambda_c}{\partial q_a} = 0.$$

Лагранжианы Λ и Λ_c определяют разные механические системы, но между ними есть связь, представляемая выражением (2).

2. Функция Лагранжа и действие системы со связями. Функция Лагранжа и действие получаются из 4-плотности функции Лагранжа интегрированием соответственно по пространству или по пространству-времени. Но поскольку уравнения связи ограничивают **область определения** 4-плотности функции Лагранжа, вырождая её в гиперповерхности, поверхности или линии, то функция Лагранжа и действие должны выражаться интегралами по соответствующим множествам, определяемым уравнениями связи. В ряде случаев уравнения связи могут и не ограничивать область определения 4-плотности функции Лагранжа.

3. Заданные обобщённые координаты. Если зависимость данной обобщённой координаты от метрических координат является заданной функцией, то вариация этой обобщённой координаты тождественно равна нулю и из принципа наименьшего действия получается уравнение Лагранжа по этой обобщённой координате в виде тождества $0 \equiv 0$. Этот случай можно рассматривать как частный случай системы со связью, накладываемой заданной функцией.

Если существует уравнение связи, позволяющее однозначно выразить одну из обобщённых координат q_a через другие, то координату q_a можно считать

заданной, так как она не может варьироваться независимо от других. При этом она исключается из уравнения Лагранжа. Также исключаются величины, которые постоянны сами или их производные.

4. Компонентные связи координат тензоров. Обобщённая координата, как и обобщённая производная, может быть многокомпонентной величиной. При этом могут быть заданы связи между компонентами. Например, может быть наложено условие симметрии или антисимметрии на пары компонент или условие постоянства какого-либо инварианта тензора и так далее. Связи между компонентами тензорных величин будем называть **компонентными связями**.

§4. Сохраняющиеся величины.

Величины, неизменные при изменении временно́й координаты, называются **сохраняющимися**.

1. Релятивистская механика. Напомним, что под **специальной теорией относительности** мы понимаем не более того, что физические явления происходят в пространстве-времени с псевдоэвклидовой метрикой. То есть **релятивистская механика** это механика систем, метрические координаты которых имеют псевдоэвклидову метрику 4-пространства.

Величины, неизменные при изменении временно́й координаты, называются **сохраняющимися**.

Особо отметим, что основное пространство нашей теории прямое псевдоэвклидовое, поэтому в нём всегда можно выбрать **инерциальную**, то есть движущуюся равномерно и прямолинейно систему координат. При этом мы не утверждаем, что всегда можно выбрать тело, движущееся равномерно и прямолинейно, но инерциальную систему координат можно функционально связать с удобным телом, поле ускорений которого известно, превратив её тем самым в **инерциальную систему отсчёта**. Поэтому в псевдоэвклидовом пространстве **разница между понятиями системы координат и системы отсчёта условная**, вызванная необходимостью привлекать физические тела для измерения их взаимных положений.

2. Тензор плотности энергии-импульса.
(См. [Ландау 2, с. 105]) Обобщенное уравнение Лагранжа замкнутой механической системы (2.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\alpha}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial q} = 0. \tag{1}$$

(Здесь мы перешли к другому обозначению производных и для краткости опустили номер a обобщенной координаты, по которому предполагается суммирование

членов). Так как $\Lambda = \Lambda(q, q_{,\beta})$, то можно записать

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}}\frac{\partial q_{,\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\Lambda}{\partial q}\ q_{,\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}}\frac{\partial q_{,\beta}}{\partial x^\alpha}.$$

(Для нескольких величин $q^{(a)}$ с номером a, справа будет стоять соответствующая сумма членов по a.)

Подставляя сюда $\partial\Lambda/\partial q$ из (1) и замечая, что $\partial q_{,\beta}/\partial x^\alpha = q_{,\beta,\alpha} = q_{,\alpha,\beta}$, находим

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}})q_{,\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}}\frac{\partial q_{,\alpha}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(q_{,\alpha}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}}).$$

Заменив в левой стороне равенства

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\beta}$$

и введя обозначение

$$C_\alpha^{\ \beta} = q_{,\alpha}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\beta}} - \delta^\beta_\alpha\Lambda, \tag{2}$$

напишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial C_\alpha^{\ \beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{3}$$

Из (2) видно, что тензор $C_\alpha^{\ \beta}$, вообще говоря, не симметричен.

Если имеется не одна, а n независимых величин (с номером a) $q^{(a)}$, то вместо (2) надо, очевидно, писать

$$C_\alpha^{\ \beta} = \sum_{a=1}^{n} q^{(a)}{}_{,\alpha}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^{(a)}{}_{,\beta}} - \delta^\beta_\alpha\Lambda, \tag{4}$$

где,

$$\Lambda = \Lambda(q^{(1)}, \dot q^{(1)}, \ldots, q^{(a)}, \dot q^{(a)}, \ldots, q^{(n)}, \dot q^{(n)}).$$

Заметим, что заданные (зависимые) обобщённые координаты, не удовлетворяя уравнению Лагранжа (1), всё же входят в тензор (4), хотя только через член $-\delta^\beta_\alpha\Lambda$.

Условию (3) удовлетворяет не только тензор $C_\alpha^{\ \beta}$, но и всякий другой тензор вида

$$T^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \Psi^{\alpha\beta\gamma} = -\Psi^{\alpha\gamma\beta}, \tag{5}$$

так как тождественно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\Psi^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\partial^2}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\Psi^{\alpha\gamma\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma\partial x^\beta}\Psi^{\alpha\gamma\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\Psi^{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

ввиду антисимметричности **калибровочного тензора** $\Psi^{\alpha\beta\gamma}$ по индексам β, γ. **Свёртка симметричного тензора и антисимметричного всегда равна нулю**.

Каждый вариант выбора калибровочного тензора $\Psi^{\alpha\beta\gamma}$ будем называть **калибровкой тензора плотности энергии-импульса**. Если же такая калибровка обеспечивает симметричность тензора $T^{\alpha\beta}$ **в любой криволинейной системе координат псевдоэвклидова пространства**, то её будем называть **ковариантным симметрированием тензора плотности энергии-импульса**. При этом очевидно все частные производные в (5) должны пониматься в ковариантном смысле. В частности имеем

$$D_\beta D_\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Ковариантно симметрированный тензор

$$T_\alpha{}^\beta = \sum_a q^{(a)}_{,\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(a)}{}_{,\beta}} - \delta^\beta_\alpha \Lambda + g_{\alpha\mu} D_\gamma \Psi^{\mu\beta\gamma} \tag{6}$$

называется **тензором плотности энергии-импульса механической системы**, при этом

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \tag{7}$$

Не симметрированный тензор $C^{\alpha\beta}$ называют часто тоже просто **тензором плотности энергии-импульса**. Мы будем его называть **каноническим тензором плотности энергии-импульса**. Член, добавляемый к каноническому тензору плотности энергии-импульса (**калибровочный член**) для его симметрирования, будем называть **симметрирующим членом** тензора $T^{\alpha\beta}$.

Существование определённого ковариантно симметричного тензора плотности энергии-импульса мы ниже докажем построением такого тензора (**тензора Гильберта**) для конкретного класса лагранжианов.

Следует различать понятие симметрирования произвольного тензора $A^{\mu\nu}$ в смысле

$$A^{\mu\nu}_{sym} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})$$

от симметрирования тензора плотности энергии-импульса, так как эти понятия, вообще говоря, не эквивалентны.

Итак оба тензора $C^{\alpha\beta}$ и $T^{\alpha\beta}$ удовлетворяют **уравнению неразрывности**

$$D_\beta C_\alpha{}^\beta = 0, \quad D_\beta T^\beta_\alpha = 0. \tag{8}$$

Запишем тензор плотности энергии-импульса также в виде:

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} T_\mu{}^\beta = C^{\alpha\beta} + D_\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma} =$$

$$= g^{\alpha\mu} \sum_a q^{(a)}{}_{,\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(a)}{}_{,\beta}} - g^{\alpha\beta} \Lambda + D\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma}. \tag{9}$$

Тензор плотности энергии-импульса часто называют просто **тензором энергии-импульса** (что нельзя путать).

Выражение (9) демонстрирует линейную связь между лагранжианом и тензором плотности энергии-импульса. (10)

3. 4-импульс и его сохранение. Масса. В галилеевых координатах уравнение

$$\frac{\partial T_{\alpha}{}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0, \tag{1}$$

следующее из (2.3), является **дифференциальной формой закона сохранения энергии-импульса замкнутой системы**. ([Ландау 2, (32,4)]). Из него следует сохранение 4-вектора

$$P^{\alpha} = \int T^{\alpha\beta} dS_{\beta} = \int T^{\alpha\beta} e_{\beta}\, dv, \tag{2}$$

где e_{β} – 4-орт ориентированного элемента 3-объёма dS_{β} всего 3-пространства (вообще говоря кривого).

Этот 4-вектор называется **4-импульсом замкнутой системы**. Временна́я компонента $P^0 = \mathcal{E}$ называется **энергией** системы, а пространственная $\mathbf{P}$ – **импульсом** системы. Происхождение термина "импульс" связано с тем, что импульс определяет меру толчка, который производит частица, сталкиваясь с неподвижным объектом [Бергман, с. 52].

Модуль 4-импульса замкнутой системы, взятый со знаком времени, назовём её **массой** m

$$m = \pm\sqrt{P^{\alpha}P_{\alpha}}.$$

Безразмерный 4-вектор

$$u^{\mu} = \frac{P^{\mu}}{m}$$

называется **4-скоростью системы** (2.5.4.3). Тогда

$$P^{\mu} = mu^{\mu} = (mu^0, m\mathbf{u}) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \tag{3}$$

то есть

$$m = \pm|P^{\mu}|, \quad \mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \mathbf{P} = \mathcal{E}\mathbf{v}. \tag{4}$$

Интеграл (2) берётся по гиперповерхности, заключающей в себе всё трёхмерное пространство. В частности, это может быть гиперповерхность $x_0 = const$, тогда $e_{\beta} = e_0$, $T^{\alpha\beta}e_0 = T^{\alpha 0}$ и

$$P^{\alpha} = \int T^{\alpha 0} dv. \tag{5}$$

Это выражение позволяет **обобщить понятие 4-импульса на части замкнутой механической системы**, содержащиеся в произвольных объёмах v_i. Однако такой 4-импульс

$$P_i^{\alpha} = \int\limits_{v_i} T^{\alpha 0} dv \tag{6}$$

будет сохраняться только, если его поток через поверхность, охватывающую объём v_i, равен нулю. Это выражение позволяет рассматривать величину $T^{\alpha 0}$ как **плотность 4-импульса**, так как для элементарного объёма dv иммеем $dP^\alpha = T^{\alpha 0}\,dv$, то есть

$$T^{\alpha 0} = \frac{dP^\alpha}{dv}. \qquad (7)$$

Согласно (6) T^{00} является **плотностью энергии**, T^{k0} – **плотностью импульса** ($k = 1, 2, 3$).

Величина $T^{\alpha 0}$ не является тензором. Но тензором (4-вектором), согласно (5), является элемент импульса $T^{\alpha 0}dv$. Представляя его в виде

$$T^{\alpha 0}dv = \frac{T^{\alpha 0}}{u^0}u^0\,dv$$

где u^0 – временнáя компонента 4-скорости 4-вектора $T^{\alpha 0}\,dv$,

$u^0\,dv = dt\,dv/ds$ – скаляр,

находим (по обратному тензорному признаку), что величина

$$\frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = J^\alpha \qquad (8)$$

является 4-вектором. Причём **направление 4-вектора** J^α **совпадает с направлением 4-вектора** $T^{\alpha 0}\,dv$, **то есть с направлением 4-импульса элемента объёма** dv.

Заметим, что **4-импульс замкнутой системы не зависит от выбора неопределенного тензора** $\Psi^{\alpha\beta\gamma}$, так как

$$\int \frac{\partial\Psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}dS_\beta = \frac{1}{2}\int (dS_\beta\frac{\partial\Psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} - dS_\gamma\frac{\partial\Psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\beta}) = \frac{1}{2}\int \Psi^{\alpha\beta\gamma}df^*_{\beta\gamma},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхнсти (трехмерной), “охватывающей” гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Мы воспользовались обобщением теоремы Гаусса [Ландау, 2, с. 37]

$$\oint A^\mu dS_\mu = \int \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}d\Omega$$

Указанная поверхность находится **на бесконечности** трехмерного пространства, где (хотя бы в силу конечности Вселенной) **считаем поле отсутствующим**, следовательно интеграл равен нулю. Поэтому

$$P^\alpha = \int T^{\alpha 0}dv = \int g^{\alpha\mu}T_\mu{}^0 dv =$$

$$= \int (g^{\alpha\mu}\sum_a q^{(a)},_\mu \frac{\partial\Lambda}{\partial q^{(a)},_0} - g^{\alpha 0}\Lambda + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Psi^{\alpha 0\gamma})dv =$$

$$= \int (g^{\alpha\mu} \sum_a q^{(a)},_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q^{(a)}}{\partial t}} - g^{\alpha 0} \Lambda) dv. \qquad (9)$$

Для того, чтобы записать закон сохранения в эквивалентной (в плоском 4-пространстве) интегральной форме [Нелипа, с. 75], выделим в (1) временну́ю и пространственную части и проинтегрируем по трёхмерному пространству:

$$\frac{d}{dx^0} \int T_\alpha{}^0 \, dv + \int dv \, \frac{\partial}{\partial x^k} \, T_\alpha{}^k = 0.$$

Второй интеграл этого равенства с помощью теоремы Остроградского-Гаусса преобразуем в интеграл по поверхности. Если на бесконечности подинтегральное выражение обращается в 0, что выполняется при конечном 4-импульсе, то этот интеграл обращается в 0. Поэтому закон сохранения в **интегральной форме** примет вид

$$\frac{d}{dx^0} \int T_\alpha{}^0 \, dv = 0$$

или

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{\alpha 0} \, dv = \frac{dP^\alpha}{dx^0} = 0,$$

то есть **4-импульс сохраняется**.

Плотность импульса T^{k0} можно рассматривать как **плотность потока энергии**, так как уравнение (1) при $\alpha = 0$ выражает **закон сохранения энергии**, как частный случай сохранения одной из компонент (нулевой) 4-вектора P^α:

$$\partial T_0{}^\beta / \partial x^\beta = 0. \qquad (10)$$

Нельзя путать **плотность импульса** (**плотность потока энергии**) с **плотностью потока импульса**, о котором мы скажем ниже. Плотность потока энергии является 3-вектором, а плотность потока импульса (который сам 3-вектор) является тензором.

Если тензор энергии-импульса представи́м суммой нескольких тензоров, то критерием независимости соответствующих механических **подсистем** (**частей**) является интегральный закон сохранения энергии-импульса чвстей.

Если же сохранение энергии-импульса частей может быть записано лишь в ковариантных производных, то между частями замкнутой системы существует взаимодействие.

Так как тензор плотности энергии-импульса линеен относительно лагранжиана, то **4-импульс аддитивен относительно независимых обобщённых координат**

$$P^\mu = \sum_{a=1}^n P_a^\mu. \qquad (11)$$

Обобщённые координаты независимы, если лагранжиан представлен в аддитивном виде (3.1.3).

4. 4-вектор плотности потока массы. Рассмотрим 4-вектор (3.8)

$$J^\alpha = \frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = \frac{1}{u^0}\frac{dP^\alpha}{dv} = \frac{1}{u^0}\frac{(u^0\,dm,\ \mathbf{u}\,dm)}{dv} =$$
$$= \frac{(dm,\ (\mathbf{u}/u^0)dm)}{dv} = (\varrho_m, \varrho_m\ \mathbf{v}), \tag{1}$$

где u^μ – 4-скорость плотности потока массы,

$$\varrho_m = dm/dv \tag{2}$$

– плотность массы (не инвариант). Инвариантом является **плотность покоя массы**

$$\varrho_{m0} = \varrho_m/u^0. \tag{3}$$

Согласно (7.1.1.*), величина J^α является **4-вектором плотности потока массы**

$$J^\alpha = (J^0,\ \mathbf{J}) = \varrho_{m0}\, u^\mu, \tag{4}$$

где из (1)

$$J^0 = \varrho_m = \varrho_{m0} u^0, \tag{5}$$

– **плотность массы**,

$$\mathbf{J} = \varrho_m \mathbf{v} \tag{6}$$

– **3-вектор плотности потока массы**.

Найдём 4-дивергенцию 4-вектора J^α.

$$\nabla_\alpha J^\alpha = \nabla_\alpha \frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = \frac{1}{u^0}\nabla_\alpha T^{\alpha 0} + T^{\alpha 0}\nabla_\alpha \frac{1}{u^0}. \tag{7}$$

Если $T^{\alpha 0} = T^{0\alpha}$, то в силу закона сохранения энергии (3.9)

$$\nabla_\alpha J^\alpha = T^{\alpha 0}\nabla_\alpha \frac{1}{u^0} = -T^{\alpha 0}\frac{1}{u^{02}}\nabla_\alpha u^0. \tag{8}$$

Тогда в нерелятивистском случае ($u^0 \to 1$) имеем

$$\nabla_\alpha J^\alpha_{|u^0\to 1} \to 0. \tag{9}$$

В этом случае масса сохраняется, а вообще говоря – нет. Но, зная плотность потока массы, легко найти тензор плотности энергии-импульса и соответствующие сохраняющиеся величины.

Для квадрата плотности покоя потока массы из (4) имеем

$$J^\alpha J_\alpha = \varrho_{m0}^2. \tag{10}$$

5. Аддитивность лагранжианов условно замкнутых систем. Так как обобщённые координаты замкнутой механической системы явно не зависят от

метрических координат, то лагранжиан такой системы определяет её неоднозначно. Эта неоднозначность заключается в том, что соответствующая плотность действия может испытывать произвольные преобразования Лоренца. А если лагранжиан системы представлен суммой лагранжианов замкнутых подсистем, то такие преобразования Лоренца независимо друг от друга могут совершать плотности действия всех этих подсистем.

Всякая незамкнутая механическая система является частью какой-нибудь замкнутой системы (хотя бы Вселенной в целом). По отношению к данной незамкнутой системе, минимальную (в смысле значения массы) систему, которую допустимо считать замкнутой, будем называть **вмещающей** данную систему.

Лагранжиан $\Lambda(q_1, ..., q_a, ..., q_n)$ данной замкнутой системы является функцией обобщённых координат q_a. Его можно множеством способов разложить в сумму некоторых других скалярных функций Λ_i этих обобщённых координат, каждая из которых представляет, вообще говоря, незамкнутую механическую систему (**подсистему**), лагранжиан которой удовлетворяет уравнению (2.3.3)

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \frac{\partial \Lambda_i}{\partial q_a} = f_i,$$

где f_i – сила, действующая на подсистему.

Ясно, что существует произвол в разложении замкнутой системы на незамкнутые. Однако среди незамкнутых систем данного разложения могут существовать такие, которые при достаточно большом удалении от всех других систем этого разложения, могут с достаточной точностью считаться замкнутыми. Такие механические системы будем называть **условно замкнутыми**.

Понятие условно замкнутых механических систем полезно тем, что в состоянии удаления можно дать объективное определение **тензора плотности энергии-импульса условно замкнутых систем** такое же как и для замкнутых систем, делая в других состояниях поправки с помощью сил взаимодействия с другими системами. Поэтому удобно пользоваться разложениями замкнутых систем по замкнутым и условно замкнутым системам.

Пусть механическая система состоит из двух частей A и B, каждая из которых, будучи условно замкнутой, имела бы в качестве лагранжиана соответственно функции $\Lambda_A(q_A, \dot{q}_A)$ и $\Lambda_B(q_B, \dot{q}_B)$, где q_A, $\dot{q}_A$, q_B, $\dot{q}_B$ – совокупность обобщённых координат и обобщённых производных этих систем.

Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь, лагранжиан всей системы стремится к пределу

$$\lim \Lambda(q_A, q_B, \dot{q}_A, \dot{q}_B) = \Lambda_A + \Lambda_B. \qquad (1)$$

Это свойство **аддитивности лагранжианов условно замкнутых систем** выражает тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.

Очевидно, что умножение лагранжиана на произвольную постоянную само по себе не отражается на обобщённых уравнениях Лагранжа. Отсюда, казалось

бы, могла вытекать существенная неопределённость: лагранжианы различных замкнутых механических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные. Свойство аддитивности лагранжианов условно замкнутых систем устраняет эту неопределённость, – оно допускает лишь одновременное умножение лагранжианов всех систем на одинаковую постоянную, что сводится просто к естественному произволу в выборе единиц измерения этой физической величины [Ландау 1, (2,7)].

6. Формальные отличия 4-тока и 4-импульса. Обратим внимание на разницу в характере таких величин как 4-ток и 4-импульс. У 4-тока сохраняется только временна́я компонента, то есть заряд, в то время как у 4-импульса сохраняются все 4 компоненты (энергия и 3 компоненты импульса). В связи с этим, плотность энергии-импульса является 4-тензором, в то время как плотность 4-тока является 4-вектором. В отличие от заряда энергия допускает быть определённой положительно.

7. 3-тензор напряжений. Для выяснения смысла остальных компонент тензора T_α^β напишем уравнения сохранения (3.1) в виде:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0a}}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial T^{a0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ab}}{\partial x^b} = 0. \tag{1}$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объёму пространства V. Из первого имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV + \int \frac{\partial T^{0a}}{\partial x^a}\,dV = 0$$

или, преобразуя второй интеграл по (трёхмерной) теореме Гаусса,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV = -\oint T^{0a}\,df_a, \tag{2}$$

где интеграл справа берётся по поверхности, охватывающей объём V (df_x, df_y, df_z – компоненты трёхмерного вектора элемента поверхности $d\mathbf{f}$). В левой стороне равенства (2) стоит скорость изменения энергии, находящейся в объёме V. Отсюда видно, что выражение справа есть количество энергии, протекающей через границу этого объёма, а вектор $\mathbf{S}$ с составляющими T^{01}, T^{02}, T^{03} есть плотность этого потока - количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключённые в тензорном характере величин $T^{\alpha\beta}$, автоматически приводят к определённой связи между потоком энергии и импульсом: **плотность потока энергии равна плотности импульса**.

Из второго уравнения (1) аналогично находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{a0}\,dV = -\oint T^{ab}\,df_b. \tag{3}$$

Слева стоит изменение импульса системы в объёме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{ab}\,df_b$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из этого объёма. Таким образом, компоненты T^{ab} тензора плотности энергии-импульса составляют трёхмерный тензор плотности потока импульса – так называемый **тензор напряжений**; обозначим его через σ_{ab} $(a, b = x, y, z)$. Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором. Компонента σ_{ab} этого тензора есть количество a-й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси b.

Скорость потока импульса и скорость самого импульса (точнее, скорость потока энергии), вообще говоря, различны, а соотношение этих скоростей зависит от выбора системы отсчёта.

Если $d\mathbf{f}$ рассматривать как элемент границы двух тел, то поток импульса через этот элемент вызывает в каждом из этих тел противоположное по знаку, но одинаковое по модулю изменение импульса в единицу времени, то есть противоположные по направлению, но равные по модулю силы (третий закон Ньютона).

Таким образом, поток импульса через элемент поверхности $d\mathbf{f}$ есть ничто иное как действующая на этот элемент сила. Поэтому $\sigma_{ab}\,df_b$ есть a-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. Поэтому 3-тензор σ_{ab} называют **тензором напряжений**, или **3-тензором плотности потока импульса**.

Таким образом, тензор плотности энергии-импульса в компонентах можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

8. Тензор плотности энергии-импульса в специальных системах отсчёта. Давление. Выбирая скорость системы отсчёта так, чтобы в данной точке эта система сопутствовала 4-вектору плотности потока массы, мы тем самым обратим в ноль плотность импульса и тогда тензор $T^{\alpha\beta}$ в данной точке в этой системе примет вид

$$T^{\alpha\beta}_{|\mathbf{s}=0} = \begin{pmatrix} W_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

где $W_0 = \varrho_{m0}$ – плотность покоя энергии, равная плотности покоя массы.

Такой выбор системы отсчёта допускает ещё любые 3-пространственные вращения, при которых изменяются лишь компоненты 3-тензора σ_{ab}. За счёт этих вращений тензор σ_{ab}, как всякий симметричный 3-тензор, можно привести к

диагональному виду. Тогда и тензор $T^{\alpha\beta}$ приобретает диагональный вид:

$$T^{\alpha\beta}_{diag} = \begin{pmatrix} W_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Заметим, что к диагональному виду нельзя привести тензор плотности энергии-импульса, если 4-вектор плотности потока массы светоподобен, так как не существует системы отсчёта, где в данной точке она сопутствует светоподобному 4-вектору.

Напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ в случае (2) мы будем называть **направленными давлениями**. В 3-изотропном случае давление не зависит от ориентации осей $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ (**закон Паскаля**):

$$p = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}. \qquad (3)$$

В этом случае давление p – 3-скаляр. 3-скалярное понятие давления можно абстрактно обобщить и на анизотропный случай, усредняя направленные давления:

$$p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3. \qquad (4)$$

При этом имеем 4-инвариант

$$Sp\, T^{\alpha\beta} = T^{\alpha}_{\alpha} = W_0 - 3p, \qquad (5)$$

котроый, однако, существует лишь в том случае, если существует некоторый инвариантный способ усреднения, в инерциальной системе отсчёта, сопутствующей данной системе. (Сравни с [Ландау2, с. 117]).

Если тело имеет макроскопические размеры, то обычно не существует такой жёсткой системы отсчёта, относительно которой покоились бы все точки тела. То есть практически всегда тело имеет какие-то **внутренние движения** (например, тепловые колебания). Описание таких тел удобно статистическими способами, абстрагирующими конкретные значения физических величин их статистиками [Корн, с. 607].

9.Момент импульса. 4-тензором **момента импульса** называется величина [Ландау 2, (32,8)]

$$M^{\alpha\beta} = \int (x^{\alpha} dP^{\beta} - x^{\beta} dP^{\alpha}) = \int (x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma}) dS_{\gamma} \qquad (1),$$

где $dP^{\alpha} = T^{\alpha 0}\, dv$ (3.7), dS_{γ} – ориентированный элемент 3-объёма. Очевидно

$$M^{\alpha\beta} = -M^{\beta\alpha}. \qquad (2)$$

Посмотрим, какому условию должен удовлетворять тензор плотности энергии-импульса, чтобы выполнялся **закон сохранения момента импульса**, который

можно выразить в форме равенства нулю 4-дивергенции **4-плотности момента импульса** $M^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}$:

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) = 0. \tag{3}$$

Замечая, что $\partial x^\alpha/\partial x^\gamma = \delta^\alpha_\gamma$ и $\partial T^{\beta\gamma}/\partial x^\gamma = g^{\beta\nu}\partial T^\gamma_\nu/\partial x^\gamma = 0$, находим:

$$\delta^\alpha_\gamma T^{\beta\gamma} - \delta^\beta_\gamma T^{\alpha\gamma} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

То есть **условием сохранения момента импульса является неразрывность и симметричность тензора плотности энергии-импульса**, что предусмотрено в его определении.

10.Необходимость сохранения момента импульса.
Заметим, что весь смысл изобретения плотности функции Лагранжа и связанного с ней **Лагранжева формализма** заключается в отыскании сохраняющихся величин. Познавательная ценность возникающих при этом понятий энергии, импульса, момента импульса заключается в их сохранении. Вместе с моментом импульса число сохраняющихся величин замкнутой механической системы достигает 10, что соответствует числу неопределённых констант (интегралов движения) волнового уравнения КГФ единого поля. Этого соответствия нет при отсутствии сохранения момента импульса, что говорит о необходимости его сохранения из чего вытекает **необходимость симметрии тензора плотности энергии-импульса**. Ниже мы придём к тому же выводу с помощью **теоремы Нётер**.

В заключение параграфа отметим, что мы не рассматриваем понятие функции Гамильтона, так как в релятивистской теории её роль не существенна в силу неинвариантности. Более существенно её применение в нерелятивистской квантовой механике, где важную роль играют скобки Пуассона, связанные с понятием функции Гамильтона.

§5. Сохраняющиеся величины как следствие однородности и изотропности пространства-времени. Спин.

Под **однородностью и изотропностью 4-пространства** мы понимаем ничто иное как инвариантность уравнения Клейна-Гордона-Фока для единого поля относительно любых достаточно гладких преобразований основной системы координат. В силу этого определения **метрика 4-пространства псевдоэвклидова**, так как определяется основной системой координат с этой самой метрикой. Однако сначала мы **рассмотрим более общий случай искривлённой метрики 4-пространства**.

Далее этот параграф содержит **теорему Нётер**, изложенную на основе пересмотра [Логунов, §9].

1. Смысл теоремы Нётер. Каждое физическое поле обычно записывается одно- или многокомпонентной функцией 4-координат, называемой функцией поля или полевой переменной. В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из представлений группы Лоренца, например, скалярное, спинорное, векторное или тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор 4-пространства, который определяет естественную геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчёта. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчёта. Любые преобразования в данной системе координат вида

$$\begin{cases} x'^0 = f^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x'^a = f^a(x^1, x^2, x^3), \quad a = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{1}$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчёта. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчёта. Выбор систем координат производится из **класса допустимых координат**, в котором

$$g_{00} > 0, \quad g_{ab}\, dx^a\, dx^b < 0. \tag{2}$$

Универсальным методом теоретической физики является метод проб и ошибок, долгое применение которого привело к методу **лагранжева формализма**, позволившему дать универсальное определение 11-ти сохраняющимся величинам (4 компоненты 4-импульса, 6 компонент 4-момента импульса и заряд). Успех этого метода основан на том, что физические законы (по их универсальному смыслу) выражаются ковариантными дифференциальными уравнениями, которым можно придать форму уравнений Эйлера (в физике обычно называемых **уравнениями Лагранжа**), используя подходящее **скалярное** поле, называемое **плотностью функции Лагранжа**. Это поле, представленное как функция **обобщённых координат**, называется **Лагранжианом**, который явно не зависит от метрических координат. Интеграл от плотности функции Лагранжа по объёму 4-области называется **действием**.

Плотность лагранжиана является скалярной плотностью, построенной из изучаемых полей, представленных здесь в достаточно общем виде 4-скаляром ψ, 4-вектором A_ν, метрическим тензором и их частными производными по координатам

$$\Lambda = \Lambda(\psi,\, \partial_\mu\psi,\, A_\nu,\, \partial_\mu A_\nu,\, g_{\nu\zeta},\, \partial_\mu g_{\nu\zeta},\, g^{\nu\zeta},\, \partial_\mu g^{\nu\zeta}). \tag{3}$$

Включение сюда метрического тензора позволяет рассматривать кривые пространства. Заметим, что обобщённым координатам, представленным в предыдущих параграфах величиной q^a, здесь соответствуют величины ψ, A_ν. В выражении (3) предполагается отсутствие связей между обобщёнными координатами. Если такие связи есть, то можно исключить связанные координаты,

выражая их через другие, вводя новые независимые обобщённые координаты взамен исключённых, используя при необходимости новые метрические координаты. Все следствия легко обобщаются на любое число независимых скалярных и векторных полей лагранжиана (3), но требуют специального рассмотрения для тензоров других порядков или свед́ения тензоров к скалярам и векторам с учётом компонентных связей.

Если ввести обозначение **производной Эйлера** по обобщённым координатам вида

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \psi} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right), \tag{4}$$

то обобщённые уравнения Лагранжа для независимых полей ψ, A_ν, при **заданном поле метрического тензора** $g^{\nu\zeta}$, запишутся в виде

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \psi} = 0, \quad \frac{\delta \Lambda}{\delta A_\nu} = 0. \tag{5}$$

Метод (функций) Лагранжа даёт возможность получить дифференциальные законы сохранения. Различают два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые. Сильным законом сохранения называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Слабые законы сохранения получаются из сильных, если учесть в них уравнения поля (5). Следует подчеркнуть, что дифференциальные законы сохранения в общем случае пространства с произвольной метрикой не утверждают сохранение чего-либо ни локально ни глобально. Это лишь **уравнения неразрывности**.

Но познавательная ценность механики, как точной науки, заключается в существовании сохраняющихся величин. Необходимым, но недостаточным, условием их существования являются уравнения неразрывности их потоков. Достаточным условием существования сохраняющихся величин являются интегральные законы их сохранения, но они зависят от характера метрики пространства. Этому условию удовлетворяет, например, плоская псевдоэвклидова метрика. Интегрирование выражений в ковариантных производных в произвольной метрике даёт результаты, зависящие от выбора системы координат, что снижает их познавательную ценность.

Вывод дифференциальных законов сохранения (**теорема Нётер**) основан на том, что действие S является скаляром (инвариантом заданной 4-области), поэтому оно не должно изменяться при **бесконечно малых** (**инфинитезимальных**) преобразованиях координат в заданной замкнутой 4-области. Действие для плотности лагранжиана (3) имеет вид

$$S = \int\limits_\Omega d^4x\ \Lambda(\psi,\, \partial_\mu\psi,\, A_\nu,\, \partial_\mu A_\nu,\, g_{\nu\zeta},\, \partial_\mu g_{\nu\zeta},\, g^{\nu\zeta},\, \partial_\mu g^{\nu\zeta}). \tag{6}$$

2. Действие в бесконечно малых преобразованиях координат. Совершим

бесконечно малое преобразование системы координат

$$x^\nu \to x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu, \tag{1}$$

где δx^ν – бесконечно малый 4-вектор.

Так как действие является инвариантом области Ω, то при этом преобразовании оно останется неизменным, а следовательно

$$\delta_c S = \int\limits_{\Omega'} d^4x' \, \Lambda'(x') - \int\limits_{\Omega} d^4x \, \Lambda(x) = 0, \tag{2}$$

где

$$\Lambda'(x') = \Lambda'(\psi'(x'), \, \partial'_\mu \psi'(x'), \, A'_\nu(x'), \, \partial'_\mu A'_\nu(x'),$$
$$g'_{\nu\zeta}(x'), \, \partial'_\mu g'_{\nu\zeta}(x'), \, g'^{\nu\zeta}(x'), \, \partial'_\mu g'^{\nu\zeta}(x')).$$

Первый член в (2) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} d^4x' \, \Lambda'(x') = \int\limits_{\Omega} J \, d^4x \, \Lambda'(x'), \tag{3}$$

где **якобиан** J преобразования равен

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \left\| \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\zeta} \right\|.$$

При преобразовании (1) якобиан имеет вид

$$J = 1 + \partial_\nu \delta x^\nu. \tag{4}$$

Разлагая $\Lambda'(x')$ в ряд Тейлора, с точностью до линейных бесконечно малых имеем

$$\Lambda'(x') = \Lambda'(x) + \delta x^\nu \frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x^\nu} \to \Lambda'(x) + \delta x^\nu \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\nu}$$

и тогда из (2),(3),(4) получим:

$$\delta_c S = \int\limits_{\Omega} d^4x (1 + \partial_\nu \delta x^\nu) \left(\Lambda'(x) + \delta x^\nu \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\nu} \right) - \int\limits_{\Omega} d^4x \, \Lambda(x) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} d^4x \left[\delta_L \Lambda(x) + \partial_\nu \delta x^\nu \cdot \Lambda'(x) + \delta x^\nu \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\nu} + \partial_\nu \delta x^\nu \cdot \delta x^\mu \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\mu} \right]. \tag{5}$$

Здесь мы обозначили

$$\delta_L \Lambda(x) = \Lambda'(x) - \Lambda(x), \quad \Lambda' \to \Lambda. \tag{6}$$

Эта вариация в смысле (2.6.1) здесь записана с индексом L, чтобы избежать путаницы с (1.5), и называется **вариацией Ли**. Она перестановочна с частным дифференцированием (2.6.9)

$$\delta_L \partial_l = \partial_l \delta_L. \tag{7}$$

Выражение (5) с точностью до линейных бесконечно малых можно переписать в виде

$$\delta_c S = \int\limits_{\Omega} d^4x \left[\delta_L \Lambda(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta x^\nu\, \Lambda(x)) \right]. \tag{8}$$

3. Выражения для вариации Ли. Вариация Ли (2.6.1) от плотности функции Лагранжа (1.3) равна (2.6.11)

$$\delta_L \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi}\delta_L \psi + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta_L \partial_\mu \psi + \frac{\partial \Lambda}{\partial A_\nu}\delta_L A_\nu +$$

$$+ \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta_L \partial_\mu A_\nu + \frac{\partial \Lambda}{\partial g_{\nu\zeta}}\delta_L g_{\nu\zeta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu g_{\nu\zeta})}\delta_L \partial_\mu g_{\nu\zeta} +$$

$$+ \frac{\delta \Lambda}{\partial g^{\alpha\beta}}\delta_L g^{\alpha\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})}\delta_L \partial_\mu g^{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Вариация Ли от контравариантных компонент $g^{\alpha\beta}$ является зависимой от вариации ковариантных компонент $g_{\alpha\beta}$, так как согласно (I.2.4.8.7)

$$g_{\nu\zeta} g^{\zeta\alpha} = \delta^\alpha_\nu.$$

Варьируя это равенство согласно (2.6.11) и учитывая постоянство δ^α_ν, имеем

$$g_{\nu\zeta}\, \delta_L g^{\zeta\alpha} = -g^{\zeta\alpha}\, \delta_L g_{\nu\zeta}.$$

(Заметим, что вариация Ли общековариантна, так как производится в одной точке.) Умножая на $g^{\beta\nu}$, получим

$$\delta^\beta_\zeta\, \delta_L g^{\zeta\alpha} = \delta_L g^{\beta\alpha} = -g^{\beta\nu} g^{\zeta\alpha}\, \delta_L\, g_{\nu\zeta}.$$

Переставля симметричные индексы, имеем

$$\delta_L g^{\beta\alpha} = -g^{\nu\alpha} g^{\zeta\beta}\, \delta_L g_{\nu\zeta}. \tag{2}$$

Совершая элементарные преобразования, получим

$$\delta_c S = \int\limits_{\Omega} d^4x \left[\frac{\delta \Lambda}{\delta \psi}\delta_L \psi + \frac{\delta \Lambda}{\delta A_\nu}\delta_L A_\nu + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta \Lambda}{\delta g_{\nu\zeta}} - g^{\nu\alpha} g^{\zeta\beta} \frac{\delta \Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \delta_L g_{\nu\zeta} + \nabla_\mu J^\mu \right] = 0, \tag{3}$$

где, с учётом перестановочности дифференцирования и вариации Ли,

$$J^{\mu} = \Lambda\,\delta x^{\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\delta_L\psi + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\delta_L A_{\nu} +$$

$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g_{\nu\zeta})}\delta_L g_{\nu\zeta} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g^{\alpha\beta})}\delta_L g^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

В произвольных координатах три последних слагаемых являются 4-вектором только в сумме, а по отдельности они не общековариантны, так как содержат частные производные от вектора или тензора. А при условии применения галилеевых координат (которое обозначим $!G$), два последних члена равны друг другу, отличаясь лишь немыми индексами, а с другой стороны они противоположны друг другу по знаку согласно (2):

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g^{\alpha\beta})}\delta_L g^{\alpha\beta} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g^{\alpha\beta})}g^{\nu\alpha}g^{\zeta\beta}\,\delta_L g_{\nu\zeta} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g_{\nu\zeta})}\delta_L g_{\nu\zeta} = 0,\ !G,$$

тогда каждый из этих членов равен нулю, откуда следует, что

$$\delta_L g_{\alpha\beta} = 0,\ !G, \tag{5}$$

так как обобщённая производная $\partial\Lambda/\partial(\partial_{\mu}g_{\nu\zeta})$ либо не равна нулю в криволинейной системе координат, либо неопределённа в плоской системе. Таким образом **в галилеевых координатах вариация Ли метрического тензора равна нулю**, как и частная производная метрического тензора (2.6.8.2)). Тогда

$$J^{\mu} = \Lambda\,\delta x^{\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\delta_L\psi + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\delta_L A_{\nu},\quad !G. \tag{6}$$

В связи с использованием преобразования координат, удобно ввести понятие координатной вариации некоторого геометрического объекта φ_A, имеющего обобщённые (не обязательно тензорные) индексы, обозначенные буквой A. Определим **координатную вариацию** в виде

$$\delta_c\varphi_A = \varphi'_A(x') - \varphi_A(x). \tag{7}$$

Вариация действия (2.2) как раз является координатной вариацией. Она порождает координатную вариацию всех величин, входящих в состав лагранжиана. Сравнивая координатную вариацию (7) с соответствующей вариацией Ли (2.6.1)

$$\delta_L\varphi_A = \varphi'_A(x) - \varphi_A(x), \tag{8}$$

находим

$$\delta_c\varphi_A = \varphi'_A(x') - \varphi'_A(x) + \delta_L\varphi_A(x). \tag{9}$$

Отсюда вариацию Ли можно представить в виде

$$\delta_L\varphi_A = \delta_c\varphi_A - (x' - x)\frac{\varphi'_A(x') - \varphi'_A(x)}{x' - x},$$

что в пределе $x' \to x$, из (2.1) и по определению производной, даёт

$$\delta_L\varphi_A = \delta_c\varphi_A - \delta x^\mu\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu} = \varphi'_A(x') - \varphi_A(x) - \delta x^\mu\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu}. \tag{10}$$

4. Применение криволинейной метрики. Величина J^μ – 4-вектор. В псевдоэвклидовом пространстве его дивергенция

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = D_\mu J^\mu \tag{1}$$

совпадает с ковариантной дивергенцией $D_\mu J^\mu$ (I.2.6.9.5), так как это скаляр. Криволинейность координат в таком пространстве отражается только на частных (нековариантных) производных.

Поскольку преобразование координат никогда не может изменить характера геометрии, то всё наше рассмотрение справедливо как для псевдоэвелидовой (плоской) геометрии, так и для римановой (кривой) геометрии. Хотя уравнение единого поля инвариантно в галилеевых координатах, использование более общей метрики позволяет применение **криволинейных координат**. Использование ковариантного обозначения D_μ дивергенции указывает на возможность применения криволинейных координат.

Все вариации Ли $\delta_L\psi, \ldots$, входящие в выражение (3.3), порождены одним преобразованием координат (2.1). Поэтому все они могут быть выражены через четыре компоненты вектора δx^β. Найдём эти вариации. По закону преобразования ковариантного вектора

$$A'_\nu(x') = A_\zeta(x)\frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\nu} \tag{2}$$

имеем

$$A'_\nu(x') = A'_\nu(x + \delta x) = A_\nu(x) - A_\zeta(x)\frac{\partial\delta x^\zeta}{\partial x^\nu},$$

так как согласно (2.1), с точностью до линейных бесконечно малых, справедливо выражение

$$\frac{\partial\delta x^\zeta}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(x'^\zeta - x^\zeta)}{\partial x'^\nu} = \delta^\zeta_\nu - \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\nu}.$$

Тогда, используя (3.10), имеем

$$\delta_L A_\nu(x) = A'_\nu(x') - A_\nu(x) - \delta x^\zeta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\zeta} = -\delta x^\zeta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\zeta} - A_\zeta\frac{\partial\delta x^\zeta}{\partial x^\nu}, \tag{3}$$

или, в ковариантной форме

$$\delta_L A_\nu(x) = -\delta x^\zeta\, D_\zeta A_\nu - A_\zeta\, D_\nu\delta x^\zeta. \tag{4}$$

Поскольку при преобразовании координат скалярная величина преобразуется по закону

$$\psi'(x') = \psi(x), \tag{5}$$

из (3.10) имеем

$$\delta_L \psi = -\delta x^\zeta \, D_\zeta \psi. \tag{6}$$

Найдём теперь вариацию Ли от метрического тензора $g_{\nu\zeta}$. Из закона преобразования тензора

$$g'_{\nu\zeta}(x') = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\zeta} g_{\alpha\beta}(x)$$

получим (аналогично случаю для вектора A_ν)

$$g'_{\nu\zeta}(x') = g'_{\nu\zeta}(x+\delta x) = g_{\nu\zeta} - g_{\nu\alpha}\partial_\zeta \delta x^\alpha - g_{\zeta\alpha}\partial_\nu \delta x^\alpha, \tag{7}$$

откуда с использованием (3.10)

$$\delta_L g_{\nu\zeta} = -g_{\nu\alpha}\,\partial_\zeta \delta x^\alpha - g_{\zeta\alpha}\,\partial_\nu \delta x^\alpha - \delta x^\alpha\,\partial_\alpha g_{\nu\zeta}. \tag{8}$$

Учитывая равенство (I.2.6.9.8)

$$\partial_\alpha g_{\nu\zeta} = g_{\zeta\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\zeta\alpha}, \tag{9}$$

выражение (8) можно записать в ковариантных производных (I.2.6.9.5) в виде

$$\delta_L g_{\nu\zeta} = -g_{\nu\alpha} D_\zeta\, \delta x^\alpha - g_{\zeta\alpha}\, D_\nu\, \delta x^\alpha, \tag{10}$$

что можно переписать, переобозначив немые индексы $\alpha \to \gamma$, а затем $\nu \to \alpha, \zeta \to \beta$, в эквивалентном виде:

$$\delta_L g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma} D^\beta\, \delta x_\gamma - g^{\beta\gamma}\, D^\alpha\, \delta x_\gamma. \tag{11}$$

Подставляя выражения (4),(6) и (10),(11) в действие (3.3), получим

$$\begin{aligned} \delta_c S = \int\limits_\Omega d^4x \left[-\delta x^\alpha \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu \right) - \right. \\ -\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha D_\nu\, \delta x^\alpha - (g_{\nu\alpha} D_\zeta\, \delta x^\alpha + g_{\zeta\alpha} D_\nu\, \delta x^\alpha)\times \\ \left. \times \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta g_{\nu\zeta}} - g^{\nu\alpha} g^{\zeta\beta} \frac{\delta\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) + D_\mu J^\mu \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

5. Упрощение выражений. Введём следующее обозначение

$$T^{\nu\zeta} = -2\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta g_{\nu\zeta}} - g^{\nu\alpha} g^{\zeta\beta} \frac{\delta\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}} \right). \tag{1}$$

Этот симметричный тензор, впервые введённый Гильбертом, называется **тензором Гильберта** системы полей общего вида (1.3). Так как метрический тензор задан, то он в общем случае не удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то есть производные Эйлера $\frac{\delta\Lambda}{\delta g_{\nu\zeta}}$, $\frac{\delta\Lambda}{\delta g^{\alpha\beta}}$, вообще говоря, не равны нулю и определяются метрикой системы координат. В псевдоэвклидовой метрике тензору Гильберта можно придать смысл в предельном переходе к постоянным значениям компонент метрического тензора.

Интегрируя по частям в выражении (4.12) члены, содержащие ковариантные производные от вариации координат, учитывая что эти вариации на границе области интегрирования равны нулю, получим

$$\delta_c S = \int\limits_\Omega d^4x \left[-\delta x^\alpha \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu \right) - \right.$$

$$\left. -D_\nu \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha \right) \delta x^\alpha + \frac{1}{2} D_\zeta (g_{\nu\alpha} T^{\nu\zeta}) \delta x^\alpha + \frac{1}{2} D_\nu (g_{\zeta\alpha} T^{\nu\zeta}) \delta x^\alpha + D_\mu J^\mu \right].$$

Замечая, что оба члена, содержащих $T^{\nu\zeta}$ равны друг другу, имеем

$$\delta_c S = \int\limits_\Omega d^4x \left[-\delta x^\alpha \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu \right) + \right.$$

$$\left. +D_\mu J^\mu - D_\nu \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha \right) \delta x^\alpha + D_\zeta (g_{\nu\alpha} T^{\nu\zeta}) \delta x^\alpha \right].$$

Используя формулу дифференцирования произведения и приводя подобные члены, имеем

$$\delta_c S = \int\limits_\Omega d^4x \left[-\delta x^\alpha \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu - \right. \right.$$

$$\left. -D_\nu \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha \right) + D_\nu (T^{\nu\zeta} g_{\alpha\zeta}) \right) +$$

$$\left. +D_\mu \left(J^\mu - \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu} A_\alpha \, \delta x^\alpha + T^{\nu\mu} g_{\nu\alpha} \, \delta x^\alpha \right) \right]. \tag{2}$$

Подставляя в выражение (3.4) для вектора J^μ значения вариаций $\delta_L\psi, \delta_L A_\nu, \delta_L g_{\nu\zeta}, \delta_L g^{\alpha\beta}$ согласно формулам (4.4),(4.6),(4.10),(4,11) и группируя члены при δx^α и $D_\zeta \, \delta x^\alpha$, имеем

$$J^\mu - \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu} A_\alpha \, \delta x^\alpha = -\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu} A_\alpha \, \delta x^\alpha +$$

$$+\Lambda \, \delta x^\mu + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu\psi)} (-\delta x^\zeta \, D_\zeta\psi) + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (-\delta x^\zeta \, D_\zeta A_\nu - A_\zeta \, D_\nu \delta x^\zeta) +$$

$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g_{\nu\zeta})} (-g_{\nu\alpha} \, D_\zeta \delta x^\alpha - g_{\zeta\alpha} \, D_\nu \delta x^\alpha) +$$

$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})}(-g^{\alpha\gamma}\,D^\beta\delta x_\mu - g^{\beta\gamma}\,D^\alpha\delta x_\mu) =$$

$$= \left(\Lambda\delta^\mu_\alpha - \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu\psi)}D_\alpha\psi - \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}D_\alpha A_\nu - \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu}A_\alpha\right)\delta x^\alpha -$$

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}A_\zeta\,D_\nu\delta x^\zeta -$$

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g_{\nu\zeta})}g_{\nu\alpha}\,D_\zeta\delta x^\alpha - \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g_{\zeta\nu})}g_{\nu\alpha}\,D_\zeta\delta x^\alpha +$$

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})}g^{\alpha\gamma}\,D^\beta\delta x_\mu - \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g^{\beta\alpha})}g^{\alpha\gamma}\,D^\beta\delta x_\mu =$$

$$= -\acute{T}^\mu_\alpha\,\delta x^\alpha - \sigma^{\mu\zeta}_\alpha\,D_\zeta\delta x^\alpha, \tag{3}$$

где обозначено

$$\acute{T}_\alpha{}^\mu = -\Lambda\delta^\mu_\alpha + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu\psi)}D_\alpha\psi + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}D_\alpha A_\nu + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu}A_\alpha. \tag{4}$$

Эта величина при нулевом последнем члене, что соответствует уравнениям поля (1.5), вполне соответствует **каноническому тензору (плотности) энергии-импульса** (4.2.4), определённому в предыдущем параграфе. А величину

$$\sigma^{\mu\zeta}_\alpha = 2\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g_{\nu\zeta})}g_{\nu\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\zeta)}A_\alpha - 2\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu g^{\alpha\beta})}g^{\zeta\beta} \tag{5}$$

мы назовём **спиновым тензором** (но не спином). На основании (3) последнюю ковариантную дивергенцию в (2) представим в виде

$$D_\mu\!\left(J^\mu - \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\mu}A_\alpha\,\delta x^\alpha + T^\mu_\alpha\,\delta x^\alpha\right)\!= D_\mu(-\acute{T}_\alpha{}^\mu\,\delta x^\alpha - \sigma^{\mu\zeta}\,D_\zeta\delta x^\alpha + T^\mu_\alpha\,\delta x^\alpha) =$$

$$= \delta x^\alpha[D_\mu T^\mu_\alpha - D_\mu\acute{T}_\alpha{}^\mu] + D_\mu\delta x^\alpha[T^\mu_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\mu - D_\zeta\sigma^{\zeta\mu}_\alpha] - \sigma^{\mu\zeta}_\alpha D_\mu D_\zeta\delta x^\alpha. \tag{6}$$

Используя это выражение, вариацию действия (2) можно записать в виде

$$\delta_c S = \int\limits_\Omega d^4x\left[-\delta x^\alpha\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi}D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu}D_\alpha A_\nu - D_\nu\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu}A_\alpha\right) + D_\nu T^\nu_\alpha\right) + \right.$$

$$\left. +\delta x^\alpha\,D_\mu[T^\mu_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\mu] + D_\mu\delta x^\alpha[T^\mu_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\mu - D_\zeta\sigma^{\zeta\mu}_\alpha] - \sigma^{\mu\zeta}_\alpha D_\mu D_\zeta\delta x^\alpha\right] = 0. \tag{7}$$

Так как объём интегрирования произволен, из (7) следует, что подинтегральная функция всюду равна нулю:

$$-\delta x^\alpha\left[\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi}D_\alpha\psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu}D_\alpha A_\nu - D_\nu\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu}A_\alpha\right) + D_\nu\acute{T}_\alpha{}^\nu\right] +$$

$$+D_\mu \delta x^\alpha [T^\mu_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\mu - D_\zeta \sigma^{\zeta\mu}_\alpha] - \sigma^{\mu\zeta}_\alpha D_\mu D_\zeta \delta x^\alpha = 0. \tag{8}$$

6. Дифференциальные законы сохранения. Выражение (5.8) обращается в нуль для произвольных значений δx^α, независимо от выбора системы координат. В силу тензорного закона преобразования, если оно превращается в нуль в одной системе координат, то оно равно нулю в любой другой системе координат. Тогда из (5.8) следуют скалярное, векторное и тензорное тождества

$$\begin{cases} \sigma^{\mu\zeta}_\alpha D_\mu D_\zeta \delta x^\alpha = 0, \\ D_\nu \acute{T}_\alpha{}^\nu + \frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha \psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha \right) = 0, \\ T^\mu_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\mu - D_\zeta \sigma^{\zeta\mu}_\alpha = 0, \end{cases} \tag{1}$$

так как разные группы слагаемых в выражении (5.8) не одинаково зависят от преобразования координат, выражаемого вариацией δx^α. Первое тождество требует **антисимметричности спинового тензора**

$$\sigma^{\mu\zeta}_\alpha = -\sigma^{\zeta\mu}_\alpha, \tag{2}$$

тогда левый член обращается в нуль, так как **свёртка симметричного и антисимметричного тензора равна нулю**. Учитывая антисимметрию спинового тензора, применяя к третьему тождеству (1) операцию D_μ, имеем

$$D_\mu T^\mu_\alpha = D_\mu \acute{T}_\alpha{}^\mu$$

или, переобозначая $\mu \to \nu$, получим

$$D_\nu T^\nu_\alpha = D_\nu \acute{T}_\alpha{}^\nu. \tag{3}$$

Используя (3), второе тождество (1) можно записать в виде

$$D_\nu T^\nu_\alpha + \frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} D_\alpha \psi + \frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} D_\alpha A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta A_\nu} A_\alpha \right) = 0. \tag{4}$$

Тождества (1), кроме первого, называются **сильными дифференциальными законами сохранения**, они выполняются в силу инвариантности действия при преобразовании координат.

Если мы учтём уравнения поля (1.5), то получим **слабые дифференциальные законы сохранения**

$$D_\zeta \acute{T}_\alpha{}^\zeta = D_\zeta T^\zeta_\alpha = 0, \quad T^\zeta_\alpha - \acute{T}_\alpha{}^\zeta = D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha, \tag{5}$$

где величина $\acute{T}_\alpha{}^\zeta$ согласно уравнениям поля и (5.4) равна

$$\acute{T}_\alpha{}^\zeta = -\Lambda \delta^\zeta_\alpha + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\zeta \psi)} D_\alpha \psi + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\zeta A_\nu)} D_\alpha A_\nu \tag{6}$$

и является **каноническим тензором плотности энергии-импульса**, соответствущим тензору $C_\alpha^{\ \beta}$ (4.2.2), определённому в предыдущем параграфе. Из (5) следует, что симметричный тензор Гильберта T^ζ_α обладает тем же дифференциальным законом сохранения, что и канонический тензор и относится к тому же лагранжиану, поэтому при том же решении уравнений поля (1.5) эти тензоры могут отличаться только калибрующим членом, имея оба смысл тензора плотности энергии-импульса, из которых первый симметричный, а второй не симметричный. Поэтому из (5) для симметричного **тензора Гильберта общего вида** (5.1) для заданных полей имеем **конкретный вид тензора Гильберта**

$$T^\zeta_\alpha = \acute{T}_\alpha^{\ \zeta} + D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha. \tag{7}$$

Согласно (7) симметричный тензор T^ζ_α отличается от канонического тензора $\acute{T}_\alpha^{\ \zeta}$ на дивергенцию спинового тензора $D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha$, которая, являясь тензором того же типа в линейной связи с этими тензорами, тоже должна иметь смысл **тензора (спиновой) плотности энергии-импульса**

$$\grave{T}_\alpha^{\ \zeta} = D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha, \tag{8}$$

неразрывность которого следует из его антисимметрии

$$D_\zeta D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha = 0, \tag{9}$$

Из (5) видно, что **симметричный тензор Гильберта**

$$T^\zeta_\alpha = \acute{T}_\alpha^{\ \zeta} + D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha = \acute{T}_\alpha^{\ \zeta} + \grave{T}_\alpha^{\ \zeta} \tag{10}$$

имеет конкретный вид для конкретных полей в любой системе координат в псевдоэвклидовом пространстве, хотя его определение основано на использовании криволинейной метрики. Отсюда же видно, что в отсутствие других полей, кроме метрики системы координат, то есть **в пустом пространстве заданной метрики, тензор Гильберта равен нулю**.

7. 4-тензор плотности момента импульса. Этот тензор (4.9.3)

$$M^{\mu\zeta}_\alpha = x^\zeta T^\mu_\alpha - x^\mu T^\zeta_\alpha, \tag{1}$$

антисимметричен (4.9.2)

$$M^{\mu\zeta}_\alpha = -M^{\zeta\mu}_\alpha \tag{2}$$

и сохраняется (4.9.3)

$$D^\alpha M^{\mu\zeta}_\alpha = 0 \tag{3}$$

в силу симметрии тензора $T^{\mu\alpha}$.

Подставляя в (1) выражение T^ζ_α из (6.5), получим

$$M^{\mu\zeta}_\alpha = x^\zeta(\acute{T}_\alpha^{\ \mu} + D_\gamma \sigma^{\gamma\mu}_\alpha) - x^\mu(\acute{T}_\alpha^{\ \zeta} + D_\gamma \sigma^{\gamma\zeta}_\alpha) = \acute{M}^{\mu\zeta}_\alpha + \grave{M}^{\mu\zeta}_\alpha, \tag{4}$$

где

$$\acute{M}_{\alpha}^{\mu\zeta} = x^{\zeta}\acute{T}_{\alpha}{}^{\mu} - x^{\mu}\acute{T}_{\alpha}{}^{\zeta} \tag{5}$$

– **тензор плотности орбитального момента импульса**,

$$\grave{M}_{\alpha}^{\mu\zeta} = x^{\zeta}D_{\gamma}\sigma_{\alpha}^{\gamma\mu} - x^{\mu}D_{\gamma}\sigma_{\alpha}^{\gamma\zeta} \tag{6}$$

– **тензор плотности спинового момента импульса**.

Оба тензора (5) и (6) антисимметричны. Из (6.8) следует, что неразрывен тензор плотности спиновой энергии-импульса $\grave{T}_{\alpha}{}^{\zeta}$, тогда, согласно (4.9.4), неразрывна и соответствующая плотность спинового момента, если тензор $\grave{T}_{\alpha}{}^{\zeta}$ симметричен.

В силу симметрии и универсальности, понятие тензора Гильберта позволило однозначно определить понятия плотности орбитального и спинового моментов импульса.

Каноническому тензору $\acute{T}_{\alpha}{}^{\zeta}$ вполне соответствует тензор $C_{\alpha}{}^{\beta}$ (4.2.2) предыдущего параграфа, а симметрирование обеспечивает добавление спинового тензора к каноническому.

Для скалярного поля (то есть в отсутствие поля A_{α}), согласно (5.5), спиновый тензор принимает вид:

$$\sigma_{\alpha}^{\mu\zeta} = 2\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g_{\nu\zeta})}g_{\nu\alpha} - 2\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_{\mu}g^{\alpha\beta})}g^{\zeta\beta}, \quad A_{\alpha} = 0. \tag{7}$$

В галилеевых координатах это выражение равно 0. Чтобы это увидеть достаточно метрическими множителями переместить индексы первых сомножителей в каждом из двух членов. Такое перемещение нельзя сделать в других координатах, так как по отдельности оба члена не являются ковариантными производными. Но тогда из (6.7),(7) следует, что

$$T_{\alpha}^{\zeta} = \acute{T}_{\alpha}{}^{\zeta}, \quad \sigma_{\alpha}^{\mu\zeta} = 0, \quad A_{\alpha} = 0, \quad !G. \tag{8}$$

Этот результат означает, что симметричный тензор Гильберта приравнивается к несимметричному в общем случае каноническому тензору (6.6). В этом нет противоречия только потому, что канонический тензор можно симметрировать простым способом, заменяя его симметричным тензором

$$P_{\alpha}^{\zeta} = (\acute{T}_{\alpha}{}^{\zeta} + \acute{T}^{\zeta}{}_{\alpha})/2, \tag{9}$$

имеющим тот же след. Такое **простое симметрирование для нескалярных полей недопустимо**, так как приводит к возникновению неучтённых компонентных связей.

8. Интегральные законы сохранения. Неуничтожимые величины. Именно из сильных дифференциальных законов следует **связь однородности и изотропности пространства с интегральными механическими законами**

сохранения, однако **интегральные законы сохранения не обеспечиваются сильными дифференциальными законами сохранения**.

Сам вывод уравнений движения (1.5) опирается на **заданную метрику** 4-пространства (лагранжиан не содержит метрического тензора), то есть эти уравнения справедливы лишь в плоском (то есть однородном и изотропном) 4-пространстве. Поэтому **слабые законы сохранения предполагают однородность и изотропность 4-пространства и потому обеспечивают интегральные законы сохранения**.

Канонический тензор плотности 4-импульса в общем случае несимметричен. **Наличие слабого закона сохранения симметричного тензора плотности 4-импульса обеспечивает сохранение момента импульса поля** (4.9.4).

Наличие группы инерциальных движений и глобальных вращений в 4-пространстве Минковского превращает дифференциальные слабые законы сохранения в **интегральные законы сохранения**. Существование этих групп следует из инвариантности уравнения КГФ, которому подчиняется единое поле. Причём с группой инерциальных движений связан закон сохранения 4-импульса, а с группой вращений – закон сохранения момента импульса в совокупности со спином.

Обратим внимание, что симметричный тензор плотности 4-импульса требует непостоянства метрического тензора, иначе выражение (5.1) теряет смысл. Неустранимое выбором системы координат непостоянство метрического тензора означает **искривление 4-пространства**. Такое симметрирование тензора плотности 4-импульса, с помощью метрического тензора будем называть его **геометрическим симметрированием**. Основная метрика 4-пространства нашей теории плоская по определению, поэтому геометрическое симметрирование вида (5.1) в основной метрике возможно только в смысле предельного перехода к псевдоэвклидовой метрике

Поэтому в этой метрике не возможна геометризация гравитации, что однако не запрещает пользоваться **второй метрикой**, определённой как поле **2-го метрического тензора** определённого в пространстве первой метрики. При этом гравитационное поле в первой метрике должно определяться как поле в духе Фарадея-Максвелла.

10 сохраняющихся механических величин, представляемых 4-мя плотностями, являющимися компонентами 4-вектора $T^{\mu\nu}$ и 6-ю независимыми компонентами антисимметричного тензора $M^{\nu\zeta\mu}$, происходят от одной сохраняющейся электрической величины – заряда, плотность которого является временно́й компонентой 4-вектора плотности электрического тока, выражаемого непосредственно через единое скалярное комплексное поле. Сохранение заряда является следствием инвариантного уравнения КГФ единого поля (7.3.3.6).

Статистический метод исследования движения точечных зарядов приведёт к понятию волновых функций, механика которых квантовая, то есть связана с дискретизацией многих механических величин, в частности орбитального и

спинового моментов. Основой квантования является естественная дискретность электрических зарядов в едином поле.

Если некоторая сохраняющаяся величина **определена неотрицательно**, то есть её значения нигде не могут быть отрицательными, то такую сохраняющуюся величину будем называть **неуничтожимой**. Например в механической системе, состоящей только из электромагнитного поля (то есть при нулевом 4-токе), плотность энергии неотрицательна и в такой системе энергия неуничтожима. Смысл этого в том, что если в некоторый объём энергия не втекает и из него не вытекает и плотность её отлична от нуля, то она здесь всегда будет отлична от нуля. В противоположность этому, например, заряд или импульс, хотя и сохраняются и имеют отличную от нуля плотность, но при нулевом суммарном заряде или импульсе в данном объёме, могут без обмена через границу объёма прийти к нулю во всех точках объёма, то есть они здесь могут быть **взаимоуничтожены**. Ниже мы покажем, что энергия **наблюдаемых механических систем** нашей теории может быть определена неотрицательно, то есть она неуничтожима. Это свойство энергии выделяет её среди всех сохраняющихся величин как наиболее существенную, определяющую **суть механики**.

9. Спин. Разбиение тензора плотности энергии-импульса замкнутой механической системы на канонический и спиновый тензоры вызвано тем, что несмотря на зависимость этих тензоров от одних и тех же обобщённых координат, соответствующие 4-импульсы сохраняются как вместе так и по отдельности. **Каноническому и спиновому** тензорам плотности энергии-импульса соответствуют **орбитальный и спиновый тензоры плотности момента импульса**. Тензор плотности спинового момента импульса (7.6) можно представить в виде

$$\grave{M}_\alpha^{\mu\zeta} = x^\zeta D_\gamma \sigma_\alpha^{\gamma\mu} - x^\mu D_\gamma \sigma_\alpha^{\gamma\zeta} = D_\gamma(x^\zeta \sigma_\alpha^{\gamma\mu} - x^\mu \sigma_\alpha^{\gamma\zeta}) -$$

$$-(D_\gamma x^\zeta \cdot \sigma_\alpha^{\gamma\mu} - D_\gamma x^\mu \cdot \sigma_\alpha^{\gamma\zeta}) = D_\gamma(x^\zeta \sigma_\alpha^{\gamma\mu} - x^\mu \sigma_\alpha^{\gamma\zeta}) - \delta_\gamma^\zeta \sigma_\alpha^{\gamma\mu} + \delta_\gamma^\mu \sigma_\alpha^{\gamma\zeta} =$$

$$= D_\gamma(x^\zeta \sigma_\alpha^{\gamma\mu} - x^\mu \sigma_\alpha^{\gamma\zeta}) + 2\sigma_\alpha^{\mu\zeta}. \tag{1}$$

При интегрировании этой плотности момента импульса по ориентированным элементам 3-объёма S_γ всего 3-пространства, член, содержащий дивергенцию преобразуется в интеграл по поверхности 3-области интегрирования и для финитного поля даёт нулевой результат. В таком случае такой дивергентный член не существен, а результот интегрирования второго члена (**спиновый момент импульса**) зависит от выбора обобщённых координат в (5.5.5)

$$\grave{M}^{\mu\zeta} = \sum_\alpha \int 2\sigma_\alpha^{\mu\zeta}\, dS^\gamma. \tag{2}$$

Этот момент также будем называть **спином**. Если при этом обобщённые координаты являются финитными функциями, то спиновый момент не зависит

от метрических координат, то есть является тензорной константой, которая не изменяется при трансляциях, но преобразуется как тензор в лоренцевых вращениях. Это существенно отличает спиновый момент импульса от орбитального, который зависит от сдвигов системы координат. Кроме того скалярные поля не имеют спина, но могут иметь орбитальный момент.

10. Момент импульса. **Полный момент импульса** $M^{\mu\nu}$ (4.9.1), как всякий антисимметричный тензор, может быть представлен в галилеевой системе координат совокупностью полярного и аксиального 3-векторов [Ландау 2, (14,5)]

$$M^{\mu\nu} = \int (x^\nu p^\mu - x^\mu p^\nu)\, dv = \left(\int (t\mathbf{p} - \mathbf{r}W)\, dv,\ -\mathbf{M} \right), \tag{1}$$

где p^μ – плотность 4-импульса,
$\mathbf{p}$ – плотность 3-импульса,
W – плотность энергии,
$$\mathbf{M} = \int [\mathbf{xp}]\, dv = (M^{23}, -M^{13}, M^{12}) \tag{2}$$
– **3-вектор момента импульса**,
$\mathcal{E}$ – энергия замкнутой системы.

В силу сохранения $M^{\mu\nu}$ для замкнутой системы имеем, для его полярной компоненты: $\int (t\mathbf{p} - \mathbf{r}W)\, dv = t\mathbf{P} - \int \mathbf{r}W\, dv = \mathbf{const}$, а так как энергия $\mathcal{E}$ тоже сохраняется, то деля это равенство на $\mathcal{E}$ и учитывая (4.3.4), можно написать

$$t\mathbf{v} - \int \mathbf{r}\frac{W}{\mathcal{E}}\, dv = t\mathbf{v} - \mathbf{R} = \mathbf{R}_p = \mathbf{const}, \tag{3}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{P}/\mathcal{E}$ – скорость системы в целом, определяемая ориентацией её 4-импульса, $\mathbf{R}_p$ – постоянный 3-вектор (**плечо импульса**). Откуда видно, что точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \int \mathbf{r}\frac{W}{\mathcal{E}}\, dv, \tag{4}$$

называемая **центром инерции замкнутой системы**, равномерно движется со скоростью $\mathbf{v}$ (что может нарушаться для статистически заданных систем).

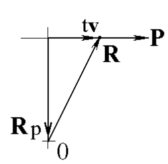


Рис. 109.1.

Тогда можно написать

$$M^{\mu\nu} = (\mathcal{E}(t\mathbf{v} - \mathbf{R}), -\mathbf{M}) = (\mathcal{E}\mathbf{R}_p, -\mathbf{M}). \tag{5}$$

11. Несобственный и собственный моменты импульса. Не трудно видеть (рис.109.1), что постоянный 3-вектор $\mathbf{R}_p = t\mathbf{v} - \mathbf{R}$ является плечём

импульса $\mathbf{P} = \mathcal{E}t\mathbf{v}$, лежащего в одной плоскости с **радиус-вектором R центра инерции**. Поэтому 3-вектор $\mathcal{E}\mathbf{R}_p$, являющийся полярной компонентой полного момента импульса, несёт необходимую информацию о 3-векторном **несобственном моменте импульса**

$$\mathbf{M}_p = [\mathbf{R}_p\mathbf{P}] \tag{1}$$

системы, который назван несобственным, так как его легко обнулить, (при $\mathbf{R}_p = 0$), то есть выбирая систему координат с началом на мировой линии центра инерции (**целевую систему координат**). Для выбора целевой системы координат необходимо чтобы центр инерции механической системы находился внутри временииподобной полости начала координат. Тогда достаточно совершить подходящий лоренцев поворот в 4 пространстве, то есть использовать 3 из 6 вращательных степеней свободы системы 4-координат в виде 3-х условий:

$$t\mathbf{v} - \mathbf{R} = \mathbf{R}_p = 0, \quad (3\ \text{условия}), \tag{2}$$

Так как антисимметричный тензор в 4-пространстве имеет 6 независимых компонент, а система координат имеет 6 вращательных степеней свободы в 4-пространстве, то условия (2) оставляют для системы координат три степени свободы, подбирая которые можно обнулить три независимые компоненты несобственного момента импульса, то есть привести тензор (в целевой системе координат) к виду:

$$M^{\mu\nu} = (0, -\mathbf{M}), \quad \mathbf{R}_p = 0, \tag{3}$$

Заметим, что $\mathbf{R}$ не инвариант, однако **центр инерции** может быть определён объективно (**инвариантно**) в сопутствующей 4-импульсу системе отсчёта, которая, в силу сохранения 4-импульса, инерциальна. Для этого наложим на систему координат ещё одно условие, связывающее её начало с центром инерции:

$$|\mathbf{R}| = R = 0, \quad (1\ \text{условие}). \tag{4}$$

В такой **центральной системе отсчёта**

$$M^{\mu\nu} = (0, -\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j^{12} & -j^{13} \\ 0 & -j^{12} & 0 & j^{23} \\ 0 & j^{13} & -j^{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = 0, \tag{5}$$

где величину

$$\mathbf{j} = \mathbf{M}_{|R=0} \tag{6}$$

будем называть **моментом вращения** замкнутой механической системы. Здесь значения компонент изменились относительно (3) только за счёт изменения модуля 3-скорости, чему соответствует некоторый лоренцев поворот.

Так как антисимметричный тензор в 4-пространстве имеет 6 независимых компонент, а система координат имеет 6 вращательных степеней свободы в 4-пространстве, то условия (2),(4) оставляют для системы координат две степени

свободы, подбирая которые можно обнулить две независимые компоненты, то есть привести тензор (в центральной системе отсчёта) к виду:

$$M_{rot}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j^{23} \\ 0 & 0 & -j^{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = 0 = j^{12} = j^{13}. \tag{7}$$

Тогда определитель тензора $M^{\mu\nu}$ легко вычисляется.

$$|M^{\mu\nu}| = (j^{23})^2 = \mathbf{M}^2 = \mathbf{j}^2, \tag{8}$$

где учтено, что в этой системе координат одна компонента 3-вектора $\mathbf{j}$ представляет его всего. Используя переобозначение компонент координатных осей, в этой формуле можно компоненту j^{23} заменить на j^{12} или j^{13}. Определитель тензора является инвариантом, поэтому **квадрат момента вращения $\mathbf{j^2}$ – инвариант**.

Момент импульса замкнутой механической системы в центральной системе отсчёта будем называть **собственным моментом импульса замкнутой системы**. Согласно (5.7.4) он является суммой **орбитального** $\mathbf{l}$ и **спинового** $\mathbf{s}$ **моментов вращения**

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}. \tag{9}$$

Согласно (10.2) и (1) 3-векторные собственный $\mathbf{M}$ и несобственный $\mathbf{M}_p$ моменты импульса имеют одинаковый дифференциальный смысл произведения 3-вектора импульса элемента объёма механической системы на плечо этого вектора относительно начала отсчёта. Несобственный момент импульса сохраняется в силу инерциальности движения. То есть обе эти величины сохраняются, поэтому их сумма порождает ещё одну сохраняющуюся величину – **полный 3-векторный момент импульса**

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M} + \mathbf{M}_p = \mathbf{M} + [\mathbf{R}_p\mathbf{P}], \tag{10}$$

зависящую от выбора системы координат. Эта величина менее информативна, чем полный момент импульса $M^{\mu\nu}$.

12. Спиральность. Момент импульса замкнутой элементарной механической системы сохраняется благодаря симметрии её тензора плотности энергии-импульса. Однако этот тензор состоит из канонической и спиновой частей, каждая из которых не обязана быть симметричной, поэтому **орбитальный момент вращения** $\mathbf{l}$ и **спиновый момент вращения** $\mathbf{s}$ могут не сохраняться каждый в отдельности [Ландау 4, §16]. Их сумма согласно (11.9) образует 3-вектор момента вращения системы

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}. \tag{1}$$

Вместе с несохранением спина не сохраняется и проекция спина на какое-либо заданное направление (например, ось z). Сохраняется, однако, проекция спина на

направление импульса. Действительно, умножая (1) на $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ и учитывая, что $\mathbf{ln} = [\mathbf{rp}]\mathbf{n} = 0$, получаем

$$\mathbf{jn} = \mathbf{ln} + \mathbf{sn} = \mathbf{sn}. \qquad (2)$$

А так как $\mathbf{jn}$ сохраняется, то сохраняется и $\mathbf{sn}$. Эту величину называют **спиральностью**. Состояния системы с определённой спиральностью называют **спиральными состояниями**.

В квантовой механике (главы 6,7 части II) проекция момента вращения стационарных состояний элементарных частиц на направление импульса кратна $\hbar/2$ (**квантуется полуцелыми значениями** $\hbar$).

Макроскопически наблюдаемый орбитальный момент $\mathbf{l}$ обычно подавляюще велик по сравнению со спином. Спин же проявляет себя как квантовая величина в энергичных реакциях между элементарными частицами, наблюдаемых по их трекам.

§6. Механика материальных точек.

1. Материальная точка. Закон инерции. Опираясь на [Ландау 2, §8], дадим понятие материальной точки, рассматривая её как предельный случай механической системы, тензор плотности энергии-импульса которой сосредоточен на времениподобной мировой линии, совпадающей с центром инерции. Механически такая система полностью характеризуется её мировой линией и 4-импульсом в каждой точке этой линии.

Рассмотрим возможный вид интеграла действия для материальной точки на некотором интервале $[a, b]$ её мировой линии. Этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчёта, то есть должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Следовательно он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом могут стоять дифференциалы только в первой степени. Общий вид такого скаляра, который можно построить для материальной точки, есть величина $\alpha\, ds$, где α – некоторый скаляр, характеризующий материальную точку, ds – элемент её собственного времени. Итак, действие для материальной точки должно иметь вид

$$S = -\int_a^b \alpha\, ds,$$

где интеграл берётся вдоль мировой линии между двумя заданными событиями a и b – нахождением материальной точки в начальном и конечном местах в определённые моменты времени t_a и t_b, то есть между заданными мировыми точками.

В отличие от эвклидовой метрики, где кратчайшей линией, соединяющей две точки, является прямая, в псевдоэвклидовой метрике времениподобная прямая, соединяющая две точки, является длиннейшей линией (3.5.4.3). Кратчайшей же

линией является любая светоподобная (изотропная) линия, интервал вдоль которой всегда нулевой. Таким образом экстремум действия может существовать при любом знаке α, то есть принципу экстремального действия можно удовлетворить при любои знаке α. С помощью (2.5.4.1) находим

$$S = -\int_{t_a}^{t_b} \alpha\sqrt{1-v^2}\,dt,$$

где v – скорость материальной точки. С другой стороны (2.7.2),(2.2.1)

$$S = -\int_{t_a}^{t_b} L\,dt,$$

где L является функцией Лагранжа. Следовательно,

$$L = -\alpha\sqrt{1-v^2}.$$

Величина α характеризует данную материальную точку, являясь скаляром, чему с точностью до единицы измерения может соответствовать только одна механическая величина – **масса материальной точки**. Эту линейную связь между α и m можно найти из условия перехода к классическому выражению $L = mv^2/2$ [Ландау 1,(4,1)], исходя из релятивистского выражения $L = -\alpha\sqrt{1-v^2} \to -\alpha + \alpha v^2/2$, при $v \to 0$. Опуская в последнем разложении член $-\alpha$, не отражающийся на уравнениях движения и сравнивая его с классическим выражением, находим, что

$$\alpha = m(s_l).$$

Мы записали массу материальной точки как функцию положения на мировой линии, так как условие постоянства массы пока нигде не использовалось. Тогда имеем следующий **общий вид функции Лагранжа материальной точки с массой** $m(s_l)$.

$$L = -m(s_l)\sqrt{1-v^2} = -m(s_l)\frac{ds_l}{dt}, \tag{1}$$

где ds_l – элемент интервала на линии l,

$m(s_l)$ – скалярная функция точек этой линии.

Здесь обобщёнными 3-координатами и обобщёнными производными являются **координаты $\mathbf{x}_l$ материальной точки и её скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_l/dt$.**

Поскольку s_l зависит от t монотонно и обе эти величины отсчитываются от одной и той же точки на мировой линии, то, независимо от знака m, $ds_l/dt = \sqrt{1-v^2} \geqslant 0$, поэтому знак L противоположен знаку m.

Действие на отрезке $[a,b]$ мировой линии материальной точки

$$S = \int_a^b L\;dt = -\int_a^b m(s_l)\;ds_l. \tag{2}$$

4-плотность функции Лагранжа материальной точки можно записать в виде

$$\Lambda = \begin{cases} -m(s_l)\frac{ds_l}{d\Omega_l} = -m(s_l)\sqrt{1-v^2}\frac{dt}{d\Omega_l} & x^\mu \subset d\Omega_l \\ 0, \quad x^\mu \not\subset d\Omega_l \end{cases}, \tag{3}$$

где $d\Omega_l = dv_l \cdot dt$ – элемент 4-объёма, содержащий материальную точку. Действительно, так как значение определённого интеграла не зависит от способа разбиения области интегрирования на элементы интегральной суммы, то аналогично одномерному случаю (5.1.1.4), dv можно выбирать на материальной точке равным dv_l и тогда отношение $1/dv_l$ можно рассматривать как 3-х-мерную δ-функцию

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l) = \delta(x-x_l)\cdot\delta(y-y_l)\cdot\delta(z-z_l) = \begin{cases} \frac{1}{dv_l}, & \mathbf{x} \subset dv_l \\ 0, & \mathbf{x} \not\subset dv_l \end{cases}, \tag{4}$$

тогда согласно (2.2.1)

$$L = \int \Lambda\ dv = -\int m(s_l)\sqrt{1-v^2}\frac{1}{dv_l}dv = -\int m(s_l)\sqrt{1-v^2}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l)\,dv =$$
$$= -m(s_l)\sqrt{1-v^2},$$

как и найдено в (1).

Функция Λ (3) отличается от 0 (и при этом бесконечна) лишь на мировой линии материальной точки и, как и положено, является скалярной. Она выражается через трёхмерную δ-функцию (4)

$$\Lambda = -m(s_l)\ \frac{ds_l}{dt}\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l) = -m(s_l)\sqrt{1-v^2}\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l) = L\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l). \tag{5}$$

Достоинство вида (3) в том, что он четырёхмерен.

Согласно принципу наименьшего действия для замкнутой системы, из (2) имеем

$$\delta S = \delta\int_a^b(-m\sqrt{dx_\mu\,dx^\mu}) = 0$$

или

$$\int_a^b\left(-\delta m\,ds_l - m\frac{dx_\mu\,d\delta x^\mu}{ds_l}\right) = \int_a^b(-\delta m\,ds_l - mu_\mu\,d\delta x^\mu) = 0.$$

Согласно (2.6.12)

$$\delta m = \frac{\partial m}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{6}$$

Тогда, интегрируя второй член по частям, получим

$$\int_a^b\left(-\frac{\partial m}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\,ds_l + d(mu^\mu)\,\delta x^\mu\right) - mu_\mu\,\delta x^\mu\big|_a^b = 0.$$

Член вне интеграла равен 0, так как на пределах вариация координат равна 0. Тогда можно записать

$$\int_a^b \left(-\frac{\partial m}{\partial x^\mu} + \frac{d(mu^\mu)}{ds_l}\right) \delta x^\mu \, ds_l = 0,$$

что, в силу произвольности δx^μ, влечёт уравнение

$$\frac{\partial m}{\partial x^\mu} = u^\mu \frac{dm}{ds_l} + m\frac{du^\mu}{ds_l}. \tag{7}$$

Откуда при $m = \text{const}$ находим $u^\mu = \text{const}$, то есть имеем **закон инерции (первый закон Ньютона)**. Этот закон соответствует сохранению 4-импульса $P^\mu = mu^\mu = \text{const}$ в однородной и изотропной среде (в частности в пустом пространстве), лагранжиан которой постоянен ($\Lambda_f = \text{const}$). Прямой (длиннейшей) мировой линии при положительном значении m соответствует минимум (отрицательного) действия. Если знак перед интегралом действия изменить, то минимум действия изменится на максимум, что не принципиально.

Умножая обе части (7) на u^μ и учитывая (2.5.4.4), (2.5.4.5), имеем тождество

$$\frac{\partial m}{\partial x^\mu} u^\mu \equiv \frac{dm}{ds_l}, \tag{8}$$

то есть уравнение (7) допускает различные виды функции $m(s_l)$, зависящие от лагранжиана Λ_f окружающей среды (поля). Добавляя в качестве слагаемого к лагранжиану материальной точки лагранжиан поля Λ_f и требуя замкнутости механической системы, состоящей из материальной точки и этого поля, согласно принципу экстремального действия можно найти **массовую функцию** $m(s_l)$, уравнение движения материальной точки и поле. При этом, вообще говоря, материальная точка и поле обмениваются 4-импульсом, то есть они по отдельности не замкнуты, хотя могут быть условно замкнуты.

Это поле может быть общим для множества материальных точек, то есть образуется **механическая система с лагранжианом** вида

$$\Lambda = \Lambda_f - \sum_i m_i(s_{li}) \frac{ds_{li}}{d\Omega_i} = \Lambda_f - \sum_i m_i(s_{li}) \, \frac{ds_{li}}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) =$$

$$= \Lambda_f - \sum_i m_i(s_{li}) \sqrt{1 - v_i^2} \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{9}$$

где Λ_f – **лагранжиан поля**,

$\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й материальной точки,

$\mathbf{v}_i$ – скорость i-й материальной точки. Соответствующая **функция Лагранжа** (2.2.1):

$$L = \int \Lambda \, dv = L_f - \sum_i m_i(s_{li}) \, \frac{ds_{li}}{dt}, \tag{10}$$

где L_f – **функция Лагранжа поля**.

Заметим, что при одних и тех же видах лагранжианов материальных точек и поля, движение этих систем может быть разнообразным в зависимости от граничных условий.

Представимость лагранжиана (9) суммой по материальным точкам и полю, при достаточно слабом взаимодействии, позволяет части соответствующей механической системы рассматривать как условно замкнутые.

2. 4-скорость и 4-ускорение. [Савельев 1, с. 133] В релятивистской теории не удобно оперировать с вектором скорости $\mathbf{v}$, так как его компоненты не являются компонентами 4-вектора и преобразуются не так как 4-х-мерные координаты. Действительно совокупность 4-х величин dx^μ/dt не обладает свойствами 4-вектора, так как dt не инвариант. Заменив dt на инвариант

$$ds = dt\sqrt{1-v^2} \tag{1}$$

(в нерелятивистском пределе величины dt и ds совпадают), определим **4-скорость** как

$$u^\mu = dx^\mu/ds. \tag{2}$$

Очевидно

$$u^\mu = (\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}) = (u^0, \mathbf{u}). \tag{3}$$

Где u^0 – **темп** (2.5.4.*). Пространственная компонента 4-скорости при $v \ll 1$ совпадает с $\mathbf{v}$. Аналогично определяем **4-ускорение**

$$w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds}. \tag{4}$$

Из (3)

$$u^\mu u_\mu = 1 \ > 0. \tag{5}$$

Значит **4-вектор u^μ времениподобный**. Дифференцируя (5) по s, получим

$$\frac{du^\mu}{ds}u_\mu + u^\mu\frac{du_\mu}{ds} = w^\mu u_\mu + u^\mu w_\mu = 2w^\mu u_\mu = 0.$$

Откуда следует, что 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны [Ландау 2, с. 39]

$$u_\mu w^\mu = 0. \tag{6}$$

В силу однокомпонентного условия $u^\mu u_\mu = 1$, **у 4-скорости только 3 независимых компоненты**. Отметим формулы:

$$u^\mu = dx^\mu/ds = (dx^\mu/dt)\cdot(1/\sqrt{1-v^2}) = u^0 dx^\mu/ds, \tag{7}$$

$$u^\mu \ ds/dt = dx^\mu/dt, \tag{8}$$

$$w^\mu = (w^0,\ \mathbf{w}) = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds}\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Big(\frac{\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\sqrt{1-v^2}^3},\ \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})}{\sqrt{1-v^2}^3} + \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\sqrt{1-v^2}}\Big) =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{(1-v^2)^2},\ \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})}{(1-v^2)^2} + \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{1-v^2}\right), \tag{9}$$

тогда

$$w^\mu_{|\mathbf{v}\to 0} \to \left(\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt},\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = (\mathbf{va}, \mathbf{a}),$$

где

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10}$$

Так как

$$\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{va} = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d(1-v^2)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{(u^0)^2} = \frac{1}{(u^0)^3}\frac{du^0}{dt}, \tag{11}$$

то w^μ можно записать в виде

$$w^\mu = \left(\frac{1}{2}(u^0)^4\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}, \mathbf{v}u^0\frac{du^0}{dt} + (u^0)^2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right). \tag{12}$$

3. Другие характеристики мировой линии. **4-ускорением ускорения** называется величина

$$\frac{dw^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dw^\mu}{dt} = \frac{dt}{ds}\Big(-2\frac{(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})(-2\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})}{(1-v^2)^3} + \frac{(\frac{d\mathbf{v}}{dt})^2 + \mathbf{v}\ \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{(1-v^2)^2},$$

$$4\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})}{(1-v^2)^3} + \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\ (\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}) + \mathbf{v}(\frac{d\mathbf{v}}{dt})^2 + \mathbf{v}^2\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{(1-v^2)^2} +$$

$$+ \frac{2\frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt})}{(1-v^2)^2} + \frac{\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{1-v^2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Big(\frac{4(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt})^2}{(1-v^2)^3} + \frac{(\frac{d\mathbf{v}}{dt})^2 + \mathbf{v}\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{(1-v^2)^2},$$

$$\frac{4\mathbf{v}(v\ \frac{dv}{dt})^2}{(1-v^2)^3} + \frac{3\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{v}\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}) + \mathbf{v}(\frac{d\mathbf{v}}{dt})^2 + \mathbf{v}^2\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{(1-v^2)^2} + \frac{\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}}{1-v^2}\Big), \tag{1}$$

$$\frac{dw^\mu}{ds}_{|\mathbf{v}=0} = \left(\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2,\ \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right) = \left(\mathbf{a}^2,\ \frac{d\mathbf{a}}{dt}\right). \tag{2}$$

Таким образом, чтобы существовала временна́я компонента 4-ускорения ускорения достаточно лишь ненулевого ускорения $\mathbf{a}$, а для пространственной компоненты необходимо ненулевое $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

Распишем в координатах **квадрат модуля ускорения**

$$w^\mu w_\mu = (w^0)^2 - \mathbf{w}^2 = \frac{(\mathbf{va})^2 - (\mathbf{v}(\mathbf{va}) + (1-v^2)\mathbf{a})^2}{(1-v^2)^4} =$$

$$= \frac{(\mathbf{va})^2 - v^2(\mathbf{va})^2 - (1-v^2)^2\mathbf{a}^2 - 2(\mathbf{va})^2(1-v^2)}{(1-v^2)^4} =$$

$$= \frac{(\mathbf{va})^2 - (1-v^2)\mathbf{a}^2 - 2(\mathbf{va})^2}{(1-v^2)^3} = \frac{-(1-v^2)\mathbf{a}^2 - (\mathbf{va})^2}{(1-v^2)^3} =$$

$$= \frac{v^2a^2 - (\mathbf{va})^2 - \mathbf{a}^2}{(1-v^2)^3}. \tag{3}$$

Так как $v^2a^2 - (\mathbf{va})^2 = (\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2 = [\mathbf{va}]^2$ [Корн, 5.2-14], то

$$w^\mu w_\mu = \frac{[\mathbf{va}]^2 - \mathbf{a}^2}{(1-v^2)^3} =$$

$$= ([\mathbf{va}]^2 - \mathbf{a}^2)(u^0)^6 \quad \text{(сравни с [Левич, с. 239])}, \tag{4}$$

$$w^\mu w_\mu{}_{\big|_{\mathbf{v}=0}} = -\mathbf{a}^2. \tag{5}$$

Ясно, что

$$w^\mu w_\mu \leqslant 0, \tag{6}$$

то есть **4-вектор** w^μ **пространственноподобный**. Далее имеем

$$\frac{d\,w^\mu w_\mu}{dt} = 6\;\frac{[\mathbf{va}]^2 - \mathbf{a}^2}{(1-v^2)^4}(\mathbf{va}) + \frac{2[\mathbf{va}]([\mathbf{v}\frac{d\mathbf{a}}{dt}] + [\mathbf{aa}]) - 2\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt}}{(1-v^2)^3}$$

или, учитывая $[\mathbf{aa}] = 0$,

$$\frac{d\,w^\mu w_\mu}{dt} = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}}\;\Big(3\;\frac{[\mathbf{va}]^2 - \mathbf{a}^2}{(1-v^2)^4}(\mathbf{va}) + \frac{[\mathbf{va}][\mathbf{v}\frac{d\mathbf{a}}{dt}] - \mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt}}{(1-v^2)^3}\Big), \tag{7}$$

$$\frac{dw^\mu w_\mu}{dt}_{|\mathbf{v}=0} = -\frac{d\mathbf{a}^2}{dt}, \tag{8}$$

Обратим внимание что, изменение знака приращения времени приводит к изменению знака 3-скорости $\mathbf{v}$, знака временно́й компоненты 4-ускорения и пространственной компоненты ускорения ускорения.

Для материальных точек удобно следующее понятие: Равномерно и прямолинейно движущуюся систему отсчёта, начало которой в заданный момент времени совпадает с материальной точкой и имеет с ней одинаковую скорость, будем называть **мгновенно сопутствующей системой** по отношению к этой материальной точке.

4. Энергия и импульс материальной точки. Из (4.3.3)

$$P^{\alpha} = m(s)\, u^{\mu} = \left(\frac{m(s)}{\sqrt{1-v^2}},\ \frac{m(s)\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = (\mathcal{E},\ \mathbf{P}). \tag{1}$$

Согласно (1.1) и (4.3.3) импульс $\mathbf{P}$ материальной точки можно записать в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(-m(s_l)\sqrt{(1-\mathbf{v}^2)}) = m(s_l)\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} = \mathbf{P}, \tag{2}$$

где $\partial L/\partial \mathbf{v}$ – обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам $\mathbf{v}$, а её энергию $\mathcal{E} = P^0$, – в виде: (сравни с [Ландау 2, §9]).

$$\mathcal{E} = P^0 = \mathbf{P}\mathbf{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} - (-m\sqrt{1-v^2}) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = mu^0. \tag{3}$$

Таким образом, даже при $v = 0$ энергия не равна 0, а её значение

$$\mathcal{E}_0 = P^0 = mu^0_{|u^0=1} = m \tag{4}$$

называется при этом **энергией покоя материальной точки**. То есть можно говорить об **эквивалентности массы и энергии покоя**, но не вообще энергии и массы. А понятие массы покоя, которое иногда применяется, лишено смысла, так как масса вообще инвариант. Следовательно нельзя, вообще говоря, отождествлять энергию и массу. Выражение "масса при движении увеличивается" не верно, так как увеличивается лишь энергия, при этом растёт требуемая для данного ускорения сила, что для релятивистской механики не означает рост массы. Из (1)

$$P^{\mu}P_{\mu} = m^2\ u^{\mu}u_{\mu} = m^2. \tag{5}$$

Энергия, как сохраняющаяся величина, приобретает смысл **неуничтожимой величины**, если её во всех наблюдаемых формах определить положительной величиной. Такая величина познавательно ценна. Как мы увидим, массу единственных материальных точек в ДФ (протистонов) возможно определять с любым знаком, который можно инвертировать вместе с **инвертированием электрического заряда**.

5. Сила, действующая на материальную точку. Обычно сила, действующая на материальную точку определяется как производная 3-импульса по времени $d\mathbf{p}/dt$ [Ландау 2, §9]. Однако такая сила не является 4-х-мерной величиной, что неудобно для вычислений. По общему определению силы (2.3.4), для одной материальной точки получаем трёхкомпонентную величину $(n = 1, 2, 3)$:

$$F^n = \frac{d}{dx^0}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}.$$

В качестве независимой обобщённой координаты x^0 удобно выбрать собственное время материальной точки $s = x^0$. Остальные (пространственные) координаты $\mathbf{x}_l$ функция Лагранжа L явно не содержит (1.1). Поэтому для силы получаем

$$F^n = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}. \tag{1}$$

Так как $\mathbf{P}$ – трёхмерный вектор, то и F^n – трёхмерный вектор, то есть можно записать

$$F^n = \mathbf{F} = d\mathbf{P}/ds. \tag{2}$$

Тогда сила $\mathbf{F}$ является пространственной компонентой **4-вектора силы**

$$F^\mu = (F^0,\ \mathbf{F}) = (\frac{d\mathcal{E}}{ds},\ \frac{d\mathbf{P}}{ds}) = \frac{dP^\mu}{ds} =$$

$$= \frac{d}{ds}(mu^\mu) = m\frac{du^\mu}{ds} + u^\mu\frac{dm}{ds} = mw^\mu + u^\mu\frac{dm}{ds}. \tag{3}$$

Умножая обе части равенства на u_μ, получим

$$u_\mu F^\mu = dm/ds, \tag{4}$$

откуда видно, что в отсутствие 4-силы масса постоянна, но отсутствие одной лишь пространственной компоненты 4-силы $\mathbf{F}$ не препятствует изменению массы. Согласно (3) 4-силу можно разложить на две существенно разные компоненты

$$F^\mu = F_p^\mu + F_a^\mu, \tag{5}$$

где

$$F_p^\mu = mw^\mu, \tag{6}$$

$$F_a^\mu = u^\mu\, dm/ds. \tag{7}$$

Так как 4-вектор ускорения пространственноподобен, то и сила F_p^μ **пространственноподобна**. Сила же F_a^μ времениподобна, так как времениподобен 4-вектор скорости u^μ. В классической физике обычно $dm/ds = 0$, поэтому 4-сила обычно пространственноподобна. А вообще говоря, изменение массы играет существенную роль. Очевидно, только сила F_a^μ отвечает за изменение массы, поэтому мы её также будем называть **активной 4-силой** в отличие от **пассивной 4-силы** F_p^μ. Так как $u_\mu u^\mu = 1,\ u_\mu w^\mu = 0$, то из (3)

$$F^\mu F_\mu = m^2 w_\mu w_\mu + \left(\frac{dm}{ds}\right)^2 = F_p^\mu F_{p\mu} + F_a^\mu F_{a\mu}. \tag{8}$$

Так как $w_\mu w^\mu \leqslant 0$, то

$$F_p^\mu F_{p\mu} \leqslant 0. \tag{9}$$

Как 4-силу так и приращение 4-импульса dP^μ можно разложить на **пассивное** dP^μ_p **и активное** dP^μ_a **приращения 4-импульса**:

$$dP^\mu = dP^\mu_p + dP^\mu_a, \quad dP^\mu_p = mw^\mu\, ds, \quad dP^\mu_a = u^\mu \frac{dm}{ds}\, ds. \tag{10}$$

И из (8) ясно, что **причинный тип** 4-вектора F^μ (времениподобный или пространственноподобный) определяется типом бо́льшего (по модулю) из 4-векторов F^μ_p, F^μ_a. То есть, вообще говоря, причинный тип 4-вектора силы неопределён. Если изменением массы можно пренебречь, то

$$F^\mu = mw^\mu, \quad \mathbf{F} = m\mathbf{w},$$

а в нерелятивистском случае

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

то есть имеем **2-й закон Ньютона**.

Как 4-силу так и приращение 4-импульса dP^μ можно разложить на **пассивное** dP^μ_p **и активное** dP^μ_a **приращения 4-импульса**:

Для замкнутой системы $d\mathcal{E}/ds = 0 = mw + u^0 dm/ds$, а так как mw имеет смысл силы, то и $-u^0 dm/ds$ имеет смысл силы с направлением $d\mathbf{s}$ (**реактивное движение**).

$$F_s = mw = -u^0/ds. \tag{11}$$

6. Работа, мощность и активность силы. Умножив 4-силу на 4-скорость, имеем

$$u_\mu\, F^\mu = u_\mu\, \frac{dP^\mu}{ds} = u_\mu\, \frac{d(mu^\mu)}{ds} = u_\mu u^\mu\, \frac{dm}{ds} + u_\mu w^\mu\, m = \frac{dm}{ds} \tag{1}$$

(тогда при постоянной массе $u_\mu F^\mu = 0$)

или

$$u^0\, \frac{dP_0}{ds} - \mathbf{u}\,\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, \frac{d\mathcal{E}}{ds} - \frac{\mathbf{v}\,\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dm}{ds} \tag{2}$$

или

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} - \mathbf{v}\,\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}. \tag{3}$$

Интегрируя по s от точки 1 до точки 2, получим разность энергий в этих точках

$$\int\limits_1^2 (\mathbf{vF} + \frac{dm}{dt})\, ds = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1. \tag{4}$$

Интеграл слева называется **работой силы F** на отрезке мировой линии (1, 2). Величина

$$N = \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \mathbf{vF} + \frac{dm}{dt}, \tag{5}$$

являющаяся работой силы в единицу собственного времени, называется **мощностью силы F**. Смысл работы в том, что она равна изменению энергии материальной точки при движении от конца 1 отрезка мировой линии до конца 2. Важно заметить, что **при** $dm/dt = 0$, работа линейна относительно силы, то есть **работа силы равна сумме работ её компонент**. Поэтому, при постоянной массе, смысл работы компонент силы в том, что соответствующие энергии нужно просто складывать. Заметим, что

$$F^\mu = \left(\frac{d\mathcal{E}}{ds}, \frac{d\mathbf{P}}{ds}\right) = \left(\frac{dm}{dt} + \mathbf{vF}, \frac{d\mathbf{P}}{ds}\right). \tag{6}$$

Таким образом, временнáя компонента 4-силы является мощностью силы $\mathbf{F}$, взятой с обратным знаком.

Понятие мощности силы принципиально не инвариантно (это временнáя компонента 4-вектора). Аналогичная мощности силы величина $u_\mu F^\mu$ является скаляром, который назовём **активностью 4-силы** F^μ. Она согласно (1) имеет смысл скорости изменения массы в собственном времени

$$u_\mu F^\mu = dm/ds. \tag{7}$$

Умножив (5) на u^0, с учётом (1), получаем

$$dm/ds = u_\mu F^\mu = u^0(N - \mathbf{vF}), \tag{8}$$

то есть имеем связь между активностью силы dm/ds и её мощностью.

7. Кинетическая и потенциальная энергия материальных точек. Энергия не является инвариантом. Это временнáя компонента 4-вектора импульса

$$\mathcal{E} = P^0. \tag{1}$$

Поэтому значение энергии зависит от выбора системы координат. Так как 4-вектор P^μ имеет псевдоэвклидовы координаты, то его проекция P^0 имеет минимальное значение (**энергия покоя**, или масса m) в системе отсчёта, сопутствующей материальной точке. В любой другой системе эта точка движется и чем быстрее, тем её энергия больше (по модулю). Разность между полной энергией $\mathcal{E}$ и энергией покоя m, определяемая движением частицы, называется **кинетической энергией** $\mathcal{E}_k$

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E} - m. \tag{2}$$

Энергию точечной частицы (протистона) можно представить в виде

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = mu^0. \tag{3}$$

При этом

$$|\mathcal{E}| \geqslant |m|. \tag{4}$$

Таким образом энергию $\mathcal{E}$ можно представить в виде суммы двух частей

$$\mathcal{E} = m + \mathcal{E}_k. \tag{5}$$

Сравнивая с (3), имеем

$$\mathcal{E}_k = mu^0 - m = (u^0 - 1)m = (1/\sqrt{1-v^2} - 1)m. \tag{6}$$

При малых скоростях $(v \ll 1)$

$$\mathcal{E}_k \approx (1 - \sqrt{1-v^2})m \approx (1 - (1 - v^2/2))m = mv^2/2. \tag{7}$$

В различных полях энергия покоя материальной точки может различаться. Разница между энергией покоя материальной точки в присутствии поля (m_f) и в отсутствии поля (m) называется **потенциальной энергией материальной точки** $\mathcal{E}_\Pi$ в этом поле

$$\mathcal{E}_\Pi = m_f - m. \tag{8}$$

Таким образом

$$\mathcal{E} = m_f + \mathcal{E}_k = m + \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_\Pi \tag{9}$$

(сравни с [Окунь, с.21]. Аналогично можно определить понятие **потенциального 4-импульса материальной точки**

$$P^\mu_\Pi = P^\mu_f - P^\mu. \tag{10}$$

8. Полная производная. В механике точки важное значение имеет понятие **полной производной**. Обычное понятие **производной** df/dx даётся для функции f одной переменной x. Если величина f является функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$ многих переменных $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\{x_i\}$ этих переменных, то обычная производная по каждой из этих переменных x_i (при неизменных значениях других переменных) называется **частной производной** и обычно обозначается $\partial f/\partial x_i$.

Приращение $d_{x_i}f$, соответствующее бесконечно малому приращению (**дифференциалу**) dx_i переменной x_i, называется **частным дифференциалом** функции многих переменных f. Его, очевидно, можно записать в виде

$$d_{x_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \tag{1}$$

то есть бесконечно малое приращение функции f является линейной функцией от дифференциалов каждой переменной, поэтому произвольному бесконечно малому приращению всех переменных соответствует сумма всех частных дифференциалов функции f, назывваемая **полным дифференциалом** функции многих переменных

$$df = \sum_i d_{x_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{2}$$

Из (1) следует, что частную производную можно рассматривать как отношение частного дифференциала к дифференциалу соответствующей переменной

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d_{x_i} f}{dx_i}. \tag{3}$$

Аргументы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, вообще говоря, могут зависеть друг от друга посредством каких-нибудь **уравнений связи**. Эти уравнения могут, например, определять выбор в пространстве x_i некоторого подпространства, на котором предсавляет интерес поведение функции f. В частности это подпространство может являться мировой линией материальной точки.

Отношение полного дифференциала к дифференциалу любой из переменных (например, x_j) называется **полной производной** функции f по переменной x_j, которая из (2) равна

$$\frac{df}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dx_j}. \tag{4}$$

Если **все переменные независимы** друг от друга, то $dx_i/dx_j = 0$ $(i \neq j)$ и тогда **полная производная** просто **равна частной производной**

$$\frac{df}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Если существуют связи между переменными, то хотя бы одну из них (любую) можно считать независимой от остальных и по ней полная производная может отличаться от частной.

Материальная точка в пространстве-времени может характеризоваться некоторой величиной f, которую можно рассматривать как функцию точек x^μ этого пространства-времени

$$f = f(x^\mu). \tag{6}$$

Но если нас интересует поведение величины f на самой материальной точке, мировая линия которой определяется некоторыми уравнениями, связывающими координаты x^0, x^1, x^2, x^3, то интересными являются такие приращения функции f, которые не выводят за пределы мировой линии материальной точки, то есть для механики материальных точек полезно понятие **полного дифференциала** и **полной производной** функции $f(x^\mu)$.

За независимую переменную для материальных точек удобно брать время t или связанный с ним инвариантный интервал на мировой линии с элементом

$$ds = \sqrt{dx^{02} - d\mathbf{x}^2} = \frac{ds}{dt} dt = \frac{dt}{u^0}. \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f. \tag{8}$$

9. Релятивистские преобразования координат и скорстей. Найдём формулы преобразования от одной инерциальной системы отсчёта к другой, то есть формулы, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчёта K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'. Релятивистские формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными. Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчёта времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырёхмерной системы координат x, y, z, t.

Всякое вращение в четырёхмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, tx, ty, tz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy, xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости tx; координаты y и x при этом не меняются. Это преобразование должно оставлять не изменной, в частности, разность $t^2 - x^2$ – квадрат интервала от точки (t, x) до начала координат. Связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании даётся в наиболее общем виде формулами

$$x = x'\mathrm{ch}\,\psi + t'\mathrm{sh}\,\psi, \quad t = x'\mathrm{sh}\,\psi + t'\mathrm{ch}\,\psi, \tag{1}$$

где ψ – гиперболический угол поворота. Простой проверкой легко убедится, что при этом действительно будет $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$. Формулы (1) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоэвклидовой геометрии от эвклидовой.

Пусть движение системы K' относительно системы K происходит со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координата x и время t. Поэтому это преобразование вида (1). Остаётся определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V.

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы K'. Тогда $x' = 0$ и формулы (1) принимают вид

$$x = t'\mathrm{sh}\,\psi, \quad t = t'\mathrm{ch}\,\psi,$$

или, разделив одно на другое, имеем $x/t = \mathrm{th}\,\psi$. Но $x/t = V$, поэтому $\mathrm{th}\,\psi = V$.

Отсюда

$$\mathrm{sh}\,\psi = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \mathrm{ch}\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Подставляя это в (1), находим:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + Vx'}{\sqrt{1 - V^2}},$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}. \tag{2}$$

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t, получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая первое уравнение относительно x', y', z', t'. Это и есть искомые формулы преобразования, называемого **преобразованием Лоренца**.

При $V > 1$ в формулах (2) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей 1 не возможно. Невозможно даже использование системы отсчёта, движущейся со скоростью, равной 1, - при этом знаменатели в формулах (2) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению с 1, вместо (2) можно пользоваться приближёнными формулами

$$x = x' + Vt',\ y = y',\ z = z',\ t = t' + Vx'. \tag{3}$$

Заметим, что результат двух последовательных преобразований Лоренца зависит, вообще говоря, от их последовательности (**некоммутативность преобразований Лоренца**). Исключением являются лишь преобразования с параллельными векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ (эквивалентные поворотам четырёхмерной системы координат вокруг одной и той же оси).

Согласно определению преобразования вектора, **координаты любого свободного 4-вектора** (координаты которого не связаны друг с другом) **преобразуются также как координаты его 4-пространства**. Однако, 4-скорость u^μ является 4-вектором, координаты которого связаны условием $u^\mu_\mu = 1$, поэтому **4-скорость при преобразовании 4-координат преобразуется особо**.

Поэтому найдём формулы, связывающие скорость материальной частицы в одной системе отсчёта со скоростью той же частицы в другой системе. Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x. Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости частицы в системе K, а $v'_x = dx'/dt'$ – компонента скорости той же частицы в системе K'.

Из (2) имеем:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - V^2}},\ dy = dy',\ dz = dz',\ dt = \frac{dt' + V\,dx'}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Разделив первые три равенства на четвёртое и введя скорости

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt, \quad \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt',$$

находим

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V},\ v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-V^2}}{1 + v'_x V},\ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-V^2}}{1 + v'_x V}. \qquad (4)$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой **закон сложения** (или лучше сказать – **композиции**) скоростей в теории относительности. В предельном случае $V \to 0$ они переходят в формулы классической механики

$$v_x = v'_x + V,\ v_y = v'_y,\ v_z = v'_z.$$

В частном случае движения частицы параллельно оси x $v_x = v,\ v_y = v_z = 0$. Тогда $v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причём

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V}. \qquad (5)$$

Легко убедится, что композиция двух скоростей, меньших или равных 1, есть снова скорость, не бóльшая 1. Для скоростей V, значительно меньших 1 (скорость v при этом может быть любой), имеем приближённо с точностью до членов порядка V:

$$v_x = v'_x + V(1 - v'^2_x),\ v_y = v'_y - v'_x v'_y V,\ v_z = v'_z - v'_x v'_z V. \qquad (6)$$

Эти формулы можно записать в виде одной векторной формулы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - (\mathbf{V}\mathbf{v}')\mathbf{v}'. \qquad (7)$$

Обратим внимание на то, что в релятивистский закон композиции скоростей (4) две скорости $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ входят несимметричным образом (если только обе они не направлены вдоль оси x). Это обстоятельство естественным образом связано с некоммутативностью преобразований Лоренца.

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости xy. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x = v\cos\theta,\ v_y = v\sin\theta$, а в системе K' имеем $v'_x = v'\cos\theta',\ v'_y = v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' - абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями x и x' соответственно в системах K и K'). С помощью формул (4) находим тогда:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1-V^2}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \qquad (8)$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Рассмотрим подробнее важный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчёта, – явление, называемое **аберрацией** света. В этом случае $v = v' = 1$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-V^2}}{V + \cos\theta'}\sin\theta'. \qquad (9)$$

Из тех же формул преобразования (4) легко получить аналогичную зависимость для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-V^2}}{1+V\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta'+V}{1+V\cos\theta'}. \tag{10}$$

В случае $V \ll 1$ находим из (10) с точностью до членов порядка V:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -V\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = V\sin\theta', \tag{11}$$

то есть известную элементарную формулу для аберрации света.

§7. Системы материальных точек.

1. 4-импульс системы материальных точек. Согласно (6.1.9) лагранжиан системы материальных точек записывается в виде суммы

$$\Lambda = \Lambda_f - \sum_i m_i(s_i)\sqrt{1-v_i^2}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{1}$$

При наличии **внутреннего поля**, описываемого лагранжианом Λ_f, форма мировых линий этих точек может не быть прямой и их массы могут не быть постоянными как у свободных материальных точек. Импульс всей замкнутой механической системы (включая внутреннее поле) постоянен и времениподобен. **Внутреннее поле** понимается как поле, создаваемое самими материальными точками этой системы, взаимодействием которого с внешней средой можно пренебречь.

Инерциальную систему, относительно которой 3-импульс замкнутой механической системы равен нулю, будем называть **сопутствующей** этой механической системе. При этом будем говорить, что эта механическая система **покоится** относительно сопутствующей системы отсчёта. Скорость u^μ сопутствующей системы будем называть **скоростью системы материальных точек как целого**. **Масса** m любой замкнутой системы определяется условием (4.3.3)

$$P^\mu = mu^\mu, \tag{2}$$

откуда

$$m = \sqrt{P^\mu P_\mu}, \tag{3}$$

где для массы (по её определению) необходимо выбирать знак $+$.

В частном случае системы из одной материальной точки (без поля), масса системы будет равна массе этой материальной точки.

Лагранжиан (1) представлен суммой членов, каждый из которых зависит от своей обобщённой координаты, поэтому согласно (4.3.9) **4-импульс**

замкнутой системы материальных точек аддитивен относительно её частей, представленных материальными точками и внутренним полем, хотя сам **лагранжиан, вообще говоря, не аддитивен** поскольку перекрываются плотности действия поля и материальных точек, то есть

$$P^{\mu} = P_0^{\mu} + P_N^{\mu} = P_0^{\mu} + \sum_i P_i^{\mu} = \sum_j P_j^{\mu}, \tag{4}$$

где P_0^{μ} – **4-импульс поля**, i=1,2,…, j=0,1,2,…,

$$P_N^{\mu} = \sum_i P_i^{\mu} \tag{5}$$

– **4-импульс замкнутой системы материальных точек, без 4-импульса поля**.

Внутреннее поле и материальные точки могут обмениваться 4-импульсом при условии сохранения 4-импульса замкнутой системы. Хотя 4-импульс замкнутой системы неизменен, 4-импульсы материальных точек и поля могут изменяться.

В силу аддитивности 4-импульса замкнутой системы материальных точек и их внутреннего поля, представляет интерес **4-импульс P_m^{μ} любого подмножества материальных точек этой системы (куда можно включить и внутреннее поле системы)**:

$$P_m^{\mu} = \sum_a P_a^{\mu}, \tag{6}$$

где P_a^{μ} – 4-импульс любой материальной точки или может быть поля.
Из (6), деля на **массу m_m подмножества материальных точек системы**, находим **4-скорость подмножества материальных точек системы**

$$u_m^{\mu} = \sum_a \frac{m_a}{m_m} u_a^{\mu}, \tag{7}$$

где u_a^{μ} и m_a – **4-скорость и масса a-той материальной точки**,

u_m^{μ} постоянна только в случае всей замкнутой системы.

Умножив на $u_{m\mu}$, получим **массу подмножества материальных точек** в виде

$$m_m = \sum_a m_a u_a^{\mu} u_{m\mu}. \tag{8}$$

Если все точки подмножества движутся с одной 4-скоростью, то согласно (7) эта 4-скорость совпадает **по направлению** со скоростью системы в целом, а значит равна ей, так как модули всех 4-скоростей равны 1. Тогда для множества взаимно неподвижных материальных точек системы

$$m_m = \sum_a m_a, \quad u_a^{\mu} = u_m^{\mu}. \tag{9}$$

4-импульс подмножества материальных точек, конечно, отличается от 4-импульса их замкнутой системы, включающей поле, однако обмен 4-импульсом материальных

точек с полем может быть равновесным, особенно в статистическом смысле, поэтому актуален случай когда модуль 4-импульса поля (то есть его масса), взаимодействующего с материальными точками, пренебрежимо мал по сравнению с модулем 4-импульса множества материальных точек.

2. Кинетический эффект массы системы свободных материальных точек. Найдём область значений величины

$$u_a^\mu u_{m\mu} = u_a^0 u_m^0 - \mathbf{u}_a \mathbf{u}_m. \tag{1}$$

Так как это инвариант, то его величина не зависит от выбора системы координат. Так как 4-скорость времениподобна, то существует мгновенно сопутствующая система координат, в которой $\mathbf{u}_m = 0$. При этом

$$u_a^\mu u_{m\mu} = u_a^0 u_m^0, \quad \mathbf{u}_m = 0. \tag{2}$$

Если материальные точки свободны, то мгновенно сопутствующая система является просто инерциальной системой центра инерции множества свободных материальных точек. Так как $u_m^0 \geqslant 1$ и $u_a^0 \geqslant 1$, то искомая область значений даётся неравенством

$$u_a^\mu u_{m\mu} \geqslant 1. \tag{3}$$

Тогда из (1.8) очевидно, что для системы свободных материальных точек

$$m_m = \sum_a m_a u_a^\mu u_{m\mu} \geqslant \sum_a m_a, \tag{4}$$

то есть

$$m_m \geqslant \sum_a m_a. \tag{5}$$

Согласно (4) знак равенства имеет место при неподвижности материальных точек относительно их центра инерции, а следовательно превышение массы множества над суммой масс его точек обязано движению этих точек относительно 4-скорости u_m^μ всего множества. Разность

$$m_m - \sum_a m_a \geqslant 0 \tag{6}$$

будем называть **кинетическим релятивистским эффектом массы системы свободных материальных точек**. Эта разность имеет релятивистское происхождение, так как при нерелятивистских скоростях её относительная величина ничтожна ($u_a^\mu u_{m\mu} \to 1$).

3. Дефект массы системы связанных материальных точек. Система связанных материальных точек может иметь **деффект массы**, который является разностью массы m'_m множества материальных точек этой системы при исключении поля из лагранжиана и его массы m_m при включении поля в лагранжиан

$$\Delta m = m'_m - m_m. \tag{1}$$

Дефект массы характеризует силу взаимодействия частей (в частности материальных точек) механической системы, как например при положительных массах **освобождение** частей от их связи увеличивает энергию системы, так как преодоление сил, связывающих систему требует затраты энергии, то есть совершения **работы против сил, связывающих систему**. Минимальная работа, необходимая для освобождения лишь одной части системы называется **работой выхода** этой части системы. **Дефект массы** называют также **энергией связи** [Окунь, с.23]. Взаимодействие отрицательных масс происходит в обратном порядке во времени. В ДФ все отрицательные массы сводятся к положительным инвертированием точечных зарядов (см. ниже).

Дефект массы зависит от характера сил связи частей замкнутой системы. В нашей теории все силы прямо или косвенно сводятся к электромагнитному взаимодействию точечных зарядов. Наиболее общее выражение для дефекта масс систем таких зарядов даёт **теорема вириала**, которую мы рассмотрим позже.

Дефект массы можно также характеризовать безразмерной величиной

$$g = \frac{\Delta m}{m'_m} = \frac{m'_m - m_m}{m'_m}, \tag{2}$$

которую назовём **коэффициентом дефекта массы**.

Масса является инвариантной энергией покоя, но такая энергия сохраняетя только в сопутствующей системе, поэтому если система состоит из ускоренных силой взаимодействия частиц, то её масса может отличаться от суммы масс её частей.

4. Системы материальных точек как материальные точки (частицы). Систему материальных точек, достаточно локализованную в условиях данной задачи, саму можно рассматривать как материальную точку (**квази-точечная замкнутая механическая система**, или **частица**). Её **мировая линия** однозначно определяется центром инерции. При этом, не всегда можно игнорировать их собственный момент импульса. То есть, вообще говоря, понятие **материальной точки** может характеризоваться также величиной **собственного момента импульса**. Взаимодействие нейтральных частиц существенно только при их достаточном сближении (**столкновении**). Результат столкновения определяется законами сохранения. При этом изменение частиц может заключаться только в изменении направления 4-скорости (**упругое** столкновение), а в противном случае столкновение **неупругое (жёсткое)** .

5. Стохастические системы материальных точек.

Большое количество неразличимых материальных точек, слабо взаимодействующих друг с другом образуют **идеальный газ**. Слабое взаимодействие понимаем как пренебрежимо малое отклонение от прямолинейности движения или пренебрежимо редкие упругие столкновения пар материальных точек. Поведение такого газа можно описывать дифференциальными уравнениями, которым подчиняются статистические распределения его механических величин. Среди этих распределений могут существовать стационарные финитные распределения,

которые сами можно рассматривать как механические системы (**стохастические**). При этом, если окружающая газовая среда статистически однородна и изотропна, то по теореме Нётер существуют **статистические механические законы сохранения**. Эти законы отличаются от обычных законов сохранения только существованием **соотношений неопределённостей** для механических величин. Законы **квантовой механики** тоже являются статистическими законами.

⋆⋆⋆

Из двух слов следует выбирать меньшее.

Поль Валери.

Глава 10. МИКРОПУЛЬСАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ.

ПРОТИСТОН.

§1. 4-ток полной сопутной волны.

1. Ток полной сопутной волны. В главе 8 мы рассматривали точечный заряд нормальной сопутной волны вида (8.3.4.1)

$$\varphi = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varkappa r)}. \tag{1}$$

Полная сопутная волна в изначальной системе имеет вид (8.3.4.2)

$$\varphi = 2A\cos(\omega t + \varphi)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{ir\varkappa} = a_1(t)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{ir\varkappa}, \tag{2}$$

где

$\varkappa = \sqrt{\omega^2 - k^2}$,

$a_1(t) = 2A\cos(\omega t + \varphi)$, фаза φ зависит от выбора системы еоординат.

Её заряд в среднем в 2 раза больше точечного заряда нормальной сопутной волны. Однако полные сопутные волны, в отличие от нормальных, имеют малые пульсации точечного заряда, которые мы теперь рассмотрим. Эти пульсации, которые мы назовём **микропульсациями**, несмотря на космологическую малость, играют существенную роль.

Найдём плотность 4-тока $j^\mu = (j^0, \mathbf{j})$ полной сопутной волны по общей формуле

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u) = -\mathrm{Im}(\varphi\nabla^\mu\varphi^*). \tag{3}$$

Очевидно, что в силу вещественности временно́го множителя, **плотность сплошного заряда равна нулю**

$$j_0 = \varrho = 0, \tag{4}$$

(кроме, быть может, точки разрыва $r = 0$, где **заряд точечный**). Вычислим компоненту $\mathbf{j}$ в окрестности точки разрыва (**сплошной ток**)

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \mathbf{j}_r = j_r \mathbf{i}_r = -\mathrm{Im}(\varphi \bigtriangledown \varphi^*) = +\mathrm{Im}(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial r})\mathbf{i}_r = \\ = a_1^2 \,\mathrm{Im}[\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i\varkappa r} \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\varkappa r})]\mathbf{i}_r = \\ = a_1^2 \frac{1}{r}\,\mathrm{Im}[\mathrm{e}^{i\varkappa r}(\frac{-1}{r^2}\mathrm{e}^{-i\varkappa r} - \frac{i\varkappa}{r}\mathrm{e}^{-i\varkappa r})]\mathbf{i}_r = \\ = a_1^2 \;\frac{1}{r}\,\mathrm{Im}[\frac{-1}{r^2} - i\frac{\varkappa}{r}]\mathbf{i}_r = -a_1^2\,\frac{\varkappa}{r^2}\,\mathbf{i}_r = \varepsilon_q a_1^2 \frac{|\varkappa|}{r^2}\mathbf{i}_r. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычислим $\mathrm{div}\,\mathbf{j}$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = [\text{Корн, с. 188}] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_r) = -a_1^2\,\varkappa\,\frac{1}{r^2}\;\frac{\partial}{\partial r}1.$$

То есть

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0 \tag{6}$$

везде, кроме, быть может, точки $r = 0$, где ток может втекать или вытекать.

Найдём величину этого тока

$$I_r = \oint \mathbf{j}\,d\mathbf{f}, \tag{7}$$

где $d\mathbf{f}$ – элемент поверхности, окружающей точку разрыва $r = 0$.
Взяв в качестве такой поверхности малую сферу радиуса r с центром в точке $r = 0$, имеем

$$\begin{aligned} I_r = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} j_r r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = 4\pi\,\varepsilon_q a_1^2\,|\varkappa| = \\ = 16\pi\,\varepsilon_q |\varkappa| |A|^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varepsilon_q = \pm 1$, в зависимости от того, вытекает (+1) ток или втекает (–1). То есть через **центр** $r = 0$ протекает **пульсирующий ток**.

Отметим, что **сплошной 4-ток** (в отличие, например, от плотности потока энергии) **может иметь сколь угодно большую скорость**, так как сплошной 4-ток **пространственноподобен**.

2. Протистон, его 4-ток и паразаряд. Кривую мировую линию точечного заряда, если она гладкая, можно разбить на достаточно малые элементы, которые можно считать прямыми, поэтому 4-ток в достаточно малой окрестности особой

точки, движущейся по кривой, можно вычислять по той же формуле, заменяя время t на собственное время s:

$$I_r = 16\pi\ \varepsilon_q|\varkappa||A|^2\cos^2(\omega s+\varphi). \tag{1}$$

В силу симметрии единого поля Вселенной относительно инверсии времени, начальная фаза φ должна иметь значение 0, если собственное время отсчитывается от Начала,

$$\varphi = 0, \quad \text{при } s_{|T=0} = 0. \tag{2}$$

Тогда

$$I_r = 16\pi\ \varepsilon_q|\varkappa||A|^2\cos^2\omega s. \tag{3}$$

Для сопутной волны, вообще говоря, неразрывность 4-тока на особенности не обязательна (**разрывный случай**). Если же предъявить требование неразрывности 4-тока на особенности (**неразрывный случай**, вытекающий из уравнения единого поля (7.3.3.1)), то в этой точке заряд будет изменяться по определённому закону. Такую сопутную волну (или её путь) мы называем **протистоном**. **Неразрывность** здесь мы понимаем в том смысле, что 4-ток всюду (в том числе и в особых точках) определяется самим единым полем и следовательно неразрывен (7.3.3.2). Так как в ДФ никаких внешних полей по отношению к единому полю не существует, в том числе и в особых точках, то условие неразрывности 4-тока, вытекающее из уравнения единого поля, должно распространяться на всю область его определения.

Протистон при отрицательном заряде будем также называть (−)**протистоном**. Соответственно пара- или анти-сопутной волне протистона, его назовём **пара-протистоном** или **анти-протистоном**. Пара-протистон имеет **положительный паразаряд**, а антипротистон – **отрицательный паразаряд** (8.5.7.3). Согласно (8.5.7.3) знаки их электрического и пара- зарядов одинаковы. Таким образом существуют 2 вида протистонов:

$$\Pi^+, \Pi^-. \tag{4}$$

Инвариантность уравнения КГФ единого поля позволяет рассматривать это поле как механическую систему, подчиняющуюся механическим законам сохранения, что вместе с требованием неразрывности 4-тока, накладываемым на протистон, не допускает утверждать о произвольности пути протистона. Это приводит к понятию электродинамики, которое мы ниже рассмотрим. С механической точки зрения **относительно единого поля 4-пространство однородно и изотропно**. (5)

3. Точечный заряд протистона. Можно говорить о сохранении 4-тока в точке разрыва $r = 0$, только в том случае, если согласно закону сохранения тока

$$I_r = -\frac{dq}{ds} = 16\pi\,\varepsilon_q|\varkappa||A|^2\ \cos^2\omega s, \tag{1}$$

где

$$\varkappa = \sqrt{\omega^2 - k^2}. \tag{2}$$

Интегрируя ток в интервале от данного момента времени до бесконечности, где предполагается истечение заряда до **предельного** нулевого значения, получим заряд в особой точке:

$$q = 16\pi\varepsilon_q \int\limits_{s(T)}^{\infty} |A|^2|\varkappa| \cos^2 \omega s \; ds =$$

$$= 8\pi\varepsilon_q(\int\limits_{s(T)}^{\infty} |A|^2|\varkappa| \; ds + \int\limits_{s(T)}^{\infty} |A|^2|\varkappa| \cos 2\omega s \; ds). \tag{3}$$

В ультрарелятивистском случае $\varkappa = -\omega$ (8.3.2.7). Тогда, сравнивая первый член в (3) с (8.3.2.4), находим, что он равен удвоенному заряду $2q'$ нормальной волны. Учитывая, что $|A|^2|\varkappa|$ убывает космологически медленно по сравнению с $\cos 2\omega s$, проинтегрируем второе слагаемое и, получим

$$q = 2q' - 4\pi\varepsilon_q \; |A|^2 \; \frac{|\varkappa|}{\omega} \sin 2\omega s. \tag{4}$$

Мировая линия протистона по определению времениподобна, поэтому она не может лежать на изотропном конусе (на границе) Вселенной, кроме того она непрерывна (сохранение заряда).

Виртуальные рождение и аннигиляцию (если они существуют) протистонов надо рассматривать как вершины мировой линии протистона, где она изменяет направление (**многопроходна**) в абсолютном времени.

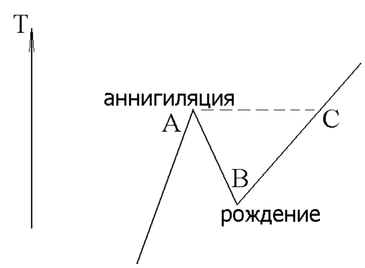


Рис. 110.1.

Если до точки A $ds > 0$, то на отрезке AB $ds < 0$, поэтому в интеграле заряда участок ABC (**тупик**) роли не играет, то есть его можно исключить из интеграла.

Из (4) видно, что заряд пульсирует с частотой 2ω. Если второе слагаемое космологически мало по сравнению с первым, то заряд практически постоянен и можно говорить об усреднённом значении

$$\langle q\rangle = 2q' = \frac{\varepsilon_q k_q}{T^3}, \tag{5}$$

так как с учётом $\varepsilon_q|\varkappa| = -\varkappa$, первый интеграл в (3) совпадает со значением (8.3.4.4) заряда нормальной сопутной волны.

Используя выражение (8.2.10.9):

$$|A|^2 = \frac{2\pi^3 B_F^8}{|k|^3 u^{02} T^3} = \frac{3k_q}{8\pi|k|T^4}, \tag{6}$$

где

$$u^{02} = \frac{16\pi^4 B_F^8 T}{3k^2 k_q}, \quad (8.5.2.3) \tag{7}$$

имеем в ультрарелятивистском случае ($\varkappa^2 = \omega^2 = k^2 u^{02}$)

$$q = \langle q \rangle + 4\pi|A|^2 \frac{\varkappa}{\omega} \sin 2\omega s = \langle q \rangle - 4\pi|A|^2 \sin 2\omega s =$$

$$= \frac{\varepsilon_q k_q}{T^3} - \frac{3k_q}{2|k|T^4} \cdot \sin 2\omega s = \frac{\varepsilon_q k_q}{T^4}(T + \frac{3}{2|k|} \sin 2|k|T). \tag{8}$$

В последнем равенстве мы использовали связь $\omega s = ku^0 s = kT$ и нечётность функции $\sin 2kt = \varepsilon_q \sin 2|k|T$. Таким образом частота пульсаций 2ω в сопутствующей системе совпадает с двойной частотой $2k$ глобальной волны (6.3.5.10) в изначальной системе координат. Амплитуда пульсаций точечного заряда космологически мала (в $2T|k|/3$ раза меньше) по сравнению с его осреднённым значением (поэтому их назовём **микропульсациями**):

$$\delta q = \frac{\varepsilon_q 3k_q}{2|k|T^4} \sin 2|k|T = \frac{\varepsilon_q 3k_q}{2kT^4} \sin 2kT, \tag{9}$$

где $2|k|$ – **угловая частота микропульсаций**, $|k|/\pi$ – **частота микропульсаций**, $\pi/|k|$ – **период микропульсаций**.

Такеим образом

$$q = \langle q \rangle + \delta q. \tag{10}$$

Мы доопределили 4-ток в точке разрыва $r = 0$ таким образом, что он здесь сохраняется. Это позволит нам применять в дальнейшем к протистонам электродинамические понятия.

Пульсирование величины точечного заряда может вызвать недоумение с точки зрения его сохранения. Однако, здесь нет противоречия, так как сплошной 4-ток пространственноподобен, то есть его скорость не ограничена и следовательно он может уносить заряд в бесконечность и обратно, не создавая конечной плотности заряда в окрестностях точечного заряда, хотя конечная плотность сплошного заряда в этой окрестности появляется при переходе в систему отсчёта, где точечный заряд движется. Дискретный же 4-ток (представленный точечным зарядом) времениподобен.

4. Плотность заряда протистона. Так как заряд точечный, то плотность заряда выражается через δ-функцию.

$$\varrho = \frac{q}{4\pi r^2} \delta(r). \tag{1}$$

При этом

$$4\pi \int\limits_0^\infty \varrho r^2\, dr = q. \tag{2}$$

Теперь $\operatorname{div}\mathbf{j}$ доопределяется и в точке $r = 0$ (используем (3.1) и неразрывность 4-тока $\nabla_\mu j^\mu = 0$ (7.1.1.3))

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{dq}{ds}\,\delta(r) = 4|A|^2\frac{\varepsilon_q|\varkappa|}{r^2}\cos^2(\omega t)\,\delta(r). \tag{3}$$

§2. Некоторые космологические свойства протистонов.

1. Ультрарелятивистское условие. При космологически больших значениях возраста Вселенной T, скорость протистонов отличается от 1 космологически мало, то есть практически

$$v = 1, \tag{1}$$

так как $u^{02} \sim T$ (8.5.5.3), то есть **протистоны являются ультрарелятивистскими частицами**. Это **ультрарелятивистское условие** очень существенно для физики протистонов.

2. Существование заряда только во Вселенной.

Вне Вселенной единое поле экспоненциально убывает, кроме шумовой компоненты. Поэтому путевая функция имеет шумовой характер, а значит втекающие и вытекающие токи не накапливают заряд. Следовательно вне Вселенной не существуют протистоны.

3. Ненаблюдаемость сплошных 4-токов. Космологическое постоянство заряда протистона. Поскольку заряд протистонов при космологически большом временем T убывает $\sim 1/T^3$, при постоянной концентрации протистонов, а вытекающие сплошные 4-токи убывают $\sim 1/T^4$ и кроме того нейтрализуют друг друга, то при космологически больших значениях T сплошные 4-токи космологически малы по сравнению с точечным зарядом протистонов, В силу этой малости **сплошные 4-токи практически не наблюдаемы**, а все остальные 4-токи наблюдаются только как **космологически постоянные точечные заряды протистонов**.

4. Равенство и квантование зарядов. Заряд однозначно определяется возрастом Вселенной T, причём осциллирующая часть заряда пренебрежимо мала, поэтому можно говорить, что **все протистоны при одинаковом возрасте Вселенной T имеют практически равные по модулю заряды** (8.5.5.9).

Одинаковость зарядов вместе с наблюдаемостью лишь точечных зарядов будем называть **квантованием зарядов**.

Учитывая сохранение зарядов, их равенство при одном T можно рассматривать как выравнивание в процессе обмена сплошными токами, которые хотя и очень

малы, но за космологически большое время могут переносить значительные заряды. Стремление к выравниванию зарядов согласуется с представлением о минимуме энергии (то есть устойчивости) равномерного распределения заряда в системе точечных зарядов.

5. Изолированность точечных зарядов. Согласно (8.5.3.3) глобальная концентрация точечных зарядов не зависит от T и одинакова для обоих знаков, то есть **точечные заряды могут устойчиво существовать лишь изолированно друг от друга**.

6. Число протистонов, видимых из данной неподвижной точки. В каждый данный момент число протистонов, видимых из данной точки, неподвижной в реликтовой системе отсчёта, конечно и равно N_s. Это число можно найти, интегрируя концентрацию протистонов (8.5.5.4)

$$\check{c}_q = 1 \qquad (1)$$

по изотропному конусу, видимому из данной неподвижной точки A, то есть, учитывая постоянство концентрации, имеем

$$N_s = 4\pi \int\limits_0^{T/2} r^2 dr =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{T/2} = \frac{\pi T^3}{6}. \qquad (2)$$

Что в 8 раз меньше числа N_U протистонов в 3-пространстве Вселенной при том же

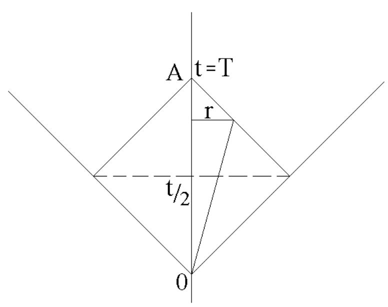


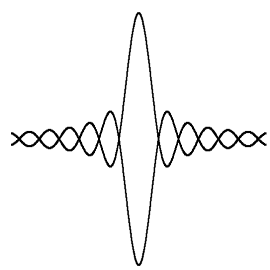
Рис. 110.2.

времени (8.5.3.4), (8.5.5.2), так как в 8 раз меньше наблюдаемый объём.

7. Космологическое сохранение точечных зарядов.
Из (1.3.8) следует, что с космологической точностью точечный электрический заряд сохраняется. **Точечный заряд сохраняется точно**, если, отвлекаясь от его микропульсаций, в качестве единицы заряда принять значение $|\langle q\rangle|$ (1.3.5). (1)

⋆⋆⋆

Доброта и скромность единственно нетленны.
Как смешна гордыня перед лицом Вселенной.



Глава 11. ДОКВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА НЕРАЗРЫВНОГО 4-ТОКА

Электродинамическое представление единого поля позволяет найти подходы к законам движения особенностей единого поля (**протистонов**), являющихся структурными элементами **вещества**, из которого состоим и мы с Вами.

§1. Электромагнитное поле 4-тока.

1. Плотность 4-тока как механическая система. Наиболее общим выражением локальных свойств единого поля является его уравнение КГФ. Оно лоренц-инвариантно, поэтому относительно этих общих локальных свойств единого поля **4-пространство однородно и изотропно**. Это означает, что **наиболее общими локальными свойствами единого поля являются механические законы**. Конкретный же (**объективный**) вид единого поля задаёт его мировой спектр. Суть механики в существовании сохраняющихся величин, имеющих большую познавательную ценность. В качестве обобщённых координат могут рассматриваться как само единое поле, так и различные его функции, в том числе мировые линии особенностей единого поля.

В связи с неразрывностью 4-тока j^μ единого поля, он имеет важное значение, дополняя механику ещё одним (одиннадцатым) законом сохранения (заряда), расширяя тем самым механику до **электродинамики**. В электродинамике 4-ток j^μ единого поля в разных задачах рассматривается как обобщённые координаты замкнутой механической системы с лагранжианом $\Lambda(j^\mu, q_i)$, где j^μ может быть как задан так и не задан вместе с некоторыми другими обобщёнными координатами (параметроами) q_i. Объективно 4-ток **задан** единым полем, поэтому для того чтобы

плотности функции Лагранжа можно было бы придать вид, удовлетворяющий тождественно обобщённому уравнению Лагранжа, нужно иметь в распоряжении свободные подгоночные параметры q_i с общим числом степеней свободы как и у плотности 4-тока j^μ, то есть эти параметры q_i в релятивистской теории должны также образовывать 4-вектор. Обозначим его $q_i = A^\mu$.

Если величина A^μ не задана, то плотности функции Лагранжа можно задать любой вид, а 4-векторная функция A^μ определится тогда из обобщённых уравнений Лагранжа, получаемых варьированием действия по A^μ и её производным и приравниванием вариации к нулю.

Получаемые уравнения должны быть проверены на соответствие **условию неразрывности 4-тока** $\nabla_\mu j^\mu = 0$.

Вообще дополнение заданных обобщённых координат q_j некоторыми величинами q_i, позволяющими рассматривать систему величин q_j, q_i как замкнутую механическую систему, будем называть **механическим дополнением обобщённых координат** q_j **(дополняющими) обобщёнными координатами** q_i.

2. Электродинамическая форма лагранжиана. 4-потенциал и тензор электромагнитного поля 4-тока. В частности, мы можем представить плотность функции Лагранжа в следующей форме, которую будем называть **электродинамическим лагранжианом**:

$$\Lambda(j^\mu, A^\mu) = -A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{2}$$

(Сравните с [Ландау 2, (28,6)]).

При этом, если величина A_ν выбрана так, что функция Λ удовлетворяет обобщённому уравнению Лагранжа, то 4-векторную величину $A_\nu(x^\alpha)$ будем называть **4-потенциалом** 4-тока j^μ, а тензорную функцию $F_{\mu\nu}$ – **тензором электромагнитного поля** 4-тока j^μ. Компоненты φ и $\mathbf{A}$ 4-потенциала $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ будем называть **потенциалом** и **векторным потенциалом**.

Заметим, что выбор коэффициента $1/16\pi$ в (1) не является принципиальным и определяет лишь систему электромагнитных единиц [Ландау 2, с.95,(27,4)], [Садовский, с.38,(2.90)], смысл которых пока не определён. Сделанный в лагранжиане (1) выбор постоянных коэффициентов соответствует такому же виду уравнений, как в гауссовой системе единиц.

Ниже мы увидим, что несмотря на незаданность A_μ, обобщённое уравнение Лагранжа в таком (**электродинамическом**) виде всё-таки накладывает некоторые ограничения на 4-ток, а именно, требует сохранения заряда (как раз необходимое условие неразрывности), то есть **электродинамическая форма плотности функции Лагранжа применима только к неразрывным 4-токам**.

Таким образом **неразрывный 4-ток и 4-потенциал** A^μ **образуют замкнутую механическую систему**. Для заданного поля j^μ вид поля A^μ можно найти из принципа наименьшего действия. При этом получаются уравнения Лагранжа, которые в этом случае называются **уравнениями Максвелла** (**вторая пара**). Можно поставить и обратную задачу нахождения поля j^μ по заданному полю A_μ.

Интегрируя плотность функции Лагранжа по пространству-времени, для системы 4-ток-электромагнитное поле получим действие в виде

$$S = -\int A_\mu j^\mu d\Omega - \frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d\Omega, \tag{3}$$

где $d\Omega$ – элемент 4-объёма.

Полученную механическую систему, будем называть **электродинамической системой**.

Таким образом, существует система величин, определяемых 4-током j^μ, обладающая всеми необходимыми свойствами механической системы. Предложенный вариант такой системы имеет хорошо известную экспериментальную интерпретацию в классической электродинамике, которая, однако, нуждается в развитии дополнительных понятий.

3.Возможность вторичной метризации электродинамических систем. Обратим внимание на то, что данные определения обобщаются на случай криволинейной метрики пространства $\{x^\alpha\}$, так как тензор $F^{\mu\nu}$ аналогично определяется и при использовании ковариантных производных, благодаря тому, что они входят в виде разностей:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{1}$$

[Ландау 2, (86,12)]. Это является важным достоинством электродинамического вида лагранжиана, так как допускает вводить вторую метрику, сохраняя электромагнитные понятия. Это упрощает изучение электромагнитных полей в различных средах, позволяя использование понятий **геометрической оптики** и допуская **геометризацию гравитации**, электромагнитную природу которой мы увидим позже.

4. Электрическое и магнитное поля. Если определить векторные поля

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{2}$$

которые будем соответственно называть **электрическим** и **магнитным** полем, то подставляя $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ в тензор

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu, \tag{3}$$

не трудно показать, что

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где индекс $i = 0, 1, 2, 3$ нумерует строки, а k – столбцы.

Это же (как для всякого антисимметричного тензора, называемого также **бивектором** [Корн, (16.5-11)]) можно записать короче

$$F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}) \tag{5}$$

[Ландау 2, (23,5),(6,10)]. Таким образом

$$\begin{cases} \mathbf{E} = (F^{10}, F^{20}, F^{30}) \\ \mathbf{H} = (F^{32}, F^{13}, F^{21}) \end{cases}. \tag{6}$$

Распишем также смешанный тензор

$$F_{\mu}{}^{\nu} = F_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из (4) легко найти инвариант

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2). \tag{8}$$

Заметим, что **в данных определениях электрическое и магнитное поля пока не имеют смысла сил, действующих на точечные заряды**.

5. Инварианты электромагнитного поля. [Ландау 2, §25]. Из компонент 4-тензора $F^{\mu\nu}$ можно составить инвариантные величины:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \text{inv}, \tag{1}$$

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = \text{inv}, \tag{2}$$

где $e^{\mu\nu\alpha\beta}$ – совершенно антисимметричный единичный тензор. Первая из этих величин – истинный скаляр, а вторая – псевдоскаляр (произведение тензора $F^{\mu\nu}$ на дуальный ему тензор). Этот псевдоскаляр может быть представлен также в виде 4-дивергенции:

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 4 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(e^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\beta \right). \tag{3}$$

Выражая компоненты $F^{\mu\nu}$ через компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, легко найти инварианты вида

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \tag{4}$$

$$\mathbf{EH} = \text{inv}. \tag{5}$$

Псевдоскалярность второго из них очевидна из того, что он представляет собой произведение полярного вектора $\mathbf{E}$ на аксиальный вектор $\mathbf{H}$ (квадрат же $(\mathbf{EH})^2$ будет истинным скаляром). Из инвариантности последних двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчёта электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то есть $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчёта. Если в какой-нибудь системе отсчёта абсолютные величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе. Из (4) и (5) следует также

$$(\mathbf{E} - i\mathbf{H})^2 = \text{inv}. \tag{6}$$

Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчёта векторы $E > H$ (или $E < H$), то и во всякой другой системе будет $E > H$ (или $E < H$). Если в какой-нибудь системе отсчёта векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ образуют острый (или тупой) угол, то они быдут образовывать острый (или тупой) угол и во всякой другой системе.

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и $\mathbf{EH}$ имели заданные определённые значения. В частности, можно найти такую инерциальную систему отсчёта, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$, и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0\mathbf{H}_0$$

можно найти значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в этой системе отсчёта ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчёта).

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех системах отсчёта равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

Если лишь $\mathbf{EH} = 0$, то можно найти такую систему отсчёта, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), то есть поле чисто магнитное или чисто электрическое; наоборот, если в какой-либо системе отсчёта $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$, то в какой-нибудь другой системе это равенство нулю нарушится (в силу неинвариантности компонент ненулевого антисимметричного тензора электромагнитного поля), а равенство нулю скалярного произведения будет означать взаимную перпендикулярность векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в этой (и следовательно в любой) системе.

Конкретные выражения для преобразований Лоренца электромагнитного поля можно найти, например, в [Ландау 2, §24]. В этой книге они не используются.

§2. Уравнения Максвелла.

1. Первая пара уравнений Максвелла. Беря rot от определения **E** (1.4.1), имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1}$$

беря div от определения **H** (1.4.2), имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{2}$$

Мы получили **первую пару уравнений Максвелла**. Они получены даже и не из принципа наименьшего действия, а просто из определений полей **E** и **H**, то есть они не являются уравнениями Лагранжа. Таковыми является вторая пара уравнений Максвелла.

В 4-х мерной форме первую пару уравнений Максвелла можно записать в ковариантном виде

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial F_{\nu\varrho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\varrho\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{3}$$

Это совокупность 4-х уравнений, получающихся при

$$\mu, \nu, \varrho = \left\{ \begin{matrix} 0,1,2 \\ 1,2,3 \\ 2,3,0 \\ 3,0,1 \end{matrix} \right\}.$$

[Савельев 1, §64]. В силу асимметричности тензора $F_{\mu\nu}$, уравнение получающееся при любой другой комбинации индексов, сводится к одному из указанных четырёх.

Простой проверкой можно убедится, что (3) сводится к (1) и (2).

2. Вторая пара уравнений Максвелла. Условие Лоренца. Уравнение Даламбера. Вторая пара уравнений Максвелла для поля может быть получена из принципа наименьшего действия, то есть она является уравнениями движения замкнутой механической системы – плотность 4-тока-электромагнитное поле, при заданном 4-токе.

Вариация действия (1.2.4) для этой системы имеет вид (варьируется лишь поле, а не 4-ток, который считаем заданным):

$$\delta S = \frac{-1}{16\pi}\int \delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d\Omega - \int j^\mu \delta A_\mu d\Omega. \tag{1}$$

Здесь

$$\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} =$$

$$= 2F^{\mu\nu}\delta(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}) = 2F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - 2F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Воспользовавшись антисимметричностью $F^{\mu\nu}$, заменим в первом слагаемом $F^{\mu\nu}$ через $-F^{\nu\mu}$, а затем переобозначим друг в друга немые индексы μ и ν. В итоге

$$\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Изменив последовательность дифференцирования и варьирования величин A_μ, имеем

$$\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu.$$

Теперь преобразуем полученное выражение по формуле $uv' = (uv)' - u'v$:

$$\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu}\delta A_\mu) + 4\delta A_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\mu\nu}.$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$\delta S = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu}\delta A_\mu)d\Omega -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\delta A_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\mu\nu}d\Omega - \int j^\mu\delta A_\mu d\Omega. \tag{2}$$

Первый из трех интегралов можно преобразовать по формуле Остроградского-Гаусса в поверхностный интеграл:

$$\int\frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu}\delta A_\mu)d\Omega = \int F^{\mu\nu}\delta A_\mu df_\nu.$$

На границе рассматриваемого 4-объема $\delta A_\mu = 0$. Поэтому написанный интеграл исчезает. Сохраняя второй и третий интегралы, объединяя их и вынося за скобки общий множитель δA_μ, получим

$$\delta S = -\int(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + j^\mu)\delta A_\mu d\Omega.$$

В силу произвольности вариации δA_μ найденное нами значение δS может оказаться равным нулю только в том случае, если выражение в скобках равно нулю. Следовательно

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi j^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{3}$$

Это и есть вторая пара уравнений Максвелла, которая в векторной форме принимает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho. \tag{4}$$

(Заметим, что полученные уравнения Максвелла имеют такой же вид в любой системе единиц, где диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума приняты за 1, например, в гауссовой системе единиц (см, г, сек). [Яворский, IV.11.4].)

Величину $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ называют плотностью **тока смещения**. Ток смещения обеспечивает замкнутость цепей любых непостоянных токов. [Яворский, IV.11.3].

Записав $F^{\mu\nu}$ через 4-потенциал, из (3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}) = -4\pi j^{\mu}.$$

Или, изменяя порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = -4\pi j^{\mu}. \tag{5}$$

Используя обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \nabla^{\mu}, \quad \nabla^{\mu}\nabla_{\mu} = \Box, \tag{6}$$

вторую пару уравнений Максвелла, записанных через 4-потенциал, получаем в виде

$$\Box A^{\mu} - \nabla^{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\nu}) = 4\pi j^{\mu}. \tag{7}$$

Если на 4-потенциал наложить так называемое калибровочное **условие Лоренца** (см. следующий параграф)

$$\nabla_{\nu}A^{\nu} = 0, \tag{8}$$

то получим **уравнение Даламбера**

$$\Box A^{\mu} = 4\pi j^{\mu}, \qquad \nabla_{\nu}A^{\nu} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (7) является уравнением движения для замкнутой системы 4-ток-4-потенциал, при заданном 4-токе. Компоненты 4-потенциала играют роль обобщённых координат этой системы.

Так как (7) является дифференциальным уравнением 2-го порядка относительно A^{μ}, то A^{μ} определяется из него неоднозначно. К любому частному решению уравнения (7) всегда можно добавить любое решение однородного уравнения

$$\Box A^{\mu} - \nabla^{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\nu}) = 0. \tag{10}$$

3. Необходимость сохранения 4-тока в электродинамике. Применив операцию ∇_{μ} к уравнению Максвелла

$$\Box A^{\mu} - \nabla^{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\nu}) = 4\pi j^{\mu},$$

получим

$$\Box(\nabla_{\mu}A^{\mu}) - \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\nu}) = 4\pi\nabla_{\mu}j^{\mu}$$

или, заменяя немые индексы и используя обозначение $\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} = \Box$, имеем

$$\Box(\nabla_{\mu}A^{\mu}) - \Box(\nabla_{\mu}A^{\mu}) = 4\pi\nabla_{\mu}j^{\mu},$$

то есть получаем уравнение неразрывности

$$\nabla_\mu j^\mu = 0$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

что выражает неразрывность 4-тока, или сохранение заряда. Таким образом замкнутая механическая система плотность 4-тока-электромагнитное поле совместима только с таким 4-током, который удовлетворяет уравнению неразрывности. 4-ток решений уравнения КГФ как раз является таким током. Иначе можно сказать, что **4-потенциал существует только для неразрывного 4-тока (заряд которого сохраняется)**.

4. Дискретный 4-ток. Так как существуют точечные заряды (I.8.5.3.4), то кроме представления 4-тока в виде непрерывного поля, актуальным является также представление 4-тока в виде системы точечных зарядов q_i, движущихся по определённым траекториям. Плотность таких зарядов можно представить в следующем **дискретном** виде [Ландау 2, (28,1)]

$$\dot{\varrho} = \sum_i q_i \; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_i$ – радиус-вектор точечного заряда q_i. Тогда интеграл от $\dot{\varrho}$ по некоторому объёму является зарядом, находящимся в этом объёме, как и должно быть для плотности заряда. При этом плотность 4-тока

$$\dot{j}^\mu = \dot{\varrho} u^0 = \dot{\varrho}\; \frac{dx^\mu}{dx^0} = \sum_i q_i \; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\; \frac{dx_i^\mu}{dx^0}. \tag{2}$$

§3. Калибровки 4-потенциала.

1. Градиентные (калибровочные) пребразования. Градиентная инвариантность. (Сравни с [Беллюстин, с. 53]) Без изменения **E** и **H** можно заменить **A** и φ в выражениях

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2}$$

на

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \\ \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \end{array}\right\}, \tag{3}$$

где f – произвольная скалярная функция координат и времени.

Эти соотношения представляют собой **градиентные преобразования**.

Так как в (3) входит одна произвольная однокомпонентная функция, то **неоднозначность определения потенциала A^μ позволяет наложить на него одно дополнительное однокомпонентное условие**, например **условие Лоренца**

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{4}$$

то есть

$$\nabla_\mu A^\mu = 0, \tag{5}$$

которое ограничивает (**калибрует**) вид функции в градиентных преобразованиях, называемых также **калибровочными преобразованиями**. Кроме распространённой калибровки по Лоренцу возможны и другие калибровки.

Считается, что физический смысл имеют лишь величины, не меняющиеся при градиентных преобразованиях, то есть удовлетворяющие требованию **градиентной инвариантности**, а вид калибровки 4-потенциала безразличен. Однако, он может быть не безразличен, если величина точечного заряда не постоянна.

2. Недоопределённость потенциала, оставляемая калибровкой Лоренца. (Сравни с [Левич 1, с. 51]) Для произвольного 4-потенциала A^μ условие Лоренца, вообще говоря, не выполняется, так что

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \chi(\mathbf{r},\ t),$$

где $\chi(\mathbf{r},\ t)$ – некоторая функция.

Произведём калибровочное преобразование:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \tag{1}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2}$$

Тогда имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \chi(\mathbf{r},\ t) + \triangle f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Если потребовать, чтобы функция f удовлетворяла уравнению Даламбера

$$\triangle f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\chi(\mathbf{r},\ t),$$

то для преобразованных потенциалов $\mathbf{A}', \varphi'$ условие Лоренца будет выполняться. Такое требование всегда выполнимо, так как уравнение Даламбера всегда имеет решение.

Следует подчеркнуть, что этим уравнением произвольная функция $f(\mathbf{r},\ t)$ ещё не определяется полностью, так как к ней можно прибавить функцию $f_0(\mathbf{r},\ t)$, являющуюся решением однородного уравнения

$$\triangle f_0 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Поэтому, оставаясь в рамках калибровки Лоренца, можно, выбрать f_0 так, чтобы удовлетворить ещё одному произвольному условию на одну из четырёх величин: φ', A'_x, A'_y, A'_z. Действительно, записав это однородное уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}, \tag{4}$$

выберем производную $\partial f_0/\partial t$ так, чтобы в сумме с $\partial f/\partial t$ в выражении (2) она давала бы потенциал φ', удовлетворяющий произвольно заданному условию. При этом правая часть уравнения (4) будет заданной функцией, то есть получим неоднородное уравнение 2-го порядка в частных производных, которое всегда имеет решение.

То, что мы проделали с производной по времени, можно аналогично сделать и с производной по любой из координат. То есть любая компонента 4-потенциала A^μ допускает наложение на неё произвольного однокомпонентного условия вместе с калибровкой Лоренца.

Приведём пример дополнения условия Лоренца ещё одним условием:

$$\varphi = \mathrm{const}(t),$$

тогда из условия Лоренца следует

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} = 0.$$

Такая калибровка (при $\varphi = 0$) нам пригодится при рассмотрении плоской электромагнитной волны.

3. Устранение необъективности 4-потенциала. Введением понятия 4-потенциала, мы представляем систему 4-ток-4-потенциал как замкнутую механическую систему за счёт подходящего выбора 4-потенциала. Этот выбор позволяет сделать уравнение Максвелла. Однако уравнение Максвелла ничего не говорит о движении самого 4-тока (который определяется единым полем). Кроме того энергия точечного заряда в поле 4-потенциала оказывается не определённой (бесконечной). Произвол, допускаемый калибровкой, делает 4-потенциал необъективным понятием.

Естественно возникает вопрос – почему механику неразрывных 4-токов мы начали строить именно на основе электродинамического лагранжиана? Для этого есть три причины. Во-первых, вытекающее из этого лагранжиана уравнение движения (уравнение Максвелла) требует неразрывности 4-тока, что является свойством, характеризующим именно 4-ток. Вторая причина в аналитических удобствах этой формы лагранжиана, дающей, в частности, простое выражение для тензора плотности энергии-импульса. В-третьих, – универсальность этой формы лагранжиана. От этой формы лагранжиана легко перейти к любой другой (совместимой с неразрывностью 4-тока), так как определяемый уравнением Максвелла 4-потенциал оказывается недоопределённым, что допускает наложение

на него дополнительного произвольного однокомпонентного (**калибрующего**) условия. Выбирая это условие в следующем скалярном виде:

$$A_\mu j^\mu = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \Lambda'(j^\mu, A'^\mu), \tag{1}$$

где Λ' – произвольная скалярная функция обобщённых координат j^μ, A'^μ и их обобщённых производных,
A'^μ – 4-потенциал после наложения калибрующего условия (**калибровки**),
и подставляя (1) в (1.2.1), мы переходим к другой форме

$$\Lambda(j^\mu, A\mu) = \Lambda'(j^\mu, A'^\mu) \tag{2}$$

лагранжиана, которая произвольна в рамках неразрывности 4-тока и, вообще говоря (в силу другой формы зависимости от промежуточных аргументов), имеет другую 4-плотность действия. Тензор плотности энергии импульса легко вычисляется для любой формы лагранжиана. Уравнение же движения существует не для любых его форм.

Однако, далеко не все формы лагранжиана Λ' являются механически удовлетворительными, так как в силу точечности заряда, тензор плотности энергии-импульса имеет особенность на таком заряде, которая, как правило, не интегрируема, то есть энергия бесконечна. Это известная **проблема расходимости энергии точечного заряда**. В рамках классической электродинамики эта проблема не решается. Однако, в нашей теории существует возможность решения этой проблемы, связанная с космологическим убыванием значения точечного заряда. Вытекающий при этом из точечного заряда сплошной ток имеет плотность энергии, зависящую от вида калибровки 4-потенциала A^μ. Поэтому существует такая (причём единственная) калибровка 4-потенциала, при которой расходящуюся плотность энергии удаётся скомпенсировать тоже расходящейся, но имеющей противоположный знак, плотностью энергии 4-тока, находящегося в этом 4-потенциале. То есть такая (**корпускулярная**) калибровка 4-потенциала придаёт ему определённый вид, однозначно связывая его с истекающим сплошным 4-током, делая тем самым 4-потенциал объективным полем протистона и нормируя плотность энергии-импульса.

§4. Энергия-импульс в доквантовой электродинамике.

1. Тензор плотности энергии-импульса замкнутой электродинамической системы. Плотность функции Лагранжа этой системы имеет вид

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \tag{1}$$

где

$$\Lambda_1 = -A_\mu j^\mu, \quad \Lambda_2 = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Так как плотность 4-тока j^μ **задана** единым полем, то обобщёнными координатами и обобщёнными производными здесь являются компоненты 4-вектора A_μ и их производные по x^μ. От этих производных зависит только Λ_2 (через $F^{\mu\nu}$).

Тогда тензор $T_\alpha{}^\beta$ примет вид (см. (I.9.4.2.6))

$$T_\alpha{}^\beta = \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial(\partial A_\gamma / \partial x^\beta)} - \delta_\alpha^\beta \Lambda. \tag{2}$$

(Сравни с [Ландау 2, с. 110].)

Для вычисления производной от Λ_2 напишем вариацию

$$\delta\Lambda_2 = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right).$$

Переставляя индексы и учитывая антисимметричность $F_{\mu\nu}$, получим

$$\delta\Lambda_2 = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \delta \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}.$$

Отсюда (рассматривая приращение как частный случай вариации) видно, что

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial(\partial A_\nu / \partial x^\mu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu},$$

поэтому

$$T_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\alpha} F^{\beta\gamma} + \frac{1}{16\pi} \delta_\alpha^\beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta_\alpha^\beta A_\mu j^\mu \tag{3}$$

или для контравариантных компонент

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^\gamma}{\partial x_\alpha} F^\beta{}_\gamma + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} A_\mu j^\mu, \tag{4}$$

где в координатах

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем этот тензор, добавив к нему величину

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (A^\alpha F^\beta{}_\gamma),$$

что можно сделать, так как производимая замена $T^{\alpha\beta}$ не изменит закона сохранения (см. выше о неоднозначности определения $T^{\alpha\beta}$). Найдем, что

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (A^\alpha F^\beta{}_\gamma) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\gamma} F^\beta{}_\gamma + A^\alpha \frac{\partial F^\beta{}_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) =$$

(Используем уравнение Максвелла (2.2.3) $\partial F^{\beta}_{\ \gamma}/\partial x_{\gamma} = -4\pi j^{\beta}$)

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\gamma}}F^{\beta}_{\ \gamma} - A^{\alpha}j^{\beta}.$$

Так как

$$\frac{\partial A^{\gamma}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} = F^{\alpha\gamma}, \tag{5}$$

то

$$T^{\alpha\beta} = \frac{-1}{4\pi}F^{\alpha\gamma}F^{\beta}_{\ \gamma} + \frac{1}{16\pi}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}A_{\mu}j^{\mu} - A^{\alpha}j^{\beta}. \tag{6}$$

Напомним, что тензор плотности энергии-импульса требует симметрирования. Тензор $T^{\alpha\beta}$ несимметричен только из-за члена $A^{\alpha}j^{\beta}$, который соответствует энергии-импульсу сплошного 4-тока j^{β} в поле 4-потенциала A^{α}. Для симметрирования этого члена можно использовать симметрирующий член. Кроме этого член $A^{\alpha}j^{\beta}$ зависит от калибровки 4-потенциала A^{α}. С помощью подходящей калибровки A^{α} можно компенсировать бесконечную энергию электромагнитного поля в бесконечно малой (а следовательно и в любой) окрестности точечного заряда (протистона). Эту возможность мы рассмотрим ниже, а пока оставим этот член без симметрирования и калибровки.

Найдём компоненты $T^{\alpha 0}$ тензора плотности энергии-импульса в заданной инерциальной системе отсчёта:

Плотность энергии

$$W = T^{00} = \frac{-1}{4\pi}F^{0\gamma}F^{0}_{\ \gamma} + \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_{\mu}j^{\mu} - A^{0}j^{0} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) + A_{\mu}j^{\mu} - \varphi\varrho = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) - \mathbf{A}\mathbf{j}, \tag{7}$$

где $\varphi = A^0,\ \varrho = j^0$.

Плотность импульса

$$\mathbf{S} = T^{k0}, \tag{8}$$

где

$$S^1 = \frac{-1}{4\pi}F^{1\gamma}F^{0}_{\ \gamma} - A^1\varrho = \frac{-1}{4\pi}(-E_yH_z + E_zH_y) - A^1\varrho, \tag{9}$$

$$S^2 = \frac{-1}{4\pi}F^{2\gamma}F^{0}_{\ \gamma} - A^2\varrho = \frac{-1}{4\pi}(E_xH_z - E_zH_x) - A^2\varrho, \tag{10}$$

$$S^3 = \frac{-1}{4\pi}F^{3\gamma}F^{0}_{\ \gamma} - A^3\varrho = \frac{-1}{4\pi}(-E_xH_y + E_yH_x) - A^3\varrho. \tag{11}$$

То есть [Корн, с. 165]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] - \mathbf{A}\varrho. \tag{12}$$

Так как 4-потенциал входит в тензор энергии-импульса не только своими производными, но и непосредственно, то для механической системы 4-ток-электромагнитное поле **4-потенциал имеет самостоятельный физический смысл**. Возникающий при этом вопрос об однозначности калибровки 4-потенциала прояснится ниже.

2. Плотность потока массы замкнутой электродинамической системы. 3-вектор $\mathbf{S}$ представляет собой **плотность импульса**, или **плотность потока энергии**, а компонента W – **плотность энергии**, поэтому **скорость потока энергии** равна

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{S}}{W}. \tag{1}$$

При этом 4-скорость элемента плотности импульса в заданной инерциальной системе отсчёта записывается в виде

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u}) = u^0(1, \mathbf{v}). \tag{2}$$

4 компоненты $W, \mathbf{S}$, не образуют 4-вектора, но поделённые на компоненту u^0 4-скорости u^μ рассматриваемого элемента 4-импульса $dP^\alpha = T^{\alpha 0}\,dv$, образуют **4-вектор J^μ плотности потока массы** (9.4.3.8)

$$J^\mu = \frac{1}{u^0}\left(\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2) + A_\mu j^\mu - \varphi\varrho, \quad \frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}] - \mathbf{A}\varrho\right), \tag{3}$$

J^μ можно записать также в виде

$$J^\mu = \frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = \frac{1}{u^0}\left(\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2) - \mathbf{Aj}, \quad \frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}] - \mathbf{A}\varrho\right). \tag{4}$$

Так как (9.4.4.5)

$$J^\mu = \varrho_{m0}\, u_J^\mu = \frac{\varrho_m}{u_J^0} u_J^\mu = (\varrho_m, \ \varrho_m \mathbf{v}_J) = (J^0, \mathbf{J}), \tag{5}$$

где u_J^μ – 4-**скорость плотности потока массы**, то **скорость плотности потока массы**

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{J}/J^0 = \frac{2[\mathbf{EH}] - 8\pi\mathbf{A}\varrho}{E^2 + H^2 - 8\pi\mathbf{Aj}}. \tag{6}$$

Отсюда в отсутствие 4-тока

$$\mathbf{v}_J = \frac{2[\mathbf{EH}]}{E^2+H^2} \to \frac{\mathbf{S}_f}{W_f} = \mathbf{v}, \ j^\mu \to 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{S}_f, W_f$ – плотность импульса и энергии электромагнитного поля в отсутствие 4-тока (1.12), (1.7). То есть предельное значение скорости плотности потока масы (при $j^\mu \to 0$) равно **скорости $\mathbf{v}$ плотности потока энергии**. Из (7) следует

$$\mathbf{v}\perp\mathbf{E}, \ \mathbf{v}\perp\mathbf{H}, \quad j^\mu \to 0. \tag{8}$$

Из (4) очевидно, что при наличии у поля плотности энергии, оно не имеет плотности массы ($J^\mu \to 0$) **только при условии** $u^0 \to \infty$, то есть если скорость потока плотности энергии равна релятивистскому пределу ($v \to 1$). То есть в этом случае необходимо

$$|\mathbf{v}| \to |\mathbf{v}_J| = \frac{2|[\mathbf{EH}]|}{E^2+H^2} = 1, \quad j^\mu \to 0,$$

то есть

$$E^2 - 2|\sin\alpha|EH + H^2 = 0, \quad j^\mu \to 0, \tag{9}$$

где $\sin\alpha$ – синус угла между векторами $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. Разделим это уравнение на H^2 и обозначая $E/H = x$, получим

$$x^2 - 2|\sin\alpha|x + 1 = 0,$$

откуда

$$x = |\sin\alpha| \pm \sqrt{\sin^2\alpha - 1}.$$

Единственным вещественным решением является

$$x = E/H = 1, \quad |\sin\alpha| = 1,$$

тогда из (9)

$$E = H, \ \mathbf{E}\perp\mathbf{H}, \quad j^\mu \to 0. \tag{10}$$

Итак **плотность потока массы свободного электромагнитного поля (без 4-тока) равна 0**, то есть с учётом (5), **равна нулю плотность покоя потока массы**

$$\varrho_{m0} = 0, \quad J^\mu = 0, \quad \text{при } j^\mu = 0, \ \mathbf{v} \to 1, \tag{11}$$

что допускает **плотность потока массы у электромагнитного поля в присутствие 4-тока, то есть на точечных зарядах**.

Формула (11), однако, не означает, что $\varrho_m = 0$, то есть даже для свободного электромагнитного поля, вообще говоря, плотность массы отлична от нуля. Её интегрирование по **неплоской электромагнитной волне** даёт **массу относительно центра инерции волны**, который имеет скорость меньше релятивистского предела, то есть существует система координат, где он покоится и где **масса поля** m больше нуля

$$\varrho_m \geqslant 0, \quad m \geqslant 0. \tag{12}$$

3. Проблемы сопутствующего точечному заряду поля. Как известно (и что мы покажем ниже), электромагнитное поле движущегося точечного заряда является суммой двух существенно разных частей: **сопутствующего поля** и **поля радиации**. Сопутствующее поле не зависит от ускорения, то есть в **мгновенно**

сопутствующей i-му протистону системе (где он неподвижен в данный момент времени, хотя может быть ускорен), это поле имеет вид

$$\mathbf{E}_i = q_i \frac{\mathbf{r}_i}{R_i^3}, \quad \mathbf{H}_i = \frac{1}{R_i^4}[\mathbf{R}_i \mathbf{E}_i] = \frac{q_i}{R_i^4}[\mathbf{R}_i \mathbf{R}_i] = 0, \tag{1}$$

откуда видно, что сопутствующее поле $\mathbf{E}_i$ движется как абсолютно твёрдое тело, то есть изменение скорости протистона мгновенно передаётся в любую точку сопутствующего ему поля. И если плотность энергии этого поля отлична от нуля, то оно может передавать свою энергию мгновенно, что противоречит **принципу причинности**.

Кроме того с сопутствующим полем связана **проблема расходимости** его энергии в особых точках (**центрах протистонов**). Дело в том, что если плотность энергии поля $\mathbf{E}_i$ пропорциональна квадрату его значений, то интеграл от E_i^2 по любой области, содержащей точечный заряд, расходится, то есть энергия поля в этой области бесконечна. Расходимость энергии лишает её основного свойства – закона сохранения, чем только и полезно понятие энергии.

Эти проблемы требуют радикального решения в отношении сопутствующих полей протистонов. И такое решение существует в форме **корпускулярной калибровки 4-потенциала**.

4. Корпускулярная калибровка 4-потенциала. Разложим тензор единого электромагнитного поля (то есть электромагнитного поля всех протистонов) на две компоненты

$$F_{\mu\nu} = \acute{F}_{\mu\nu} + \breve{F}_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $\acute{F}_{\mu\nu}$ – компонента электромагнитного поля, зависящая от ускорения, но не от скорости точечных зарядов (**общее радиационное поле**),

$\breve{F}_{\mu\nu}$ – остальная компонента электромагнитного поля, зависящая от скорости точечных зарядов (**общее сопутствующее поле**).

Плотность 4-тока единого поля тоже разложим на две компоненты

$$j^\mu = \dot{j}^\mu + \breve{j}^\mu, \tag{2}$$

где $\dot{j}^\mu$ – плотность дискретного 4-тока точечных зарядов всех протистонов ($\dot{j}^\mu = 0$, при $x^\nu \neq x_i^\nu$),

x_i^ν – 4-радиус-вектор i-того протистона,

$\breve{j}^\mu$ – плотность сплошных (истекающих) 4-токов всех протистонов.

Тогда плотность энергии (1.7) замкнутой системы протистоны-электромагнитное поле можно представить в виде

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) - \mathbf{A}\mathbf{j} = \frac{1}{8\pi}(\acute{E}^2 + \breve{E}^2 + 2\acute{\mathbf{E}}\breve{\mathbf{E}} + \acute{H}^2 + \breve{H}^2 + 2\acute{\mathbf{H}}\breve{\mathbf{H}}) - \mathbf{A}\dot{\mathbf{j}} - \mathbf{A}\breve{\mathbf{j}}. \tag{3}$$

Попытаемся с помощью специальной (**корпускулярной калибровки**) 4-потенциала A^μ компенсировать расходящуюся на точечном заряде энергию

электромагнитного поля $\breve{\mathbf{E}}, \breve{\mathbf{H}}$ отрицательной энергией 4-тока $\breve{\mathbf{j}}$ в потенциале $\mathbf{A}$. Поскольку условие калибровки к 4-потенциалу A_μ ещё не применялось, то мы его можем использовать в виде однокомпонентного 3-скалярного условия

$$\begin{cases} \frac{1}{8\pi}(\breve{E}^2 + 2\acute{\mathbf{E}}\breve{\mathbf{E}} + \breve{H}^2 + 2\acute{\mathbf{H}}\breve{\mathbf{H}}) = \mathbf{A}\breve{\mathbf{j}}, \quad x^\nu \neq x_i^\nu, \\ \dot{j}_\mu A^\mu = \dot{\varrho}\varphi - \dot{\mathbf{j}}\mathbf{A} = 0, \quad x^\nu = x_i^\nu \end{cases}, \quad K. \tag{4}$$

Напомним, что значения полей $F_{\mu\nu}, \acute{F}_{\mu\nu}, \breve{F}_{\mu\nu}$ от вида калибровки не зависят. Энергетический же смысл полей **E** и **H** зависит от вида калибровки только в непосредственной близости от точечных зарядов, где нельзя пренебречь истекающими сплошными 4-токами. Но эти зоны (**зоны истечения**) очень малы по сравнению с расстояниями между протистонами, так как сплошные токи космологически малы по сравнению с точечными зарядами (I.8.3.5.5) и поэтому **зоны истечения не пересекаются**.

Тогда **область действия корпускулярной калибровки** можно ограничить совокупностью микроскопических зон истечения, рассматривая корпускулярную калибровку (4) отдельно в каждой зоне истечения каждого точечного заряда. Буква K обозначает это условие. Вне этой области можно пользоваться любой калибровкой.

В корпускулярной калибровке плотность энергии (3) примет вид

$$W = T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\acute{E}^2 + \acute{H}^2) - \mathbf{A}\dot{\mathbf{j}}. \tag{5}$$

При этом уравнение движения (Максвелла) сохраняется, так как калибровка не изменяет электромагнитное поле, но механическй смысл этого поля (тензор плотности энергии-импульса) изменяется в зоне истечения.

Итак **плотность энергии W в корпускулярной калибровке не содержит особенностей, расходящихся при интегрировании**. Иными словами **корпускулярная калибровка устраняет расходимость энергии сопутствующего протистону поля**. При этом, если 4-вектор плотности 4-импульса непространственноподобен, то устраняется расходимость и соответствующего импульса, так как его модуль не превышает энергию. Ниже мы покажем, что 4-импульс действительно непространственноподобен.

Заметим, что излучением сплошных 4-токов можно пренебречь, так как оно космологически мало по сравнению с излучением точечных зарядов.

После такой калибровки тензор плотности энергии-импульса не содержит членов, соответствующих сопутствующему полю. Таким образом мы устранили расходимость этих членов путём подходящей **корпускулярной калибровки 4-потенциала**. При этом не верно думать, что мы изменили значения этих электромагнитных полей. Изменился лишь их 4-импульс во взаимодействии с **сопутствующим 4-током** (но не с другими 4-токами). Он стал равен нулю. Силовой смысл полей **E** и **H** определяется понятием силы Лоренца (см. ниже).

Корпускулярная калибровка придаёт 4-потенциалу смысл определённой функции 4-тока. То есть **4-потенциал в корпускулярной калибровке является**

объективным полем протистона. Поэтому имеет смысл **обратная задача отыскания движения протистона по заданному 4-потенциалу**, при этом вид калибровки существен только в зоне истечения. В остальном пространстве обычно удобно использование понятия силы Лоренца, но оно корректно только при постоянстве массы точечного заряда, что для протистона возможно лишь условно. Для протистона корректно использование силового смысла самого 4-потенциала.

5. Совместное применение корпускулярной и других калибровок. Вдали от протистонов можно использовать и другие калибровки 4-потенциала (так как при удалении от протистона плотность энергии сопутствующего поля в любом случае стремится к нулю). В малой окрестности протистона нужно использовать **корпускулярную калибровку**, если вычисляются механические характеристики электромагнитного поля. Если же нужны лишь значения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, независимо от их механического смысла, то можно использовать любую калибровку 4-потенциала.

Так как корпускулярная калибровка влияет лишь на механический смысл полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, но не влияет на их значения, то эти поля вовсе не обязательно искать в корпускулярной калибровке. Поля движущихся точечных зарядов (в том числе их поля излучения) гораздо удобнее искать через потенциалы в калибровке Лоренца, что мы и будем делать. Силовой же смысл полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ зависит от вида калибровки только в непосредственной близости от точечных зарядов, где нельзя пренебречь истекающими сплошными 4-токами.

6. Общий 4-импульс протистонов и поля. 4-импульс протистонов. Применение корпускулярной калибровки не изменяет вывод выражения для тензора плотности энергии-импульса. Изменяется лишь смысл величин в этом тензоре. То есть электромагнитное поле входит только своей радиационной частью; 4-потенциал входит в корпускулярной калибровке; 4-ток не содержит сплошной компоненты. Таким образом, применяя корпускулярную калибровку, выражение (2.4) для плотности 4-импульса можно переписать в виде

$$T^{\mu 0} = J^{\mu} u^0 = \left(\frac{1}{8\pi}(\acute{E}^2 + \acute{H}^2) - \varphi\dot{\varrho}, \;\; \frac{1}{4\pi}[\acute{\mathbf{E}}\acute{\mathbf{H}}] - \mathbf{A}\dot{\varrho} \right), \quad \dot{\varrho} \to \varrho, \tag{1}$$

где использовано условие $\dot{\varrho}\varphi = \dot{\mathbf{j}}\mathbf{A}$ корпускулярной калибровки (4.4), а величины нужно понимать в следующем смысле:

$\acute{\mathbf{E}}$, $\acute{\mathbf{H}}$ – поля, излучённые точечными зарядами протистонов, не содержащие сопутствующих полей протистонов,

$$A^{\mu} = (\varphi, \mathbf{A})$$

– 4-потенциал в корпускулярной калибровке,

$\dot{\varrho}$ – плотность точечных зарядов протистонов, которую можно выразить суммой δ-функций в виде

$$\dot{\varrho} = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \to \varrho, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_i$ – координаты i-того протистона в данный момент времени,
точки над ϱ можно и не писать, так как излучение сплошных 4-токов пренебрежимо в силу космологической малости сплошных 4-токов по сравнению с точечными зарядами, то есть $\dot{\varrho} \to \varrho$.

Интегрируя (1) по всему объёму системы, получим следующий 4-импульс замкнутой системы:

$$P^\mu_\Lambda = \mathrm{const} = (\mathcal{E}_\mathrm{e} - \sum_i q_i \varphi(\mathbf{x}_i),\ \mathbf{P}_e - \sum_i q_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)) =$$

$$= P^\mu_e - \sum_i q_i A^\mu(x^\nu_i) = P^\mu_e + P^\mu, \tag{3}$$

где P^μ_e – **4-импульс поля** (плотность которого, благодаря корпускулярной калибровке, интегрируема на особенностях),

4-импульс

$$P^\mu = \sum_i P^\mu_i \tag{4}$$

назовём **4-импульсом всех протистонов**,

где 4-импульс

$$P^\mu_i = -q_i A^\mu(x^\nu_i) \tag{5}$$

назовём **4-импульсом i-го протистона**.

Как и должно быть, сохраняется постоянное значение P^μ_Λ при обмене радиацией между полем и протистонами. Действительно, если протистоны теряют 4-импульс ΔP^μ:

$$P^\mu \to P^\mu - \Delta P^\mu,$$

то этот же 4-импульс получает поле:

$$P^\mu_e \to P^\mu_e + \Delta P^\mu,$$

общий же 4-импульс остаётся неизменным:

$$P^\mu_\Lambda \to P^\mu_e + \Delta P^\mu + P^\mu - \Delta P^\mu = P^\mu_e + P^\mu.$$

Так как 4-потенциал $A^\mu(x^\nu_i)$ центра протистона остаётся пока неопределённым, то и **4-импульс i-го протистона P^μ_i остаётся пока неопределённым**. Он должен определяться с учётом механических законов сохранения в процессе излучения или поглощения (радиации) самого протистона и взаимодействия его с полем всех других протистонов.

Обычно заряды протистонов по модулю одинаковы ($|q_i| = |q|$) и $|q|$ можно выносить за знак суммы.

7. Симметрирование электродинамического тензора плотности энергии-импульса. Плотность $\dot{\varrho}$ заряда системы i-тых точечных зарядов q_i можно представить в виде (2.4.1)

$$\dot{\varrho} = \sum_i \dot{\varrho}_i = \sum_i q_i w_i = \sum_i q_i \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \tag{1}$$

где

$$w_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = u_i^0 w_{0i} \tag{2}$$

– концентрация i-того точечного заряда,

w_{0i} – концентрация покоя i-того точечного заряда.

Единственный несимметричный член $\dot{j}^\alpha A^\beta$ тензора плотности энергии-импульса замкнутой системы протистоны-электромагнитное поле симметрируется в корпускулярной калибровке. Действительно, в этой калибровке существенна только дискретная компонента 4-тока, то есть только точечные заряды, поэтому

$$\dot{j}^\alpha A^\beta = \dot{\varrho}_0 u^\alpha A^\beta = \frac{\dot{\varrho}}{u^0} u^\alpha A^\beta = \frac{u^\alpha A^\beta}{u^0} \sum_i q_i \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \tag{3}$$

Так как δ-функция обнуляет значения полей вне точек $\mathbf{x}_i$, то выражение можно переписать в виде

$$\dot{j}^\alpha A^\beta = \sum_i \frac{u^\alpha(x_i^\mu) \, A^\beta(x_i^\mu)}{u^0(x_i^\mu)} q_i \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tag{4}$$

(Здесь аргументы x_i^μ писать не обязательно, так как они задаются δ-функцией). Заметим, что (6.5)

$$-q_i A^\beta(x_i^\mu) = P_i^\beta, \tag{5}$$

где 4-импульс i-того протистона P_i^β можно выразить через его 4-скорость u_i^β в виде

$$P_i^\beta = m_i u_i^\beta, \tag{6}$$

где скаляр m_i является **энергией покоя (массой) протистона**. Тогда

$$\dot{j}^\alpha A^\beta = -\sum_i u_i^\alpha P_i^\beta \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{u_i^0} = -\sum_i m_i u_i^\alpha u_i^\beta \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{u_i^0}. \tag{7}$$

Функция $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ указывает на точечный характер распределения этого тензора. Выражение справа обязано быть тензором. Это выполняется, так как величина

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)/u_i^0 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\sqrt{1 - v_i^2} = w_{0i} \tag{8}$$

есть скаляр (**концентрация покоя i-того точечного заряда**).

Итак

$$\dot{j}^\alpha A^\beta = -\sum_i m_i \, u_i^\alpha u_i^\beta \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\sqrt{1 - v_i^2} = -\sum_i m_i w_{0i} \, u_i^\alpha u_i^\beta. \tag{9}$$

Таким образом член $\dot{j}^\alpha A^\beta$ **тензора плотности энергии-импульса оказывается симметричным в корпускулярной калибровке. При этом симметричным становится и весь тензор** $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ (4.1.6). (10)

8. Сопротивление (трение) радиации. Радиационное взаимодействие точечного заряда с полем локально (точечное). Чтобы в точечном взаимодействии можно было изменить 4-импульс на конечную величину, необходимо, чтобы через эту точку проходил сходящийся или расходящийся поток энергии в течении конечного времени. Этот сходящийся или расходящийся поток энергии является ничем иным как потоком энергии **поглощаемого** или **излучаемого** точечным зарядом электромагнитного поля. Эти **радиационные** процессы мы рассмотрим ниже. С сопутствующим же полем обмена энергией нет, так как энергия сопутствующего поля нейтрализована (**обнулена**) энергией сплошного тока, вытекающего из протистона. Можно говорить о **работе точечного заряда** по преодолению **радиационного трения** при вытекании.

Радиационное трение обеспечивает **вечность точечного заряда и его массы** ценой их космологически медленной потери при истекании сплошного тока, так как для завершения этого (**релаксационного, диссипативного**) процесса, идущего в степенной зависимости от времени, требуется бесконечное время.

9. Плотность потока массы электромагнитного поля в корпускулярной калибровке. При корпускулярной калибровке 4-ток существен только на мировых линиях протистонов, а вне их энергии не имеет, поэтому и **плотность потока массы существует только на мировых линиях протистонов**. **Плотность потока массы электромагнитного поля равна нулю** (4.2.11)

$$J^\mu_f = 0, \tag{1}$$

однако плотность потока энергии отлична от нуля, поэтому **поток электромагнитного излучения в конечном объёме может иметь массу**, так как его центр инерции может двигаться со скоростью меньшей релятивистского предела.

Полагая из (1) плотность массы поля вне точечных зарядов равной нулю, согласно (2.4), плотность потока массы на мировых линиях протистонов можно записать в виде

$$J^\mu = \frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = \frac{1}{u^0}(-\mathbf{A}\dot{\mathbf{j}}, \quad -\mathbf{A}\dot{\varrho}), \tag{2}$$

а **скорость плотности потока массы** – в виде

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{v} = \mathbf{J}/J^0 = \frac{\mathbf{A}\dot{\varrho}}{\mathbf{A}\dot{\mathbf{j}}}, \tag{3}$$

что по смыслу является **скоростью точечного заряда v** и придаёт смысл отношению обобщённых функций справа.

Согласно (2), $-\mathbf{A}\dot{\mathbf{j}}$ представляет плотность покоя $\dot{\varrho}_{m0}$ массы (в данном случае точечной)

$$\dot{\varrho}_{m0} = \frac{\dot{\varrho}_m}{u^0} = -\mathbf{A}\dot{\mathbf{j}}. \tag{4}$$

10. 4-потенциал в корпускулярной калибровке. Из условия корпускулярной калибровки (4.4.4) следует

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{j}} = \varphi\dot{\varrho}, \qquad K, \tag{1}$$

тогда из (9.3) находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \varphi\mathbf{v}. \tag{2}$$

Отсюда 4-потенциал в координатах можно записать в виде

$$A^\alpha = (\varphi, \mathbf{A}) = (\varphi, \varphi\mathbf{v}). \tag{3}$$

Подставляя (1) в (9.2), имеем в координатах

$$J^\mu = \frac{T^{\alpha 0}}{u^0} = \frac{1}{u^0}(-\varphi\dot{\varrho}, -\mathbf{A}\dot{\varrho}) = \frac{-\dot{\varrho}}{u^0}(\varphi, \mathbf{A}) = -\dot{\varrho}_0(\varphi, \mathbf{A}) = -\dot{\varrho}_0 A^\alpha, \tag{4}$$

откуда, учитывая (4.6.2), имеем для i-го точечного заряда q_i:

$$T^{\alpha 0} = -\dot{\varrho}\,(\varphi, \mathbf{A}) = -q_i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)(\varphi, \mathbf{A}) = -q_i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\,A^\alpha. \tag{5}$$

Интегрируя это выражение по 3-пространству, получим 4-импульс $i-$го точечного заряда

$$P_i^\alpha = -q_i A^\alpha(\mathbf{x}_i). \tag{6}$$

Таким образом **4-потенциал на самом точечном заряде с точностью до множителя q_i имеет смысл его 4-импульса**, что уже было найдено в (4.6.5). Эту свяь (6) между 4-потенциалами и 4-импульсами точечных зарядов будем называть **потенциальными условиями для точечных зарядов**.

Конечное значение 4-импульса (6) точечного заряда и пропорционального ему 4-потенциала на точечном заряде возможно только благодаря корпускулярной калибровке, которая обнуляет 4-импульс сопутствующего поля этого заряда. Если бы не было 4-потенциалов от других точечных зарядов, то 4-импульс (6) равнялся бы нулю (вместе с 4-импульсом всей механической системы (4.6.3)) и равнялся бы нулю 4-потенциал (6). Это означает, что 4-потенциал (6)

$$A^\alpha(\mathbf{x}_i) = -P_i^\alpha/q_i \tag{7}$$

в результате корпускулярной калибровки **не содержит собственного потенциала этого точечного заряда** в точке $\mathbf{x}_i$, где он имеет особенность. Ниже мы покажем, что эта особенность имеет вид

$$A_i^\alpha \sim 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|. \tag{8}$$

В других же точках собственный потенциал остаётся. Тогда во всём пространстве **корпускулярная калибровка обнуляет (выкалывает) собственные 4-потенциалы A_i^α в каждой точке $\mathbf{x}_i$, сохраняя 4-потенциалы всех других точечных зарядов**. Иначе говоря, **4-потенциал в корпускулярной калибровке является суперпозицией выколотых 4-потенциалов всех точечных зарядов, дополненной 4-потенциалами $A^\alpha(\mathbf{x}_i) = -P_i^\alpha/q_i$ в выколотых точках**

$$A^\alpha(\mathbf{x}) = \sum_i [A_i^\alpha(\mathbf{x}) - A_i^\alpha(\mathbf{x}_i)] + A^\alpha(\mathbf{x}_i) = \sum_i [A_i^\alpha(\mathbf{x}) - A_i^\alpha(\mathbf{x}_i)] - P_i^\alpha/q_i. \tag{9}$$

То есть каждый i-й **точечный заряд чувствует 4-потенциал всех других точечных зарядов, кроме собственного**. (10)

11. Естественность корпускулярной калибровки. Электродинамика допускает различные калибровки потенциала, но только корпускулярная калибровка позволяет электромагнитное поле 4-тока единого поля рассматривать как механическую систему. В этом главную роль играет истечение непрерывного тока из точечного заряда, отрицательная плотность энергии которого в потенциале этого заряда **обнуляет** положительную плотность 4-импульса сопутствующего электромагнитного поля этого заряда. Взаимодействие же сопутствующего электромагнитного поля, а следовательно и самого точечного заряда с другими точечными зарядами, сохраняется. При этом другим точечным зарядам передаётся 4-импульс не сопутствующего поля, а самого точечного заряда, посредством переноса 4-импулься полем радиации, которое можно рассматривать как возмущение сопутствующего поля ускорением точечного заряда.

12. След тензора плотности энергии-импульса протистонов в поле. Этот тензор (4.1.6) в корпускулярной калибровке (с использованием симметрирования (7.9)) принимает вид

$$T^{\alpha\beta} = \frac{-1}{4\pi} \acute{F}^{\alpha\gamma} \acute{F}^{\beta}_{\ \gamma} + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} \acute{F}_{\mu\nu} \acute{F}^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} A_\mu \dot{j}^\mu + \sum_i m_i u_i^\alpha u_i^\beta \ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sqrt{1 - v_i^2}, \tag{1}$$

где $\acute{\mathbf{E}}$, $\acute{\mathbf{H}}$ – поля, излучённые точечными зарядами протистонов, не содержащие сопутствующих полей протистонов,

$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ – 4-потенциал в корпускулярной калибровке,

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\sqrt{1 - v_i^2} = w_{0i}$ – 4-скаляр (7.8),

$\mathbf{x}_i$ – координаты i-того протистона в данный момент времени.

След этого тензора (сравните с [Ландау 2, (34,2)])

$$T^\alpha_{\ \alpha} = 4\alpha_\alpha \, A_\mu \dot{j}^\mu + \sum_i m_i \ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sqrt{1 - v_i^2} \to \sum_i m_i \ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sqrt{1 - v_i^2}, \tag{2}$$

где член $4A_\mu \dot{j}^\mu$ соответствует взаимодействию точечного заряда с полями всех других зарядов, кроме самого. Этот член знакопеременный и при осреднении по

времени стремится к 0, так как в точке $\mathbf{x}_i$ потенциал A_μ создаётся всеми токами, кроме $\dot{j}^\mu$ (10.10), то есть A_μ и $\dot{j}^\mu$ независимы. Таким образом след тензора энергии-импульса отличается от нуля только на мировых линиях протистонов, то есть **электромагнитное поле вне его особенностей имеет нулевой след тензора плотности энергии-импульса**. (6)

Однако мы пренебрегли шумоподобным членом $4A_\mu \dot{j}^\mu$, который может быть ответствен за **флуктуации вакуума**.

§5. Приведение электродинамического лагранжиана к классическому виду.

1. Прото-лагранжиан. Непостоянство массы.

Из корпускулярной калибровки следует равенство (4.7.9), сворачивая которое, получаем выражение

$$\dot{j}^\alpha A_\alpha = \sum_i m_i w_{0i} = \sum_i m_i(s_i)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\sqrt{1-v_i^2}, \tag{1}$$

которое можно рассматривать как результат замены 4-х обобщённых координат A^α **на мировых линиях протистонов** другими 4-мя обобщёнными координатами $\mathbf{x}_i, m_i(s_i)$, не изменяющими (согласно (9.2.4.*)) 4-плотности действия. При этом в остальном 4-пространстве обобщённые координаты не изменяются. Напомним, что 4-плотность действия является той же скалярной величиной, что и 4-плотность функции Лагранжа (лагранжиан), но 4-плотность действия рассматривается как функция метрических координат x^μ, а лагранжиан – как функция промежуточных аргументов той же функции, называемых обобщёнными координатами и обобщёнными производными. Значение m_i связанно со значением потенциала $\varphi(\mathbf{x}_i)$ (4.10.6) на i-том точечном заряде и может быть найдено с помощью механических законов сохранения.

Применяя такую **локальную замену обобщённых координат** в электродинамическом лагранжиане (1.2.1)

$$\Lambda = \Lambda_1' + \Lambda_2 \tag{2}$$

где

$$\Lambda_1' = -j^\alpha A_\alpha, \tag{3}$$

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4}$$

первый член можно представить суммой двух членов, зависящих каждый от своих обобщённых координат, в виде

$$\Lambda_1' = \Lambda_0 + \Lambda_1, \tag{5}$$

где **в корпускулярной калибровке**

$$\Lambda_0(\mathbf{x}_i^\nu, m_i) =$$
$$= -\sum_i \dot{j}^\alpha(\mathbf{x}_i)\, A_\alpha = -\sum_i m_i(s_i)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\sqrt{1-v_i^2} \quad (\textbf{собственный член}), \tag{6}$$

$$\Lambda_1(A_\alpha) = -\sum_j \dot{j}^\alpha(\mathbf{x}_j)\, A_\alpha \quad (\textbf{сторонний член}), \tag{7}$$

где $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ – точки мировых линий i-тых и j-тых протистонов, множества которых не пересекаются и поэтому обеспечивается **независимость** лагранжианов Λ_0, Λ_1.

Член Λ_0 отличен от 0 на мировых линиях i-тых точечных зарядов и в нём произведена замена обобщённых координат. Член Λ_1 отличен от 0 на мировых линиях j-тых точечных зарядов, где обобщёнными координатами являются значения поля A_α Соответствующие уравнения движения, определяют массы и мировые линии протистонов. Члену Λ_2 соответствуют электромагнитные поля во всём пространстве.

В члене Λ_1 обобщённые координаты A_α представляют 4-потенциал. Соответствующие уравнения движения, определяют 4-потенциал A_α во всём пространстве (кроме точек $\mathbf{x}_j$), при заданных 4-токах $\dot{j}^\alpha(\mathbf{x}_j)$.

Для всего **электродинамического лагранжиана** имеем выражение

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 =$$
$$= -\sum_i m_i(s_i)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\sqrt{1-v_i^2} - j^\alpha(\mathbf{x}_j)\, A_\alpha - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_i. \tag{8}$$

Хотя лагранжиан записан с помощью разных обобщённых координат в разных областях, эти области дополняют друг друга до всего 4-пространства, так что плотность функции Лагранжа едина.

Какие обобщённые координаты считать заданными, а какие нет – определяется постановкой задачи.

Теперь электродинамический лагранжиан принимает **классический вид** и при этом не приводит к расходимостям 4-импульса, благодаря корпускулярной калибровке. Такой лагранжиан назовём **прото-лагранжианом**.

Являясь обобщённой координатой, **масса протистона, вообще говоря, – величина не постоянная**. В классическом же лагранжиане масса считается постоянной.

Разбиение множества протистонов на два подмножества с лагранжианами Λ_0, Λ_1 определяется постановкой конкретной задачи. В общем виде заданное единое поле задаёт 4-ток, который определяет 4-потенциал. Наличие же 4-потенциала радиации имеет обратное реактивное влияние на 4-ток. Такая обратная связь **самодействие** вызывает самодвижение точечных зарядов. Сопутствующее же поле точечного заряда на него самого влияния не имеет, так как его 4-импульс полностью компенсирован 4-импульсом истекающего сплошного тока.

Точное микроскопическое движение протистонов задаётся единым полем, удовлетворяющим законам механики в силу инвариантности его уравнения движения. Но 4-ток отображает единое поле с потерей фазовой информации, поэтому применение механических законов к 4-току требует введения понятия 4-потенциала, к которому предъявляется требование удовлетворять механическим законам сохранения системы. Однако, потеря информации остаётся, поэтому связь между потоками протистонов и 4-потенциалом A_α статистическая. Она описывается статистическим понятием силы Лоренца, связанной с **радиацией** точечными зарядами электромагнитного поля, имеющего свои сохраняющиеся механические величины и тем самым влияющее на движение точечных зарядов посредством механических законов сохранения. Понятие силы Лоренца мы рассмотрим в соответствующей главе. Ниже мы покажем, что стохастичность движения протистона заключается в структуре его мировой линии, разбитой на одинаковые Г-образные **шаги**, гладко стыкованные на концах при неоднозначной взаимной ориентации. Таким образом на точное микроскопическое движение протистонов 4-потенциал непосредственно не влияет, но влияет статистически посредством силы Лоренца.

2. Материальные точки и квазиточечные заряды. Лагранжиан (1.8) универсален. В **классической электродинамике** обычно используется именно этот лагранжиан. Для использования понятия силы Лоренца необходимо постоянство массы частицы (или хотябы достаточно медленное её изменение, что, как мы увидим, не выполняется для протистона). Если по условию задачи частицу можно считать точечной и имеющей достаточно постоянную массу (например, в силу статистического осреднения параметров достаточно замкнутой механической системы), то её мы назовём **материальной точкой**, а если существен её электрический заряд, то – **квазиточечным зарядом**. Для таких зарядов масса может быть достаточно постоянной и для них понятие силы Лоренца применимо. Для протистонов же это понятие применимо лишь в статистическом смысле.

Согласно (4.6.3) **4-импульс замкнутой системы точечных зарядов (протистонов) и поля** можно записать в виде

$$P^\mu_\Lambda = P^\mu_e + P^\mu, \tag{1}$$

где P^μ_e – 4-импульс поля,

$$P^\mu = \sum_i P^\mu_i \tag{2}$$

– **4-импульс всех протистонов системы**,

$$P^\mu_i = -q_i A^\mu(x^\nu_i) \tag{3}$$

– **4-импульс i-го протистона системы**.

Для процессов с известной массой квазиточечных зарядов, при условии, что из-за сближений частиц, изменения их масс не выходили бы за допустимые пределы,

очевидно тоже можно пользоваться лагранжианом (1.8), так как взаимодействия внутри квазиточечных зарядов учтены статистически в значениях их массы. При этом для **4-импульса замкнутой системы квазиточечных зарядов и поля** получим формулы вида (1),(2),(3).

Масса квазиточечной частицы по определению должна быть постоянной, что для протистона может быть достигнуто осреднением её по достаточно большим интервалам собственного времени. Если среда для такой частицы статистически достаточно однородна, то δ-функцию в выражении (4.12.2) можно понимать в смысле некоторого достаточно компактного осредняющего ядра, а мировые линии считать достаточно гладкими. Тогда из (4.12.2) **след тензора плотности энергии-импульса системы квазиточечных частиц** имеет вид (сравните с [Ландау 2, (34,1)])

$$\bar{T}^{\alpha}_{\alpha} = \sum_i m_i\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\sqrt{1 - \dot{v}_i^2}, \tag{4}$$

где по-прежнему вне носителей δ-функций **электромагнитное поле имеет нулевой след тензора плотности энергии-импульса**. (5)

3. Однозначность (объективность) механики протистонов. Любая метризованная система дифференцируемых величин может быть представлена как замкнутая механическая система путём введения подходящих дополнительных обобщённых координат. Однако, далеко не всегда это можно сделать однозначно. Неоднозначность лишает механическую систему объективности.

Прото-лагранжиан является единственным лагранжианом, который механически замыкает систему протистонов, так как он однозначно получается из лагранжиана универсального вида наложением необходимого условия конечности 4-импульсов протистонов (корпускулярная калибровка).

При этом 4-току j^{μ} сопоставляется 4-потенциал A^{μ}, причём с помощью корпускулярной калибровки это сопоставление делается однозначно (по крайней мере в ближней зоне протистона). То есть можно говорить об однозначном представлении 4-потенциала 4-током (с помощью уравнения Даламбера) и об однозначном представлении 4-тока 4-потенциалом (особенностями поля 4-потенциала).

Существование механического представления системы протистонов следует из инвариантности уравнения единого поля в преобразованиях Лоренца и трансляциях. Как мы выше показали - это представление единственно.

Само существование единственного механически замкнутого представления системы точечных зарядов накладывает на их мировые линии некоторые структурные условия, которые мы назовём **квантовыми условиями**. Ниже мы их рассмотрим.

4. Автономность протистона. Протистоны в нашей теории могут взаимодействовать только с электромагнитным полем и только путём **радиации** (излучения и поглощения).

Точечные заряды образуют **субстанцию**, обменивающуюся с полем энергией. Так как **наблюдатель** состоит из субстанции, то для него наблюдаемой является лишь субстанция. Электромагнитное поле для него наблюдаемо лишь поскольку оно отображается в субстанции.

5. Самодвижение протистона. Поскольку масса и 4-импульс протистона не определены, то остаётся единственная возможность их определения согласно механическим законам сохранения системы 4-ток-электромагнитное поле в процессе радиации электромагнитного поля протистоном. Этим мы вообще допускаем изменение 4-импульса протистона (в том числе **самоускорение**) только от реакции собственного излучения (или поглощения), делая тем самым движение протистона самодостаточным (**реактивное самодвижение** за счёт энергии покоя). Ниже, изучая реакцию излучения протистона, мы увидим, что его самодвижение испытывает самоускорение, при котором происходит излучение части его энергии покоя (массы) в форме поля излучения. Или же наоборот, происходит поглощение энергии в форме поля поглощения. Оба эти процесса симметричны во времени и почти одинаково возможны. Поле поглощения всегда содержится в том неисчерпаемом резервуаре, который представляет собой вакуумный шум, так как законы излучения и поглощения обратимы во времени.

Подробное изучение самодвижения протистона показывает, что оно, будучи детерминировано единым полем, не вполне детерминировано в рамках электродинамики (являющейся абстракцией единого поля). То есть на определённых кривых отрезках мировой линии (**полушагах**) протистон движется детерминированно, но последовательно соединённые друг с другом полушаги имеют не детерминированную ориентацию друг относительно друга. В результате масса протистона не постоянна, а мировая линия имеет сложную **шаговую** структуру. Протистон при этом испытывает **самодействие**, то есть обменивается с вакуумным шумом чередующимися порциями излучения и поглощения (**радиации**).

Микроскопически самодействующие протистоны можно считать несвободными от сил реакции радиации, то есть от внешнего шумоподобного поля, но силы реакции радиации нельзя рассматривать как силы Лоренца, так как в микроскопических масштабах масса протистона при радиации существенно не постоянна.

И только после осреднения (сглаживания) мировой линии по достаточно большим её отрезкам, что автоматически осредняет и 4-потенциал $A^{\mu}(x_i^{\nu})$, когда массу протистона можно считать достаточно постоянной, становится возможным использование понятия силы Лоренца. Тогда у электромагнитных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ внешнего поля появляется привычный силовой смысл. То есть происхождение силы Лоренца нельзя объяснить иначе, чем статистически. Масштабы применимости силы Лоренца будем называть **макроскопическими** с электромагнитной точки зрения. Протистон **микроскопически** свободен от силы Лоренца, но становится от неё несвободным **макроскопически**.

6. О силовом смысле электромагнитного поля. Таким образом сила Лоренца имеет статистический смысл (аналогично силе давления). При

этом возникает и силовой смысл полей $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, который, однако, остаётся макроскопическим (не учитывает микроскопического движения).

Считая электромагнитное поле $F^{\mu\nu}$ заданным и массу точечного заряда постоянной, варьированием 4-тока в действии, легко получить уравнение движения точечного заряда в этом поле. При этом ускорение заряда определяется силой Лоренца, однозначно связанной с электромагнитным полем. То есть в этом случае векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют ясный силовой смысл. Однако, в более общем случае, когда масса не является заданной, её тоже следует варьировать в действии. При этом получается уравнение движения, из которого с необходимостью следует постоянство массы и то же уравнение движения, как и в первом случае. Таким образом второй случай включает в себя и первый случай, требуя при этом постоянство массы, которого на самом деле нет. В самом же общем случае, варьировать нужно не только 4-ток и массу но и само поле, так как ускоренный заряд сам способен изменять электромагнитное поле своей радиацией. То есть в самом общем случае о силовом смысле электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ можно говорить лишь условно. В микромасштабах, например, можно ожидать больших значений вакуумного шумового поля и броуновского движения в нём точечных зарядов при значительном колебании их массы. Тогда можно было бы осреднить эту массу по достаточно большим элементам интервала, чтобы её можно было считать достаточно постоянной для применения понятия силы Лоренца. Таким образом, понятие силы Лоренца не достаточно определённое, а следовательно не достаточно определён силовой смысл электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Безусловным уравнением движения электродинамики для нашей теории является уравнение Максвелла, так как оно определяет электромагнитное поле, а заданным в нём считается 4-ток (который в нашей теории действительно задаётся единым полем).

Точное уравнение движения протистона не содержит понятия силы Лоренца и приводит к представлению о **реактивном движении** протистона под реактивным действием только радиации.

В чём же тогда смысл **точечной массы протистона**? Мы покажем, что этот смысл имеет один из геометрических инвариантов кривой мировой линии протистона, выражающийся через 4-ускорение и 4-ускорение ускорения.

Таким образом, причину микроскопического самодвижения не следует видеть в воздействии электромагнитного поля. Эта причина лежит глубже – в едином поле, определяющем 4-ток протистонов. Мы покажем, что самодвижение не детерминировано даже 4-потенциалом A^{μ}, а наоборот 4-потенциал определяется самодвижением, что соответствует происхождению 4-потенциала от 4-тока. В масштабах же, игнорирующих самодвижение, восстанавливаются привычные причинно-следственные связи между полями и движением частиц с участием силы Лоренца.

7. Обоснование принципа причинности. Сохранение энергии является важнейшим принципом причинного устройства Мира, не допускающим явлений

типа “откуда ни возьмись”, то есть обеспечивающим познаваемость Мира. Но одного лишь уравнения сохранания энергии не достаточно, так как это уравнение, вообще говоря, допускает сколь угодно большие скорости потока энергии, что влечёт её мгновенное исчезновение и появление, то есть опять “откуда ни возьмись”. Поэтому для обеспечения причинности необходимо ограничение возможной скорости движения потоков энергии. В релятивистской теории это можно обеспечить времениподобностью (или хотя бы не пространственноподобностью) 4-вектора плотности потока массы, что обеспечивает **непространственноподобность 4-импульса** любых элементов объёма механической системы.

Так как лагранжиан протистонов представи́м как лагранжиан материальных точек с 4-импульсами P_i^μ, движущихся со скоростью самих протистонов, то, в силу времениподобности 4-скорости протистонов, **4-импульс протистонов времениподобен**.

Плотность потока массы J^μ электромагнитного поля не пространственноподобна. Действительно,

$$\frac{|\mathbf{J}|}{J^0} = \frac{2|[\mathbf{EH}]|}{E^2+H^2} = \frac{2EH}{E^2+H^2}\sin(\mathbf{E}\hat{\ }\mathbf{H}). \qquad (1)$$

Из неравенства

$$0 \leqslant E^2 - 2EH + H^2 = (E-H)^2$$

следует, что

$$2EH \leqslant E^2 - H^2.$$

Учитывая также, что $\sin(\mathbf{E}\hat{\ }\mathbf{H}) \leqslant 1$, находим

$$\frac{|\mathbf{J}|}{J^0} \leqslant 1, \qquad (2)$$

что требовалось доказать.

Таким образом, в нашей теории **4-импульсы любых механических систем не пространственноподобны**, чем обеспечивается **принцип причинности**. Отсюда также следует, что в нашей теории не существует **тахионов** (частиц, движущихся быстрее света в пустоте).

Если бы 4-импульс был пространственноподобен, то скорость элемента потока энергии $\mathbf{v} = \mathbf{P}/P^0$ могла бы быть бесконечно большой, то есть влияние одних тел на другие (обмен энергией, **взаимодействие**) могло бы быть мгновенным независимо от расстояния между ними, а с учётом преобразований Лоренца, это вело бы к влиянию будущего на прошлое, то есть к нарушению **принципа причинности**, допускающего влияние лишь прошлого на будущее. Находясь на детерминистских позициях, мы допускаем зависимость будущего от прошлого и наоборот, что отображается в понятии единого поля. Но система механических понятий, абстрагированная от единого поля, базируется на принципе причинности и познавательно ценна тем, что объясняет происхождение и развитие феноменов. Эта

система понятий имеет начало уже в нашей интуиции, то есть закреплена в геноме и связана с нашим ощущением **хода времени**.

В ограниченности скорости перемещения энергии заключается и **принцип близкодействия**. **Дальнодействие** предполагало бы бесконечную скорость переноса энергии.

Однако, детерминированная теория, какой является наша теория, допускает корреляцию процессов, сколь угодно удалённых друг от друга. Например, плоская компонента единого поля колеблется в любых двух точках пространства-времени с фазами, однозначно определёнными взаимным положением этих точек. Кстати, такую же корреляцию допускает и квантовая теория поля.

8. О калибровочной инвариантности. Калибровочная инвариантность означает, что векторы **E** и **H** электромагнитного поля не изменяются, если 4-потенциал A_μ заменить на

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \tag{1}$$

где f – произвольная функция.

Означает ли это, что потенциалы A_μ и A'_μ совершенно эквивалентны? Да, означает, если иметь в виду только поля **E** и **H**. Однако важным примером физической значимости калибровки потенциала является рассмотренное выше устранение расходимости энергии поля, сопутствующего точечному заряду.

Таким образом, самостоятельное физическое значение 4-потенциала делает сомнительной фундаментальность калибровочной инвариантности.

§6. Статические поля.

1. Основное уравнение электростатики (уравнение Пуассона). Если 4-ток имеет только зарядовую компоненту ($j^\mu = (\varrho, 0)$), то из (2.2.7) имеем уравнение

$$\Box\varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_\nu A^\nu) = 4\pi\varrho \tag{1}$$

или для постоянных во времени величин

$$\triangle\varphi = -4\pi\varrho. \tag{2}$$

То есть для φ имеем **уравнение Пуассона**, являющееся **основным уравнением электростатики**.

Если наложить требование

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0, \tag{3}$$

необходимое для конечности энергии, то φ определяется уравнением Пуассона однозначно.

Из уравнения Пуассона и определения $\mathbf{E}$ следует

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho. \tag{4}$$

2. Основное уравнение магнитостатики. Если 4-ток имеет только 3-токовую компоненту, то учитывая, что

$$\nabla_\nu A^\nu \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A}, \tag{1}$$

имеем из (2.2.7) для постоянных во времени величин

$$\triangle\mathbf{A} - \bigtriangledown(\bigtriangledown\mathbf{A}) = -4\pi\mathbf{j}. \tag{2}$$

Так как

$$\bigtriangledown(\bigtriangledown\mathbf{F}) = \bigtriangledown^2\mathbf{F} + \bigtriangledown\times(\bigtriangledown\times\mathbf{F}) \tag{3}$$

[Корн, с. 173],
то получаем

$$\bigtriangledown\times(\bigtriangledown\times\mathbf{A}) = 4\pi\mathbf{j}, \tag{4}$$

что является **основным уравнением магнитостатики** [Савельев 1, §48]. Из этого уравнения и определения поля $\mathbf{H}$ следует

$$\bigtriangledown\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}. \tag{5}$$

При условии Лоренца

$$\bigtriangledown\mathbf{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

обращающемся в статическом случае в условие

$$\bigtriangledown\mathbf{A} = 0, \tag{7}$$

уравнение магнитостатики принимает вид уравнения Пуассона (используем (2) и (7))

$$\triangle\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}. \tag{8}$$

Заметим, однако, что **условие Лоренца не является обязательным**.

3. Поле плотности заряда, распределённой центрально симметрично. Заряд, равномерно распределённый по сфере, создает вне её потенциал такой же как и заряд той же величины, сосредоточенный в центре этой сферы, а внутри неё – постоянный потенциал. Действительно. Постоянство потенциала объясняется тем, что малые площадки $(ds)_1$ и $(ds)_2$ на поверхности сферы относятся друг к другу обратнопропорционально квадратам радиусов r_1, r_2.

$$\frac{(ds)_1}{(ds)_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

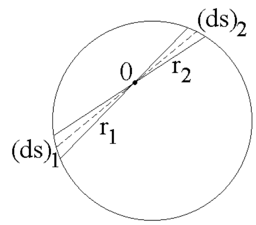


Рис. 111.1.

поэтому равнодействующие значений векторов **E** в точке 0 внутри сферы, созданных зарядами, равномерно распределёнными по сфере, уравновешиваются, то есть равны нулю. (Принимаем во внимание, что углы наклона площадок к соединяющей их линии одинаковы.) Поэтому потенциал внутри сферы постоянен.

Центральная симметрия сферы требует центральности вектора **E** и равенство его модуля во всех точках сферы. При радиусе сферы R поток этого вектора через поверхность сферы равен $4\pi R^2 E$, который в силу (2.2.4) равен $4\pi q$, где q – заряд внутри сферы (распределённый по условию центрально симметрично). Тогда

$$E = q/r^2, \tag{1}$$

то есть заряженная сфера (а следовательно и шар с центрально симметричным распределением заряда) создаёт вне себя поле такое же как и точечный заряд той же величины.

Постоянный потенциал внутри рассмотренной сферы остаётся неопределённой константой интегрирования. Примем его за 0. Тогда потенциал в точке **r** от сферического слоя радиуса R и толщиной dR, заряженного центрально симметрично с объёмной плотностью $\varrho(r)$, равен:

$$d\varphi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi R^2 \varrho(R)}{r}\, dR, & r \geqslant R \\ 0, & r < R \end{cases}, \tag{2}$$

а от всей плотности $\varrho(R)$ получим потенциал

$$\varphi(r) = \int d\varphi = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \varrho(R)\, R^2\, dR, \tag{3}$$

где R является аргументом распределения заряда. При этом, если весь заряд сосредоточен внутри сферы радиуса R_m, то согласно (3) потенциал вне этой сферы равен

$$\varphi(r \geqslant R_m) = \frac{4\pi}{r} \int_0^{R_m} \varrho(R)\, R^2\, dR. \tag{4}$$

Например, **рассмотрим равномерно заряженный шар** с объёмной плотностью заряда ϱ и радиуса R_m. Запишем распределение заряда этого шара во всём пространстве:

$$\varrho(R) = \begin{cases} \varrho, & R \leqslant R_m \\ 0, & R > R_m \end{cases}, \tag{5}$$

его потенциал внутри сферы с радиусом R_m:

$$\varphi(r < R_m) = \frac{4\pi}{r}\int_0^r \varrho R^2 = \frac{4\pi r^3\varrho}{3r} = 4\pi r^2\varrho, \tag{6}$$

а вне этой сферы:

$$\varphi(r \geqslant r_m) = \frac{4\pi}{r}\int_0^r \varrho R^2 = \frac{4\pi R_m^3\varrho}{3r}. \tag{7}$$

Заметим, что отказ от условия $d\varphi(r) = 0,\ r < R$ в формуле (2) не позволяет вывести формулу (3) и её следствия, то есть это условие существенно. Поэтому **собственный потенциал равномерно заряженной сферы внутри неё следует полагать нулевым**, хотя, вообще говоря, потенциал внутри неё может быть любым за счёт внешних полей. Пробный точечный заряд, пролетающий через равномерно заряженную сферу, взаимодействует с ней не точечно, а всем объёмом своего поля со всем объёмом поля сферы, что лишь в некоторых простых случаях можно свести к точечному взаимодействию. Находясь внутри сферы, заряд имеет экстремальную энергию взаимодействия с ней, постоянную во всём внутреннем объёме. Но это не означает, что потенциал внутри неё такой же как на поверхности, так как взаимодействие полей происходит только вне сферы, а внутри неё электромагнитное поле равно нулю.

4. О магнитной индукции.
В макроскопической электродинамике вместо напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}$ удобно использовать **магнитную индукцию** $\mathbf{B}$, учитывающую влияние среды, так как сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд со стороны (не слишком высокочастотного) электромагнитного поля в среде, определяется напряжённостью электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}$ (**каковы бы ни были свойства среды**, **в которой движется заряд**)

$$\mathbf{F} = q\{\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]\}$$

[Беллюстин, (2.67)]. Однако, для микроскопических исследований величина $\mathbf{B}$ и другие аналогично определяемые величины не годятся, так как они игнорируют эти микроскопические свойства среды, усредняя их посредством понятий типа проницаемости среды.

5. Возможность потоков энергии в статических полях. Если статические электрическое и магнитное поля накладываются друг на друга, то возможны такие области пространства, где векторное произведение $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ не равно нулю, что означает наличие плотности потока энергии (плотности импульса). Статичность поля при этом означает, что энергия нигде не накапливается и не рассасывается, то есть плотность её потока стационарна и поток замкнут. Имеет место своего рода **сверхтекучесть потока энергии**. Такой сверхтекучий поток электромагнитной энергии можно легко организовать, заряжая (электрически) обыкновенный постоянный магнит. Правда эффекты такого потока энергии слишком малы, поскольку слишком ма́ла плотность потока (умножаются две и так

очень малые (в релятивистском смысле) величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$). В атомных же масштабах эти эффекты могут быть значительны. Поэтому не надо думать, что энергия в проводе с постоянным электрическим током переносится окружающим провод макроскопическим электромагнитным полем. Энергия переносится заряженными частицами (их кинетической энергией), передаваемой от частице к частице посредством поля при их микроскопическом сближении. Частицы могут двигаться весьма медленно, а волна возмущения этого движения посредством поля может двигаться очень быстро. Таким образом поле участвует в передаче энергии микроскопически вместе с зарядами.

§7. Электромагнитное поле в отсутствие 4-тока.

1. Электромагнитные волны. (См., например, [Савельев 1, §71]) В отсутствие 4-тока (далеко от него) энергия взаимодействия электромагнитного поля с 4-током равна 0. А так как энергия электромагнитного поля не зависит от калибровки потенциалов, то можно использовать калибровку Лоренца, то есть условие

$$\nabla_\mu A^\mu = 0,$$

при этом уравнения для потенциалов (2.2.7) приобретают вид однородного уравнения Даламбера:

$$\square A^\mu = 0.$$

Или в трёхмерном виде:

$$\triangle \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\triangle \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

то есть имеем **волновые уравнения**. [Корн, (10.4-44)].

Используя (совместимую с калибровкой Лоренца) калибровку (однокомпонентную)

$$\varphi = 0,$$

получим

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}.$$

Далее, применяя к волновому уравнению, записанному для потенциалов, операции $\frac{\partial}{\partial t}$ и rot, получим **волновые уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$** того же вида, что и для $\mathbf{A}$.

Таким образом электромагнитные поля вдали от зарядов удовлетворяют волновому уравнению, при этом они называются **электромагнитными волнами**. Отметим, что эти поля обязательно должны быть переменными. Действительно в противном случае $\partial \mathbf{H}/\partial t = = \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$, и уравнения Максвелла переходят

в уравнения Пуассона с нулевой правой частью, то есть – в уравнения Лапласа, которые имеют лишь нулевые ограниченные решения.

2. Плоская электромагнитная волна. Решение волнового уравнения значительно облегчается, если поле зависит только от одной координаты, скажем, x. Волна в этом случае называется **плоской**. Вместе с тем на примере плоской волны можно выяснить характерные особенности электромагнитных волн.

Подразумевая под f любую из компонент электромагнитных волн, волновое уравнение плоской волны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

или

$$Df = 0,$$

где D – дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Представим этот оператор в виде

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Введём новые переменные

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x,$$

то есть заменим x и t по формулам

$$x = \frac{\eta - \xi}{2}, \quad t = \frac{\eta + \xi}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Следовательно, при переходе к переменным ξ и η первый множитель в выражении для D нужно заменить на $-2\partial/\partial\xi$.

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

так что второй множитель в выражении для D нужно заменить на $2\partial/\partial\eta$. Тогда

$$D = -4\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0.$$

Очевидным решением этого уравнения является функция, зависящая только от одной переменной ξ или η, то есть либо фунуция $f_1(\xi)$ либо $f_2(\eta)$. Сложив функции f_1 и f_2, получим общее решение:

$$f(\xi,\ \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Мы не стали умножать f_1 на произвольную постоянную C_1, а f_2 на C_2, поскольку f_1 и f_2 произвольные функции соответствующих переменных.

Возвращаясь к переменным $x,\ t$, придём к решению волнового уравнения:

$$f(x,\ t) = f_1(t-x) + f_2(t+x). \tag{2}$$

Первый член в этом выражении представляет собой волну, бегущую со скоростью равною 1 в направлении оси x. Действительно, значения f_1 одинаковы для всех значений t и x, связанных соотношением

$$t - x = \text{const или } x = t - \text{const},$$

откуда и следует, что любое заданное значение функции f_1 перемещается вдоль оси x со скоростью 1. ($dx/dt = 1$).

Аналогично второй член решения представляет собой волну, бегущую со скоростью 1 в направлении, противоположном оси x.

Форма волны, то есть вид функций f_1 и f_2, является совершенно произвольной.

3. Поперечность плоской электромагнитной волны. (См., например, [Ландау 2, (47,4)]) Используя рассмотренную выше калибровку

$$\varphi = 0, \quad \text{div}\ \mathbf{A} = 0,$$

для **плоской волны**, у которой все величины не зависят от y и z, имеем

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

Тогда, согласно волновому уравнению и $\partial^2 A_x/\partial t^2 = 0$, то есть $\partial A_x/\partial t = \text{const}$. Но производная $\partial\mathbf{A}/\partial t$ определяет электрическое поле (1.4.1), и мы видим, что отличная от нуля компонента A_x означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля. Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то нужно положить $A_x = 0$.

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси x, то есть к направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $t-x$. Из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}.$$

мы находим поэтому:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (t-x)} \frac{\partial (t-x)}{\partial t} = -\mathbf{A}',$$

аналогично:

$$\mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = [\nabla (t-x) \cdot \mathbf{A}'] = -[\mathrm{grad}\ x \cdot \mathbf{A}'] = -[\mathbf{n}\mathbf{A}'],$$

где штрих обозначает дифференцирование по $t-x$, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя одно равенство в другое, находим, (используя (1.4.8)):

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\mathbf{E}], \quad \mathbf{H}^2 = \mathbf{E}^2, \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad j^{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют **поперечными**. Далее видно, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

Сумма двух плоских волн, отличающихся только тем, что они бегут в противоположных направлениях, может быть тоже названа плоской волной в смысле зависимости только от одной координаты, но энергетически это совсем другая **стоячая плоская волна**. Например, в стоячей синусоидальной волне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ сдвинуты друг относительно друга по фазе на $\pi/2$, в то время как в бегущей плоской волне они синфазны. Плотность импульса в такой стоячей волне осциллирует вдоль одного направления, а плотность энергии пульсирует. Поэтому **плоские волны**, которые всегда бегущие, необходимо отличать от **стоячих плоских волн**.

4. Свободные электромагнитные волны. В удалении от 4-токов фронт распространяющейся волны в достаточно малом элементе объёма не отличается от плоской волны. Такие волны будем называть **свободными электромагнитными волнами**. Они тоже поперечные. Плотность потока энергии в такой волне можно записать в виде

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\ [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]] = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n})) \tag{1}$$

и поскольку $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, то

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}E^2\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi}H^2\mathbf{n}. \tag{2}$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S} = W\mathbf{n} \tag{3}$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света, так как **4-вектор** $(W,\ \mathbf{S})$ **светоподобен**, то есть

$$S^2 = W^2. \tag{4}$$

Поток импульса поля даётся максвелловским тензором напряжений σ_{ij}. Выбирая по-прежнему направление распространения волны в качестве оси x, найдём, что единственная отличная от нуля компонента σ_{ij} есть

$$\sigma_{xx} = W.$$

Как и следовало, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

5. Токи смещения. Согласно уравнению (2.2.4),

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

влияние изменения электрического поля на магнитное поле, аналогично влиянию некоторой плотности тока. В этом смысле величину

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

называют также **плотностью тока смещения**. Это понятие полезно тем, что **токи смещения обеспечивают замкнутость цепей любых непостоянных токов**. Например, между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки создаётся ток смещения, замыкающий цепь [Яворский, [IV.11.3]]. Поэтому в отсутствие 4-токов всё же можно говорить о токах смещения, понимая их условность.

⋆⋆⋆

Поэзия подобна добыче радия –
Грамм добыча – год труды,
Изводишь единого слова ради
Тысячи тонн словесной руды.

Маяковский В.В.

Глава 12. РАДИАЦИЯ И МАССА ПРОТИСТОНОВ

Согласно построенной теории, точечный заряд может обмениваться энергией только с электромагнитным полем. Окружающее точечный заряд поле можно разложить (среди прочих) на две компоненты, допускаемые волновым уравнением: расходящуюся волну, уносящую от него 4-импульс, и сходящуюся – приносящую 4-импульс. В силу инвариантности единого поля в одном и том же интервале времени dt в заданной инерциальной системе отсчёта расходящаяся волна может унести от точечного заряда точно такой же 4-импульс, взятый с противоположным знаком, какой может принести сходящаяся волна. При этом 4-импульс точечного заряда не может измениться, то есть взаимодействия с полем нет. Поэтому, понимая излучение и поглощение как взаимодействие с полем, необходимо принять, что являясь точечным источником, заряд не может одновременно излучать и поглощать. То есть эти процессы (радиации) чередуются и под радиацией следует понимать только разность сходящейся и расходящейся волн, а остальная (внешняя) их часть является не взаимодействующей с зарядом. Мы увидим, что излучение точечным зарядом электромагнитных волн возникает только при ускорении заряда. Реакция радиации сама вызывает ускорение заряда. При этом система из заряда и его поля радиации, являясь замкнутой, проявляет самостоятельную активность, конкретная форма которой, однако, коррелирует с внешними полями посредством силы Лоренца.

§1. Электромагнитное поле произвольно движущегося протистона.

1. Закон Кулона без силового смысла понятия поля. (на основе [Ландау 2, §36]) Для постоянного электрического (**электростатического**) поля уравнения Максвелла (11.2.2.4),(11.2.1.1) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Электрическое поле **E** выражается через один только потенциал φ соотношением (11.1.4.1)

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\triangle\varphi = -4\pi\varrho. \tag{4}$$

Это уравнение носит название **уравнения Пуассона**. В пустоте, то есть при $\varrho = 0$, потенциал удовлетворяет **уравнению Лапласа**

$$\triangle\varphi = 0. \tag{5}$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведённому из точки, в которой находится заряд q. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (1) в интегральной форме (интегрируя по некоторому объёму и применяя теорему Гаусса)

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \varrho\, dv.$$

Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R с центром на заряде q, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi q$. Отсюда находим:

$$E = \frac{q}{R^2}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{R}}{R^3}. \tag{6}$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния до этого заряда. Это – так называемый **закон Кулона**. Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{q}{R}. \tag{7}$$

Заметим, что пока мы не связываем закон Кулона (и, вообще, электромагнитное поле) с силами, действующими между зарядами. Это станет возможным лишь статистически после введения понятия силы Лоренца.

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции (то есть линейности уравнения для 4-потенциала), равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{q_a}{R_a},$$

где R_a – расстояние от заряда q_a до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ϱ, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\varrho}{R} dv, \tag{8}$$

где R – расстояние от элемента объёма dv до данной точки (точки наблюдения) поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (4) значений плотности точечного заряда $\varrho = q\delta(\mathbf{R})$ и его потенциала $\varphi = q/R$. Мы находим тогда

$$\triangle \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{9}$$

2. Потенциалы произвольного 4-тока. (Запаздывающие потенциалы.) (на основе [Ландау 2, §62]) Уравнения для потенциалов имеют вид (11.2.2.9)

$$\triangle \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\triangle \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho. \tag{2}$$

Решение этих неоднородных линейных уравнений может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного решения уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного решения разделим всё пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящемся в одном из таких элементов объёма. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд dq в заданном элементе объёма является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объёма, то плотность заряда $\varrho = dq(t)\ \delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ – расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\triangle \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\ dq(t)\ \delta(\mathbf{R}). \tag{3}$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\triangle \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

В силу центральной симметрии $\delta(\mathbf{R})$, функцияв φ в 3-пространстве является функцией только от R, тогда, записав оператор Лапласа в сферических координатах [Корн, с. 188], получим в этих координатах уравнение

$$\frac{1}{R^2}\ \frac{\partial}{\partial R}\ \left(R^2\ \frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \xi(R,t)/R$. Тогда для ξ мы получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это знакомое нам по плоским волнам уравнение, решение которого имеет вид (11.7.2.2)

$$\xi = f_1(t-R) + f_2(t+R).$$

Поскольку мы ищем только частное решение, то достаточно взять только одну из функций $f_1,\ f_2$. Обычно бывает удобным выбирать $f_2 = 0$ (см. об этом следующий пункт). Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{\xi(t-R)}{R}. \tag{5}$$

Функция ξ в этом равенстве пока произвольная; выберем её теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать ξ так, чтобы в начале координат удовлетворилось уравнение (3). Это легко сделать, заметив, что при $R \to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R \to 0$ в уравнении (3) можно пренебречь членом $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\triangle \varphi$. Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение (1.9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула (5) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\xi(t) = dq(t)$, то есть

$$\varphi = \frac{dq(t-R)}{R}. \tag{6}$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (2) для произвольного распределения зарядов $\varrho(x,\ y,\ z,\ t)$. Для этого достаточно написать $dq = \varrho\ dv$ ($dv-$ элемент объёма) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (2) можно прибавить ещё решение φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение имет вид

$$\varphi(r,t) = \int \frac{1}{R}\ \varrho(\mathbf{r}',\ t-R)\ dv' + \varphi_0, \tag{7}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \qquad dv' = dx'\ dy'\ dz',$$

где R есть расстояние от элемента объёма dv до "точки наблюдения", в которой мы ищем значение потенциала. Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi = \int \frac{\varrho_{t-R}}{R} dv + \varphi_0, \tag{8}$$

где индекс показывает, что значение ϱ надо брать в момент времени

$$t - R,$$

а **штрих у** dv **опущен**.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}_{t-R}}{R} dv + \mathbf{A}_0, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}_0$ – решение уравнения (1) без правой части.

Выражения (8), (9) (без φ_0 и $\mathbf{A}_0$) называются **запаздывающими потенциалами**.

3. Об опережающих потенциалах и естественном направлении времени. С математической точки зрения выбор частного решения вида

$$\varphi = \frac{dq(t-R)}{R}, \tag{1}$$

приводящего к запаздывающим потенциалам, столь же законен как и решения вида

$$\varphi = \frac{dq(t+R)}{R}, \tag{2}$$

которое аналогично приводит к понятию **опережающих потенциалов**.

Так как запаздывающие (или опережающие потенциалы) элемента заряда различны относительно инверсии времени (их носители – изотропные конусы будущего или прошлого), то переход от одних к другим – вовсе не формальность Запаздывающим потенциалам (как мы увидем ниже) соответствуют расходящиеся сферические волны излучения, уносящие энергию покоя (массу) от точечного заряда. Опережающим потенциалам соответствует инвертированный во времени процесс, то есть сходящаяся сферическая волна, приносящая энергию заряду (поглощение). Однако, обычно поглощение рассматривается посредством силы Лоренца (в классической электродинамике). Это приводит классическую электродинамику к противоречиям, которые мы попытаемся преодолеть, используя опережающие потенциалы наряду с запаздывающими. При этом удобно ограничиться подробным изучением запаздывающих потенциалов (излучения), обобщая результаты на поглощение, используя симметрию относительно инверсии времени.

Заметим, что инверсия оси времени сама по себе не изменяет **естественного направления времени** которое определяется только лишь направлением,

в котором происходит расширение Вселенной. Только в этом направлении происходит развитие Вселенной, связанное с её глобальным охлаждением. В условиях расширяющейся Вселенной, излучение из далёкого прошлого приходит с доплеровским красным смещением, поэтому космическая даль чёрная, несмотря на горячее прошлое Вселенной, и все процессы идут с преобладанием излучения. В инвертированном времени доплеровское смещение синее, излучение космической дали греет Вселенную, преобладает поглощение над излучением и все процессы идут вспять.

4. Потенциалы произвольно движущегося протистона. (Потенциалы Лиенара-Вихерта.) (На основе [Савельев 1, §78].) Найдём поле протистона, движущегося с ускорением. Пусть движение происходит по траектории $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ (соответствующая мировая линия изображена на рис. 112.1).

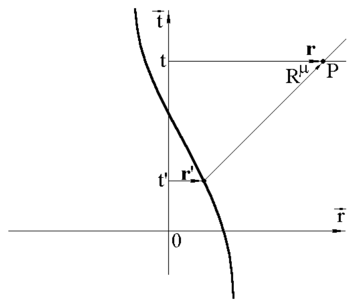


Рис. 112.1.

Вычислим поле в точке наблюдения P, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$. Вследствие запаздывания потенциалы в точке P в момент t будут определяться положением и скоростью заряда не в тот же момент времени t, а в более ранний момент t'. Момент t' должен удовлетворять условию

$$\tau = t - t' = R(t') > 0, \tag{1}$$

где $R(t')$ – расстояние от точки, в которой находится заряд в момент t', до точки наблюдения P. Запаздывание определяется временем τ, которое можно интерпретировать как время, за которое **возмущение потенциала** дошло от точки $\mathbf{r}'(t')$ до точки $\mathbf{r}$.

Легко видеть, что τ и вектор $\mathbf{R}(t')$ образуют 4-вектор

$$R^\mu = (\tau,\ \mathbf{R}). \tag{2}$$

Действительно, 4-векторы

$$x^\mu = (t,\ \mathbf{r}) \quad \text{и} \quad x'^\mu = (t',\ \mathbf{r}'(t'))$$

есть два 4-радиус-вектора. Вектор (2) равен разности этих двух 4-векторов и, следовательно, сам является 4-вектором.

Из (1) вытекает, что квадрат 4-вектора (2) равен нулю:

$$R^\mu R_\mu = \tau^2 - R^2 = 0, \quad \tau = R, \tag{3}$$

(это выражение есть по существу квадрат интервала между событиями возникновения **сигнала** (возмущения) в одной точке и прихода его в другую точку).

Свяжем с протистоном систему отсчёта, в которой он покоится в момент t'. В этой системе потенциалы определяются выражениями

$$\varphi(\mathbf{r},\ t) = \frac{q}{R} = \frac{q}{\tau}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},\ t) = 0. \tag{4}$$

Тогда 4-потенциал поля имеет вид

$$A^\mu = \left(\frac{q}{\tau},\ 0\right). \tag{5}$$

Очевидно, что в произвольно взятой системе отсчёта потенциалы должны зависеть от скорости протистона $\mathbf{v}$. Попытаемся найти такую зависимость 4-потенциала от скорости, которая при $\mathbf{v} = 0$ приводила бы к выражению вида (5). Поскольку мы ищем четырёхмерное выражение потенциала, скорость нужно взять в виде 4-скорости

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

Если положить 4-потенциал пропорциональным 4-скорости, то при $\mathbf{v} = 0$ векторный потенциал $\mathbf{A}$ также будет равен нулю. Далее в знаменателе временнóй компоненты 4-потенциала (5) стоит временнáя компонента 4-вектора (2). Следовательно, в знаменатель искомого выражения для A^μ следует ввести 4-вектор R^μ, причём для того чтобы получилась правильная размерность, его нужно умножить на 4-скорость (в числитель мы уже ввели 4-скорость).

Тогда 4-потенциал нужно определить так:

$$A^\mu = \frac{q\ u^\mu}{R^\nu u_\nu}. \tag{6}$$

Подстановка значений R^ν и u_ν даёт, что

$$R^\nu u_\nu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\tau - \mathbf{Rv}).$$

Следовательно, выражение (6) можно записать в виде

$$A^\mu = \sqrt{1-v^2}\frac{q\ u^\mu}{\tau - \mathbf{Rv}},$$

откуда

$$A^\mu = \left(\frac{q}{\tau - \mathbf{Rv}},\ \frac{q\ \mathbf{v}}{\tau - \mathbf{Rv}}\right). \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что при $\mathbf{v} = 0$ выражение (7) действительно переходит в (5).

Приняв во внимание, что $\tau = R$, запишем выражения потенциалов следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r},\ t) = \frac{q}{(R - \mathbf{Rv})_{t'}}, \tag{8}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t) = \frac{q\mathbf{v}_{t_0}}{(R - \mathbf{Rv})_{t'}} = \varphi \mathbf{v}_{t'}, \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) называются **потенциалами Лиенара-Вихерта**. Чтобы получить значения потенциалов в момент времени t, значения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{R}$ в правых частях (8) и (9) нужно брать в момент t', определяемый условием

$$t' = t - \tau = t - R(t') = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|.$$

Запишем это условие в виде

$$F(x,\ y,\ z,\ t,\ t') = t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| =$$

$$= t - t' - \sqrt{[x - x'(t')]^2 + [y - y'(t')]^2 + [z - z'(t')]^2} = 0. \tag{10}$$

Правые части выражений (8) и (9) есть функции от момента времени t', который в свою очередь есть функция от $x,\ y,\ z$ и t ($x,\ y,\ z$ – координаты точки наблюдения)

$$t' = f(x,\ y,\ z,\ t). \tag{11}$$

Соотношение (10) представляет собой неявное выражение функциональной зависимости (11).

Отметим **времениподобность потенциалов Лиенара-Вихерта**, которая очевидна из (6), так как

$$A^\mu A_\mu = \frac{q^2\ u^\mu u_\mu}{(R^\nu u_\nu)^2} = \frac{q^2}{(R^\nu u_\nu)^2} \geqslant 0.$$

Так как при условии Лоренца любые потенциалы можно представить суперпозицией потенциалов Лиенара-Вихерта, то можно говорить вообще о **времениподобности электромагнитных потенциалов при условии Лоренца**. Это означает, что в любой точке 3-векторный потенциал $\mathbf{A}$ можно обратить в 0 подходящим выбором системы координат. Напомним, что корпускулярная калибровка не совпадает с условием Лоренца.

Заметим, что $A^\mu A_\mu \to 0$ при $R^\nu u_\nu \to \infty$, что возможно как при $r^\nu \to \infty$, так и при $u_\nu \to \infty$.

5. Связь Лиенар-Вихертовских потенциалов с сопутными волнами. Как сопутная волна (6.4.2.8) так и Лиенар-Вихертовский потенциал являются определёнными функциями лишь интервала до точечного заряда. Пользуясь представлением обобщённой сопутной волны протистона как суперпозиции космических трансволн, можно установить взаимнооднозначное соответствие между

каждой такой транс-волной и лиенар-вихертовским потенциалом соответствующей точки на мировой линии протистона. Это соответствие, если потребуется, позволяет конструктивное определение понятия потенциала.

6. Электрическое поле протистона. (На основе [Савельев 1, §78].) При нахождении значений полей по формулам (11.1.4.1,2)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}]$$

надо вычислять выражения вида $\partial\varphi/\partial x_i$, $\partial\mathbf{A}/\partial t$ и $\partial A_k/\partial x_i$, где x_i - координаты точки наблюдения. Поскольку функции φ и $\mathbf{A}$ зависят от x, y, z, t сложным образом – через $t' = f(x,\ y,\ z,\ t)$, вычисление придётся производить по следующей схеме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_k}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{2}$$

Соотношение (1) можно записать в виде

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'. \tag{3}$$

Таким образом, нам понадобятся значения производных $\partial t'/\partial x_i$ и $\partial t'/\partial t$, которые можно найти с помощью соотношения (4.10). Запишем его в виде

$$F(x,\ y,\ z,\ t,\ t') =$$
$$= t - t' - \sqrt{\sum [x_i - x_i'(t')]^2} = t - t' - \sqrt{R^2} = 0. \tag{4}$$

Продифференцировав (4) по t', получим

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -1 + \frac{\sum (x_i - x_i')(\partial x_i'/\partial t')}{R}.$$

Приняв во внимание, что $x_i - x_i' = R_i$, а $\partial x_i'/\partial t'$ есть i-я компонента скорости протистона в момент t', придём к выражению

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -1 + \frac{\mathbf{Rv}(t')}{R} = -\frac{R - \mathbf{Rv}}{R}. \tag{5}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{R_i}{R}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) по правилам дифференцирования неявной функции находим

$$\frac{\partial t'}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial t'} = -\frac{R_i}{R - \mathbf{Rv}},$$

то есть

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{Rv}}. \tag{7}$$

Теперь найдём $\partial t'/\partial t$. По правилу дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial t'}.$$

Производная функции (4) по t равна единице: $\partial F/\partial t = 1$. Производная $\partial F/\partial t'$ определяется выражением (5). Следовательно,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \mathbf{Rv}}. \tag{8}$$

Приступим к вычислению значений $\partial \varphi/\partial t'$ и $\partial \mathbf{A}/\partial t'$. Согласно (4.8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = -\frac{q}{(R - \mathbf{Rv})^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'}\mathbf{v} - \mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}\right),$$

гре пренебрегаем космологически малым изменением заряда.

Из соотношений $R = t - t'$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$ вытекает, что

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -1, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t'} = -\mathbf{v}(t').$$

Кроме того, $\partial \mathbf{v}/\partial t' = \dot{\mathbf{v}}$, где $\dot{\mathbf{v}}$ - ускорение протистона в момент t'. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = -\frac{q(-1 + \mathbf{vv} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})}{(R - \mathbf{Rv})^2} = \frac{q(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})}{(R - \mathbf{Rv})^2}. \tag{9}$$

Согласно (4.9)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'}\mathbf{v} + \varphi\dot{\mathbf{v}}.$$

Подстановка выражения (9) для $\partial \varphi/\partial t'$ и (4.8) для φ даёт

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} = \frac{q\mathbf{v}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})}{(R - \mathbf{Rv})^2} + \frac{q\dot{\mathbf{v}}}{R - \mathbf{Rv}} =$$

$$= q\frac{\mathbf{v}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}(R - \mathbf{Rv})}{(R - \mathbf{Rv})^2}. \tag{10}$$

Наконец, мы получили возможность написать выражение для $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\nabla t' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

(см. формулы (3) и (2)). Подстановка сюда выражений (9), (7), (10) и (8) даёт

$$\mathbf{E} = -\frac{q(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})}{(R - \mathbf{Rv})^2}\left[-\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{Rv}}\right] -$$

$$-q\frac{\mathbf{v}(1-v^2+\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})+\dot{\mathbf{v}}(R-\mathbf{R}\mathbf{v})}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^2}\cdot\frac{R}{R-\mathbf{R}\mathbf{v}}=$$

$$=q\frac{\mathbf{R}(1-v^2+\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})-R\mathbf{v}(1-v^2+\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})-R\dot{\mathbf{v}}(R-\mathbf{R}\mathbf{v})}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^3}. \tag{11}$$

Сгруппировав вместе члены, содержащие ускорение протистона $\dot{\mathbf{v}}$, можно привести выражение для $\mathbf{E}$ к виду

$$\mathbf{E}=q\frac{(\mathbf{R}-R\mathbf{v})(1-v^2)}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^3}+q\frac{\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}-R\mathbf{v})-R\dot{\mathbf{v}}(R-\mathbf{R}\mathbf{v})}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^3}.$$

Числитель второго слагаемого можно представить в виде двойного векторного произведения $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})$ [Корн,(5.2-12)]

$$[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-R\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}]]=(\mathbf{R}-R\mathbf{v})(\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})-\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}(\mathbf{R}-R\mathbf{v}))=$$

$$=\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}-R\mathbf{v})-\dot{\mathbf{v}}(R^2-R\mathbf{R}\mathbf{v})=\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}-R\mathbf{v})-R\dot{\mathbf{v}}(R-\mathbf{R}\mathbf{v}).$$

В результате получим окончательное выражение

$$\mathbf{E}=q\frac{(\mathbf{R}-R\mathbf{v})(1-v^2)}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^3}+q\frac{[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-R\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}]]}{(R-\mathbf{R}\mathbf{v})^3}. \tag{12}$$

Напомним, что значения величин $\mathbf{R}$, $\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}}$ в этой формуле должны быть взяты в момент времени $t'=t-\tau$.

7. Магнитное поле протистона. (На основе [Савельев 1, §78].) Перейдём к нахождению поля H.

$$\mathbf{H}=[\nabla\mathbf{A}].$$

Преобразуем выражение для $[\nabla\mathbf{A}]$. Легко проверить, что его можно записать в виде

$$[\nabla\mathbf{A}]=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\mathbf{e}_l=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_k}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}\mathbf{e}_l,$$

где $\mathbf{e}_l$ – орты осей координат,

ε_{ikl} – символ, имеющий 27 значений, которые определяются следующими правилами:

1) если значения хотя бы двух индексов совпадают, то $\varepsilon_{ikl}=0$;

2) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку последовательности 1 2 3, то $\varepsilon_{ikl}=1$;

3) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку последовательности 3 2 1, то $\varepsilon_{ikl}=-1$.

В формуле используется соглашение о суммировании по дважды повторяющимся индексам.

Величина $\partial A_k/\partial t'$ есть k-я компонента вектора $\partial \mathbf{A}/\partial t'$, а $\partial t'/\partial x_i$ есть i-тая компонента градиента функции t'. Следовательно

$$[\nabla \mathbf{A}] = \varepsilon_{ikl}(\nabla t')_i \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_k \mathbf{e}_l = \left[\nabla t',\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right].$$

В последнем равенстве легко убедится проверкой.

Подставив выражения (6.8) и (6.11), получим, перенеся скаляр $-1/(R - \mathbf{Rv})$ между сомножителями и деля и умножая на скаляр R:

$$\mathbf{H} = \left[-\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{Rv}},\ q\frac{\mathbf{v}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}(R - \mathbf{Rv})}{(R - \mathbf{Rv})^2}\right] =$$

$$\left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ q\frac{-R\mathbf{v}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}) - R\dot{\mathbf{v}}(R - \mathbf{Rv})}{(R - \mathbf{Rv})^3}\right]. \tag{1}$$

Добавим в числителе второго сомножителя слагаемое $\mathbf{R}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}})$. От этого ввекторное произведение в целом не изменится, так как $[\mathbf{RR}] = 0$. Однако второй сомножитель примет вид не отличающийся от выражения (6.11) для $\mathbf{E}$

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ q\frac{\mathbf{R}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}) - R\mathbf{v}(1 - v^2 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}) - R\dot{\mathbf{v}}(R - \mathbf{Rv})}{(R - \mathbf{Rv})^3}\right], \tag{2}$$

то есть, мы приходим к соотношению

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ \mathbf{E}\right]. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t')$. Из (3) вытекает, что вектор $\mathbf{H}$ в каждой точке перпендикулярен к вектору $\mathbf{E}$ и к вектору, проведённому из точки, в которой находился протистон в момент t', в точку наблюдения. Однако, для произвольного свободного от зарядов поля, вектор $\mathbf{E}$, вообще говоря, не равен, вектору $\mathbf{H}$ по модулю. Пример – стоячие волны.

8. Тахионный характер сопутствующего поля протистона. Поле, описываемое выражением (6.12), состоит из двух частей. Первая зависит только от скорости протистона и на больших расстояниях убывает как $1/R^2$ (то есть как кулоновское поле). Вторая часть зависит, кроме скорости протистона, также и от его ускорения и на больших расстояниях убывает как $1/R$ (то есть как напряжённость поля в сферической электромагнитной волне). Первая часть поля в системе отсчёта, сопутствующей протистону, имеет вид кулоновского поля и эту часть поля мы будем называть **сопутствующим полем**. Благодаря корпускулярной калибровке потенциала, плотность энергии сопутствующего поля в мгновенной инерциальной системе отсчёта, где протистон неподвижен, равна нулю (11.4.4.*).

Если заряд движется равномерно, второе слагаемое в формуле (6.12) обращается в нуль и поле определяется следующим ыражением:

$$\mathbf{E} = q\frac{(\mathbf{R} - R\mathbf{v})(1 - v^2)}{(R - \mathbf{Rv})^3}, \tag{1}$$

где значение $\mathbf{R}$ берётся в момент времени t', а значение $\mathbf{v}$ не зависит от t.

Вторую часть поля, убывающую как $1/R$ будем называть **радиационным полем** протистона.

Сопутствующая и радиационная компоненты электромагнитного поля протистона существенно отличаются друг от друга. Первая зависит лишь от скорости протистона. Она движется вместе с протистоном как центрально симметричное абсолютно твёрдое **безмассовое сопутствующее тело** (энергия его поля скомпенсирована отрицательной энергией истекающего 4-тока). Абсолютная твёрдость сопутствующего тела не противоречит релятивизму в силу отсутствия у него энергии.

Сопутствующее поле взаимнооднозначно (в силу корпускулярной калибровки) связано со сплошным 4-током протистона, который является **пространственноподобным**. Это означает, что скорость этого 4-тока всегда больше 1, а не меньше, как это необходимо для времениподобного 4-тока, иначе говоря, сплошной 4-ток протистона, а вместе с ним и сопутствующее поле, имеют **тахионный характер**. В сопутствующей протистону системе отсчёта, скорость его сплошного 4-тока бесконечна. Это объясняет мгновенное изменение скорости сопутствующего поля по всему его объёму в ответ на соответствующее изменение скорости протистона. Разумеется при этом не происходит мгновенной передачи энергии, поскольку плотность энергии сопутствующего поля равна нулю.

9. Плотность потока энергии электромагнитного поля протистона. В мгновенно сопутствующей протистону системе ($v = 0$) из (6.12) и (7.1) имеем

$$\mathbf{E} = q\frac{\mathbf{R}}{R^3} + q\frac{[\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]]}{R^3}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ q\frac{-R^2\mathbf{a}}{R^3}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ q\frac{-\mathbf{a}}{R}\right] = \frac{1}{R^2}[\mathbf{R}, -q\mathbf{a}]. \tag{2}$$

Тогда, если игнорировать взаимодействие истекающего 4-тока с электромагнитным полем протистона, то получим

$$\begin{aligned}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}] &= \frac{-q^2}{4\pi R^5}[\mathbf{R} + [\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]], [\mathbf{R}\mathbf{a}]] = \\ &= \frac{-q^2}{4\pi R^5}([\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]] + [[\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]], [\mathbf{R}\mathbf{a}]]) = \\ &= \frac{q^2}{4\pi R^5}([[\mathbf{R}\mathbf{a}], [\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]]] - [\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]]),\end{aligned}$$

применяя к каждому из двух членов формулу

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \qquad \text{[Корн,(5.2-12)]}$$

получим

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{4\pi R^5}(\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{a}]^2 - [\mathbf{R}\mathbf{a}]([\mathbf{R}\mathbf{a}]\mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{a}) + \mathbf{a}R^2).$$

Так как $\mathbf{R}\perp[\mathbf{Ra}]$, то $[\mathbf{Ra}]\mathbf{R}=0$. Тогда

$$\mathbf{S}=\frac{q^2}{4\pi R^5}(\mathbf{R}[\mathbf{Ra}]^2-\mathbf{R}(\mathbf{Ra})+\mathbf{a}R^2). \tag{3}$$

При больших R (**волновая зона**) плотность потока определяется первым членом. При этом поток течёт радиально от центра (убывая как $1/R^2$) и его максимум лежит на направлении, перпендикулярном $\mathbf{a}$.

При очень малых R (**ближняя зона**) плотность потока зависит от расстояния как $1/R^3$ и определяется 2-м и 3-м членами:

$$-\mathbf{R}(\mathbf{Ra})+\mathbf{a}R^2=-\mathbf{R}Ra\cos\varphi+\mathbf{a}R^2.$$

Судя по зависимости от расстояния, этот поток замкнут, приблизительно как на рис. 12.2.

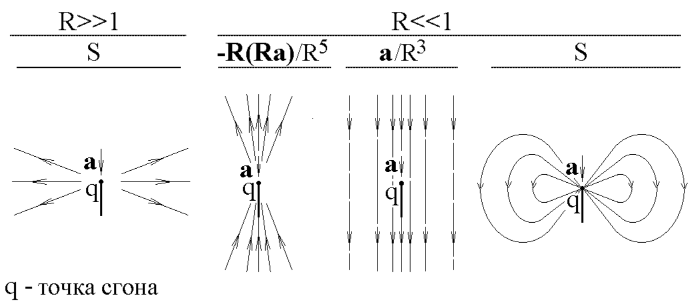


Рис. 112.2.

Однако необходимо учитывать взаимодействие истекающего 4-тока с электромагнитным полем протистона, при этом 4-импульс первой (сопутствующей) компоненты электромагнитного поля (1) обнуляется (11.4.4.*), то есть **в корпускулярной калибровке 4-импульс остаётся только у радиационной компоненты электромагнитного поля протистона**.

§2. Излучение протистоном.

1. Плотность импульса и энергии электромагнитного поля протистона на больших расстояниях. На достаточно больших расстояниях, где можно пренебречь величиной $\sim\frac{1}{R^2}$ по сравнению с $\sim\frac{1}{R}$, собственное электромагнитное поле протистона (1.6.11),(1.6.12),(1.7.3) имеет вид:

$$\mathbf{E}=q\frac{\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}-R\mathbf{v})-R\dot{\mathbf{v}}(R-\mathbf{Rv})}{(R-\mathbf{Rv})^3}=q\frac{[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-R\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}]]}{(R-\mathbf{Rv})^3}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}[\mathbf{R}\ \mathbf{E}]. \tag{2}$$

Часть поля точечного заряда, определяемую этими формулами (в том числе и при малых R), называют **излучением** этого заряда.

Плотность импульса излучения:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\ \mathbf{H}]=\frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\frac{1}{R}[\mathbf{RE}]]=\frac{1}{4\pi R}[\mathbf{E}[\mathbf{RE}]]=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}(\mathbf{R}(\mathbf{EE}))-\mathbf{E}(\mathbf{ER}))=\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{R}}{R}E^2-\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{E}}{R}(\mathbf{ER}).$$

Из (1) и (2) следует, что $\mathbf{E}\perp\mathbf{R}$, $\mathbf{H}\perp\mathbf{R}$, $\mathbf{H}\perp\mathbf{E}$, $\mathbf{H}^2=\mathbf{E}^2$, поэтому

$$\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\ \frac{\mathbf{R}}{R}\ E^2=\frac{1}{4\pi}\ \frac{\mathbf{R}}{R}\ H^2.$$

Плотность энергии электромагнитного поля излучения, то есть поля вдали от 4-тока (11.4.4.5):

$$W=S^0=\frac{1}{8\pi}\ (E^2+H^2).$$

Так как $E^2=H^2=4\pi|\mathbf{S}|$, то

$$W=|\mathbf{S}|=\frac{1}{4\pi}\ E^2=\frac{1}{4\pi}\ H^2. \tag{3}$$

Соотношения между **E** и **H** показывают, что на достаточно больших расстояниях поле становится плоской электромагнитной волной, распространяющейся радиально со скоростью света.

Уравнения электродинамики ковариантны по отношению к инверсии всех 4-х координатных осей. Поэтому из существования некоторого процесса следует существование процесса, идущего во времени в обратном направлении (с инверсией пространственных координат). В частности для процесса излучения существует обратный процесс – **поглощение** (**антиизлучение**). Ниже мы покажем, что поглощение и излучение не могут быть одновременными для одной точечной частицы (они чередуются).

Процессы излучения и поглощения будем объединять одним понятием **радиации**. Подробнее о поглощении мы скажем ниже, обобщив на него результаты, полученные для излучения.

Пока мы не будем говорить о поглощении, чтобы зря не усложнять выражения. Надо лишь иметь в виду существование поглощения, чтобы не показалось, что взаимодействие 4-тока с полем ограничивается лишь излучением. Что касается **силы Лоренца**, то мы намерены показать, что она сводится к элементарным процессам радиации, где внешние электрическое и магнитное поле приобретают силовой смысл только статистически, интерферируя с полем радиации, а локально вовсе не имеют силового смысла.

2. Интенсивность излучения протистонов в волновой зоне. [Ландау 2, с. 222]. **Интенсивностью** I **электромагнитной волны** называется величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади **поверхности распространения**, перпендикулярной к направлению

распространения волны. Иначе говоря, это ничто иное как проекция плотности потока энергии (или, что тоже – плотности импульса) электромагнитного поля на направление его распространения, то есть – на направление $\mathbf{n}_S$ самой плотности импульса. А это значит, что I совпадает с модулем плотности импульса электромагнитного поля [Яворский, с.568,]

$$I = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_S = |\mathbf{S}| = S. \tag{1}$$

Полной интенсивностью излучения I_f назовём интеграл от интенсивности по всей поверхности распространения

$$I_f = \int dI = \oint_f S\, df. \tag{2}$$

Так как **в свободном от 4-тока пространстве** плотность энергии W электромагнитных волн равна модулю S его плотности импульса

$$W = |\mathbf{S}| = S = E^2/4\pi = H^2/4\pi, \tag{3}$$

то интенсивность излучения равна также его плотности энергии

$$I = S = W \tag{4}$$

(в свободном от 4-тока пространстве).

В случае **сферической волны в волновой зоне**, поверхности, перпендикулярные к направлению распространения волны (поверхности распространения) являются сферами с центром в **точечном источнике** этой волны. Распределение плотности энергии на этих сферах имеет определённую зависимость от угловых координат. Так как точечный источник излучает только если его скорость изменяется, то сферические поверхности распространения, вообще говоря, не концентрические в их последовательности. Волны от множества точечных источников суммируются и их общая поверхность распространения в точном смысле не сферическая, хотя можно говорить о её сферичности в приближённом смысле, если расстояния между всеми рассматриваемыми источниками малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

Для сферической волны интенсивность dI излучения в элемент телесного угла do очевидно равна количеству энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df = R^2\, do$ шаровой поверхности с центром в начале координат и радиусом R. Это количество равно модулю плотности потока энергии S, умноженному на df, то есть

$$dI = W R^2\, do = \frac{E^2}{4\pi} R^2\, do. \tag{5}$$

Так как $E^2 \sim 1/R^2$, то количество энергии, излучаемой точечным зарядом в элемент телесного угла do, одинаково для всех расстояний (при одинаковых

для них значениях разности $t-R$). Это естественно, так как излучаемая энергия распространяется в окружающем пространстве с постояннй скоростью, нигде не накапливаясь и не исчезая.

Интенсивность излучения точечного заряда в заданный телесный угол o определяется интегралом по всем направлениям этого угла, в частности полная интенсивность излучения точечного заряда

$$I_f = \int\ dI = \int W R^2\, do = \frac{1}{4\pi}\int E^2 R^2\, do = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} E^2 R^2\, d\varphi\, d\vartheta. \tag{6}$$

Полная интенсивность системы точечных зарядов определится суммой по всем этим зарядам

$$I_f = \sum_{i=1}^{n}\int I_i = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} E_i^2 R_i^2\, d\varphi_i\, d\vartheta_i. \tag{7}$$

3. Угловое распределение излучения в волновой зоне движущегося протистона. (Сравните с [Ландау 2, (73,11)]).

Для поля излучения (1.1), вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении излучения ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$), получим формулы

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R}\ \frac{\mathbf{na}(\mathbf{n}-\mathbf{v}) - \mathbf{a}(1-\mathbf{nv})}{(1-\mathbf{nv})^3} = \frac{q}{R}\ \frac{[\mathbf{n}[(\mathbf{n}-\mathbf{v})\mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{nv})^3},\quad \mathbf{H} = [\mathbf{nE}], \tag{1}$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в опережающий момент времени $t' = t - R$ (момент излучения). Интенсивность излучения (2.5) в телесный угол do равна $dI = \frac{1}{4\pi}E^2R^2do$. Найдём из первого выражения (1) квадрат E^2

$$E^2 = (q^2/R^2(1-\mathbf{nv})^6)Q,$$

где

$$\begin{gathered}Q = ((\mathbf{na})(\mathbf{n}-\mathbf{v}) - \mathbf{a}(1-\mathbf{nv}))^2 = (\mathbf{na})^2(\mathbf{n}-\mathbf{v})^2 + a^2(1-\mathbf{nv})^2 - \\ -2(\mathbf{na})(\mathbf{n}-\mathbf{v})\mathbf{a}(1-\mathbf{nv}) = (\mathbf{na})^2(\mathbf{n}-\mathbf{v})^2 + a^2(1-\mathbf{nv})^2 - 2(\mathbf{na})^2(1-\mathbf{nv}) + \\ +2(\mathbf{na})(\mathbf{va})(1-\mathbf{nv}) = (\mathbf{na})^2(1-2\mathbf{nv}+v^2-2+2\mathbf{nv}) + a^2(1-\mathbf{nv})^2 + \\ +2(\mathbf{na})(\mathbf{va})(1-\mathbf{nv}) = 2(\mathbf{na})(\mathbf{va})(1-\mathbf{nv}) + a^2(1-\mathbf{nv})^2 - (1-v^2)(\mathbf{na})^2.\end{gathered}$$

Используя последнее выражение, получим **интенсивность излучения в телесный угол** do

$$dI = \frac{q^2}{4\pi}\left\{\frac{2(\mathbf{na})(\mathbf{va})}{(1-\mathbf{vn})^5} + \frac{\mathbf{a}^2}{(1-\mathbf{vn})^4} - \frac{(1-v^2)(\mathbf{na})^2}{(1-\mathbf{vn})^6}\right\}do. \tag{2}$$

Если же мы хотим определить угловое распределение энергии излучения за всё время движения заряда, то надо проинтегрировать интенсивность по времени. При

этом следует помнить, что интегрируемое выражение является функцией $t' = t - R$. Тогда согласно (1.6.8)

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial t}\,dt = \frac{R}{R - \mathbf{Rv}}\,dt,$$

откуда

$$dt = (1 - \mathbf{nv})dt', \tag{3}$$

после чего интегрирование производится непосредственно по dt'. Таким образом, имеем следующее выражение для полного излучения в элемент телесного угла do:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{q^2}{4\pi}do \int \left\{ \frac{2(\mathbf{na})(\mathbf{va})}{(1-\mathbf{vn})^4} + \frac{\mathbf{a}^2}{(1-\mathbf{vn})^3} - \frac{(1-v^2)(\mathbf{na})^2}{(1-\mathbf{vn})^5} \right\} dt'. \tag{4}$$

Как видно из (2), угловое распределение излучения довольно сложно. В **ультрарелятивистском** случае $(1 - v \ll 1)$ оно обладает характерной особенностью, связанной с наличием высоких степеней разности $1 - \mathbf{vn}$ в знаменателях различных членов этого выражения. Именно, интенсивность велика в узком интервале углов, в котором мала разность $1 - \mathbf{vn}$. Обозначив посредством θ малый угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем, разлагая $\cos\theta$ в ряд [Корн, (21.2-41)]

$$1 - \mathbf{vn} = 1 - v\cos\theta \approx 1 - v(1 - \frac{\theta^2}{2}) \approx 1 - v + \frac{\theta^2}{2};$$

эта разность мала $(\approx 1 - v)$ при

$$\theta \approx \sqrt{1-v} \approx \sqrt{1-v^2} = 1/u^0. \qquad (5).$$

Таким образом, ультрарелятивистский протистон излучает в основном в направлении своего движения в интервал углов (5) вокруг направления скорости.

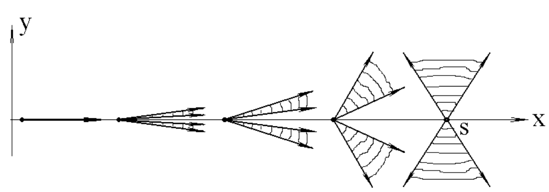


Рис. 112.3.

Заметим, что при произвольной скорости и ускорении всегда имеются такие два направления, в которых интенсивность излучения обращается в нуль. Это те направления, в которых вектор $\mathbf{n} - \mathbf{v}$ параллелен вектору a и поэтому поле (1) обращается в нуль. Например в процессе торможения по прямой линии заряженной частицы от релятивистской до нулевой скорости, существенная для излучения область будет выглядеть примерно как на рисунке 112.3. Здесь направления нулевого излучения параллельны скорости.

В пространственно-временно́м изображении (рис. 112.4) длина светоподобных стрелок характеризует интенсивность излучения. В данном случае торможения, реакция излучения направлена против скорости.

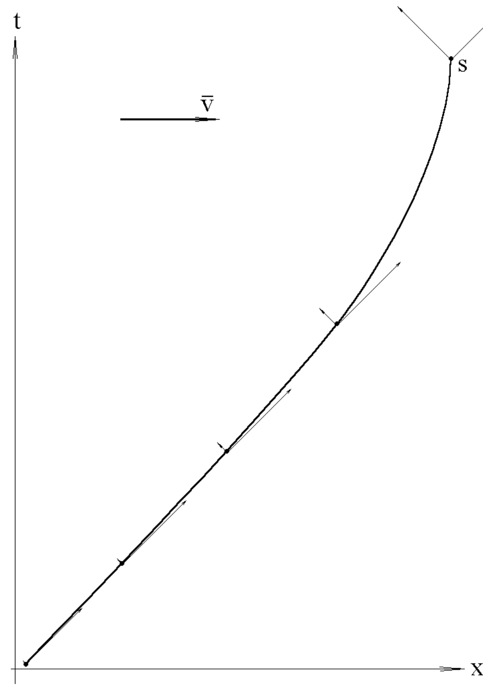


Рис. 112.4.

4. Эффект Доплера. Суть эффекта Доплера можно наглядно проиллюстрировать отвлекаясь от понятия излучения. Рассмотрим прямые отрезки мировых линий OA и OB, первый из которых соответствует неподвижной точке, а другой – движущейся слева направо. Эти отрезки имеют одинаковые длины в собственных системах отсчёта, что соответствует расположению их концов A и B на одной гиперсфере G. Каждый из них разобъём на одинаковое количество равных частей и посмотрим, как часто изотропные конусы стыков этих частей пересекают мировые линии S_1S_1 и S_2S_2 двух различно расположенных неподвижных наблюдателей.

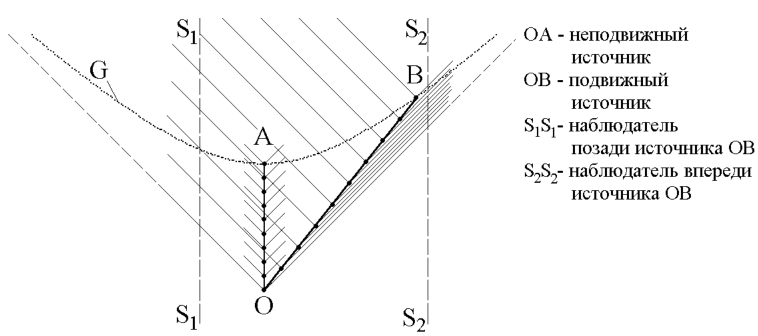


Рис. 112.5.

Собственное время отрезков OA и OB одинаково и разделено на равное число периодов излучения, а на S_1S_1 и S_2S_2 соответствующие периоды не одинаковы, что даёт наглядную иллюстрацию сути **эффекта Доплера**.

Эффект Доплера при движении источника радиации относительно приёмника со скоростью v изменяет **частоту волны** ω, соответствующую их относительной

неподвижности, до нового значения ω'. Действительно, поскольку частоту ω можно рассматривать как временнýю компоненту волнового 4-вектора k^μ, то, как для всякого 4-вектора, $\omega = k^0$ преобразуется по закону

$$\omega = \frac{\omega' - v k'_x}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1}$$

(9.6.9.2).

Здесь $(-v)$ — скорость системы отсчёта K относительно системы K', а v — скорость источника, то есть скорость системы K' относительно K.

k'_x можно записать в виде

$$k'_x = v\omega' \cos\vartheta, \tag{2}$$

где $\cos\vartheta$ — направляющий косинус вектора $\mathbf{k}'$.

Тогда

$$\omega = \omega' \frac{1 - v\cos\vartheta}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \omega' = \omega \frac{\sqrt{1-v^2}}{1 - v\cos v}. \tag{3}$$

(Сравните с [Ландау 2, (48,16)]).
Если точка наблюдения расположена на линии скорости, соответствующей моменту излучения (спереди или сзади), то $\cos\vartheta = \pm 1$ (**продольный эффект Доплера**) и тогда

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp v}}. \tag{4}$$

Знак "+" (в первом равенстве) соответствует сближению, а "−" — удалению источника от приёмника.

При $\cos\vartheta = 0$ (**поперечный эффект Доплера**)

$$\omega' = \omega\sqrt{1-v^2}. \tag{5}$$

(Сравните с [Левич 1, (22,8)]).
Заметим, что для плотности энергии W аналогичные формулы не годятся, так как W не является компонентой 4-вектора, а является компонентой 4-тензора. Формулу преобразования W можно найти, например, в [Ландау 2, (47.7)].

В отношении временнóй компоненты dt 4-вектора dR^μ, замедление времени аналогично эффекту Доплера. Поэтому поперечную компоненту эффекта Доплера можно рассматривать как результат замедления хода времени на движущемся объекте.

5. Об одной особенности лоренцевого преобразования частоты.

Необходимо различать два вида частоты:
во-первых – **частота стационарной волны** Ω, которая преобразуется как временнáя компонента волнового 4-вектора,
во-вторых – **частота периодических событий на мировой линии** ω, которая преобразуется как величина, обратная временной компоненте 4-вектора, соединяющего два соседних события.

Каждая из этих частот называется **собственной** в той системе отсчёта, в которой временна́я компонента, определяющего их 4-вектора экстремальна (**сопутствующая, или собственная система**). В собственной системе частота определяется не компонентой 4-вектора, а его длиной (инвариантной величиной).

Если Ω, ω – собственные частоты в сопутствующей системе отсчёта, то в другой системе, движущейся относительно собственной со скоростью v, их значения изме́няться по-разному:

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\sqrt{1-v^2}} = \Omega u^0,\ \omega' = \omega\sqrt{1-v^2} = \frac{\omega}{u^0}. \tag{1}$$

Например, если в некоторой системе отсчёта частоты Ω' и ω' равны

$$\frac{\Omega'}{\omega'} = 1 \tag{2}$$

и существует система отсчёта, в которой обе эти частоты (Ω и ω) собственные, то

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{u^{02}}. \tag{3}$$

6. О взаимодействии электромагнитных полей и протистонов. Так как плотность энергии сопутствующего протистону поля обнуляется отрицательной плотностью энергии его взаимодействия с истекающим из протистона сплошным током, то обмен электромагнитной энергией происходит только посредством радиации ускоренных точечных зарядов (протистонов). При этом изменение 4-импульсов всех протистонов должно удовлетворять потенциальным условиям (11.4.10.6) для точечных зарядов, что обеспечивает механические законы сохранения системы.

Плотность 4-импульса $T^{\mu 0}$ поля вместе с 4-токами является суммой плотности 4-импульса поля $T_F^{\mu 0}$ и плотности 4-импульса 4-тока $T_j^{\mu 0}$ в этом поле [гл. 10]

$$T^{\mu 0} = T_F^{\mu 0} + T_j^{\mu 0}. \tag{1}$$

Так как

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0, \tag{2}$$

то в отсутствие 4-импульса $T_j^{\mu 0}$ (достаточно далеко от зарядов)

$$\nabla_\mu T_F^{\mu 0} = 0,$$

то есть в отсутствие 4-тока сохраняется энергия поля, а существование зарядов без поля не возможно. Между зарядами и полем возможен обмен 4-импульсом за счёт **излучения (антиизлучения)** поля ускоренными протистонами. Никаких других механизмов обмена энергией между полем и 4-токами в этой теории не существует. Обмен энергией между зарядами и полем будем называть **активным обменом**.

Благодаря принципу суперпозиции электромагнитных полей, можно говорить о различных полях (частях единого поля, в смысле различных его разложений) и о их взаимодействии. Взаимодействие между полями посредством активного обмена с протистонами будем называть **активным взаимодействием полей**. Оно может сопровождаться изменением их энергии.

Поля будем называть **независимыми**, если они ортогональны друг другу. При этом энергия суммы полей равна сумме их энергий. Например, плотность энергии двух полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$:

$$W = \frac{1}{8\pi}((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 + (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2) = W_1 + W_2 + W_{12}, \tag{3}$$

где
$W_1 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{H}_1^2)$ – плотность энергии 1-го поля,
$W_2 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}_2^2 + \mathbf{H}_2^2)$ – плотность энергии 2-го поля,
$W_{12} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)$ – **взаимная плотность энергии** 1-го и 2-го поля (может иметь любой знак).

Если поля ортогональны, то $\int W_{12}\, dv = 0$ и тогда

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \tag{4}$$

В общем случае неортогональных (**зависимых**) полей следует учитывать их **взаимные энергии** $\mathcal{E}_{ij}$, например, для двух полей

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12}. \tag{5}$$

Эта энергия в отсутствие 4-токов сохраняется, но она может перераспределяться между составными частями, так как может изменяться степень перекрытия полей $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, то есть взаимная плотность энергии может изменяться при сохранении общей энергии $\mathcal{E}$. Появление взаимной энергии и перераспределение плотности энергии за счёт взаимной плотности будем называть **пассивным взаимодействием полей** (при условии отсутствия активного взаимодействия). Таким образом, пассивное взаимодействие не нарушает сохранения энергии общего поля во времени, хотя может появится взаимная энергия и перераспределение плотности энергии в пространстве (**интерференция полей**). Интерференция называется **конструктивной, деструктивной** соответственно при $W_{12} > 0, W_{12} < 0$. Она может быть разной в разных областях.

Характерно различие активного и пассивного взаимодействий при пролёте друг через друга двух волновых пакетов, летящих пересекающимися курсами. Если область их пересечения свободна от протистонов, то хотя во время встречи возникают возмущения плотности 4-импульсов этих волн, после их разделения эти плотности полностью восстанавливаются (пассивное взаимодействие). Если же область пересечения содержит протистоны, посредством них возможен обмен 4-импульсом между волновыми пакетами и их 4-импульсы после разделения могут отличаться от 4-импульсов до встречи и даже сами пакеты могут резко исказиться.

Поскольку всякое электромагнитное поле является компонентой единого электромагнитного поля, то для взаимодействия всякого поля важное значение имеет определение этого поля (то ли как области единого поля, то ли как его спектральной части в смысле разложения в ортогональную систему функций и тому подобное). Включать радиацию данного протистона в данное поле или не включать – это тоже вопрос определения поля. То есть понятие активного взаимодействия поля с протистоном относительно (не объективно). Оно различно для разных определений самого поля. Объективно лишь понятие активного взаимодействия протистона с собственным полем излучения (поглощения). Именно это взаимодействие мы и будем изучать.

7. Возражение против фундаментальности силы Лоренца. При силовой интерпретации электромагнитного поля (как напряжённости поля), процесс передачи энергии от поля к заряженной частице происходит посредством силы Лоренца. Обратный же процесс передачи энергии от частицы к полю происходит посредством излучения. Это не симметричные во времени процессы. В то же время электродинамика инвариантна относительно инверсии времени. Возникшее противоречие требует выбрать в качестве фундаментального процесса либо силу Лоренца, либо излучение, с тем, чтобы затем второй из них свести к первому.

Изменение энергии под действием силы Лоренца лишь относительно, так как масса частицы должна быть неизменна. Это следует из самого определение понятия силы Лоренца через принцип наименьшего действия, которое противоречит изменению массы (см. ниже главу о силе Лоренца). Абсолютный смысл изменению энергии частицы можно придать только если изменяется её масса. Этому не противоречит обмен энергией с помощью излучения. Кроме того логически возможен процесс обратный во времени излучению – антиизлучение (поглощение). Эти прцессы и следует считать фундаментальными процессами обмена энергией между полем и заряженными частицами. Силу же Лоренца необходимо объяснить сведением её к излучению-поглощению.

8. Об электродинамических квантах. Чтобы облегчить понимание дальнейшего развития теории, мы несколько забежим вперёд, разъясняя план теории. (Хотя может быть этот пункт и не стоит читать.) Далее станет ясно, что **при постоянном заряде** (без учёта микропульсаций зарда) процесс излучения (и поглощения) совершенно автономен, то есть не зависит от присутствия других полей, кроме **собственного поля** излучения (поглощения) протистона. Иными словами собственное поле протистона и сам протистон составляют замкнутую механическую систему, развивающуюся по внутренним причинам. Уравнение движения этой системы оказывается достаточно простым и определяет кривую мировую линию движения протистона – **автоиду**. Оба конца этой линии асимптотически приближаются к прямым, а в некоторой промежуточной точке (**сгоне**) эта линия испытывает максимальное искривление, оставаясь на всём протяжении в одной плоскости.

Излучение нарастает при приближении к сгону. Пройдя сгон, излучение

сменяется на поглощение, которое далее убывает. Масса точечного заряда не может быть определена непротиворечиво иначе, чем геометрический инвариант мировой линии, пропорциональный отношению ускорения ускорения к ускорению в данной точке. При этом масса на сгоне автоиды оказывается равной нулю (здесь нулевое ускорение ускорения), а при удалении от неё быстро стремится к постоянной величине m_m. (Хотя здесь как ускорение так и ускорение ускорения становятся очень малыми, но отношение второго к первому почти постоянно). Суммарная энергия системы протистон – собственное поле, как замкнутой системы, конечно сохраняется. При этом задолго до сгона суммируется энергия протистона с энергией поля поглощения (поля излучения ещё почти нет), а далеко после сгона суммируется энергия протистона с энергией поля излучения (поля поглощения уже почти нет).

В силу очень малых значений скорости изменения массы вдали от сгона, решение уравнения массы здесь не устойчиво по отношению к возмущениям массы. Если возмущение массы превышает некоторый порог, то знак производной массы по времени может смениться в некоторый момент времени (**стык**) на противоположный и процесс изменения массы может пойти в противоположную сторону – к новому сгону. При регулярно действующем возмущении (микропульсациях заряда) процесс становится циклическим. При этом на стыках (на которых гладкость линии не нарушается) оказывается возможным изменение плоскости автоиды (так называемая **лабильность стыков**). Для массы протистона существует только одно возмущение – это космологически малые пульсации заряда, квадрату которого пропорциональна масса. Эти пульсации приводят к осцилляциям мировой линии с определённым интервалом (**шагом**) между соседними стыками. Шаг разделён сгоном на два **полушага** одинаковой формы, но, вообще говоря, с разными значениями масштабного параметра β. Причём пульсации заряда не определяют взаимную ориентацию плоскостей соседних шагов. Поэтому лабильности каждого стыка соответствует одна степень свободы (одна механическая обобщённая координата).

Все полушаги имеют одинаковую форму. Каждый шаг весь лежит в одной плоскости. Концам (стыкам) соответствует максимальная на полушаге масса m_m. Отрезки мировой линии, начало и конец которых совпадает с соседними сгонами, будем называть **звеньями** мировой линии протистона. Особенность звеньев в том, что на их концах масса протистона равна нулю. Но звенья могут иметь разную форму. Половинки звеньев (**полушаги**) могут лежать в разных плоскостях под разными углами. Каждый сгон мировой линии излучает и поглощает стандартные волны радиации (**квиз** и **квап**). Каждое звено (но не шаги) вместе со своими квапом и квизом является замкнутой механической системой (электродинамическим квантом). Но такие кванты вынуждены соединяться последовательно друг с другом в силу закона сохранения заряда, то есть будучи механически замкнутыми, они не замкнуты по 4-току.

Таким образом мировая линия протистона представляет собой цепь гладко состыкованных жёстких одинаковых **кривых** полушагов г-образной формы,

спаренных в шаги, произвольно ориентированные друг относительно друга. Масса протистона от шага к шагу изменяется регулярно и мировая линия может характеризоваться статистически осреднённым значением массы. Чем длинее отрезок мировой линии протистона, тем больше у него стыков, а значит – тем больше у него степеней свободы. При осреднении по достаточно большим отрезкам, мировая линия может принимать практически любую форму (с определёнными ограничениями по кривизне; она практически свободна в пределе малой кривизны). При таком осреднённом (статистическом) подходе, применение принципа наименьшего действия к мировой линии протистона, помещённой во внешнее электромагнитное поле, приводит к понятию силы Лоренца. Это возможно только благодаря осреднению по массе, так как понятие силы Лоренца, как мы покажем позже, с необходимостью требует постоянства массы точечного заряда. Таким образом, только статистический подход наделяет электромагнитное поле силовыми свойствами. То есть имеет место некоторая **нелокальность силы Лоренца**. В пределах, допускаемых множеством степеней свободы мировой линии, протистон реагирует на внешнее поле, ускоряясь в нём под действием силы Лоренца, однако жёсткость шагов мировой линии накладывает ограничение сверху на частоту внешнего поля, на которое он реагирует. Такое ограничение подтверждается опытом и объясняется квантовой механикой. В классической электродинамике это не объяснялось.

Каждое звено мировой линии протистона можно рассматривать как элементарный преобразователь почти-сферической волны (**квапа**), сходящейся на протистоне, в почти-сферическую волну (**квиз**), расходящуюся от протистона. При этом происходит задержка переизлучения и (вообще говоря) изменение импульса волны. Суммарный же 4-импульс звена и волны сохраняется. С механической точки зрения звено (в отличие от шага) не связано с соседним звеном, так как масса концов звеньев нулевая. Но оно связано в единую цепь с другими звеньями законом неразрывности 4-тока (сохранением заряда).

По воздействию квапа и квиза на звено (в смысле изменения его формы) существенны не сами значения 4-импульсов квапа $\left(P_1^\mu\right)$ и квиза $\left(P_2^\mu\right)$, а их разность $P^\mu = P_2^\mu - P_1^\mu$, которую мы будем называть **квантом импульса**. Так как концы звена могут ориентироваться параллельно, то минимальная величина $|P^\mu|$ может быть нулевая, а максимальная (как мы найдём позже) равна $m_{max} \cdot \operatorname{ch} \pi$

$$0 \leqslant |P^\mu| \leqslant m_{\max} \cdot \operatorname{ch} \pi.$$

Квапы и квизы являются частью единого электромагнитного поля и заранее их практически не возможно выделить, пока они не провзаимодействуют со своим звеном.

§3. 4-импульс излучаемого поля.

1. Активное приращение 4-импульса излучаемого поля. Рассмотрим электромагнитное поле произвольно движущегося протистона в момент времени t в инерциальной системе отсчёта, в которой в предшествующий момент времени t' скорость протистона $\mathbf{v}$ была равна нулю (**мгновенно сопутствующая инерциальная система**).

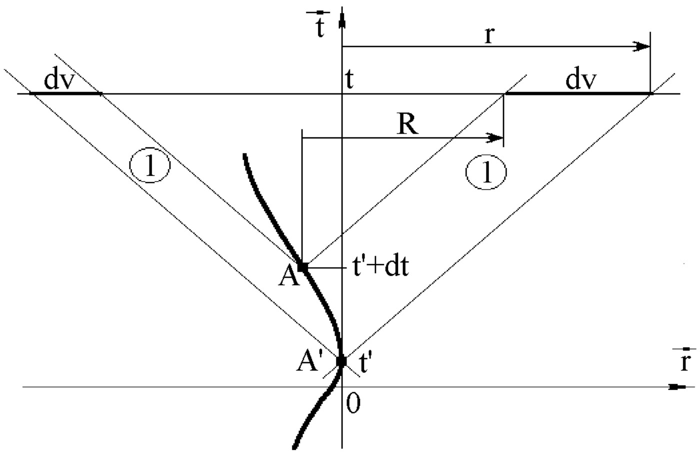


Рис. 112.6.

Пусть время $t - t'$ достаточно большое. Тогда поле в трёхмерной области dv, заключённой между изотропными конусами точек A' и A является радиационным полем, вызванным собственным потенциалом протистона за время dt. Эту часть поля назовём **излучённой волной** за время dt. 4-импульс этой волны сохраняется, то есть он один и тот же независимо от выбора момента времени t, если выбрать t достаточно большим, чтобы к полю волны не примешивалось ближнее поле протистона, зависящее от расстояния как $\sim \frac{1}{R^2}$ (в мгновенно сопутствующей инерциальной системе). Таким образом 4-область ① это область распространения волны, излучённой протистоном за время dt.

С точностью до бесконечно малых $R = r$.

Учитывая, что в выбранной системе отсчёта скорость протистона $\mathbf{v}$ за время dt равна нулю с точностью до бесконечно малой порядка dt ($dv = \dot{v}\,dt$), имеем поле (2.1.1) в области dv:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^3}\,[\mathbf{R}[\mathbf{Ra}]], \tag{1}$$

$$\mathbf{E}^2 = \frac{q^2}{R^6}\,[\mathbf{R}[\mathbf{Ra}]]^2 = \frac{q^2}{R^6}\,R^2[\mathbf{Ra}]^2\sin^2(\pi/2) =$$

$$= \frac{q^2}{R^4}\,[\mathbf{Ra}]^2 = \frac{q^2}{R^4}\,R^2a^2\sin^2(\mathbf{R}\hat{\ }\mathbf{a}) = \frac{q^2}{R^2}\,a^2\sin^2(\mathbf{R}\hat{\ }\mathbf{a}),$$

в силу однонаправленности $\mathbf{S}$,$\mathbf{R}$ и условий $E = H$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$, имеем

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,q^2a^2\sin^2(\mathbf{R}\hat{\ }\dot{\mathbf{v}}).$$

Направим ось z системы отсчёта вдоль $\mathbf{a}$, тогда в сферических координатах

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{R}}{4\pi R^3}\ q^2 a^2 \sin^2\vartheta.$$

Энергию электромагнитного поля $d\mathcal{E}_e$, излучённую за время dt, получим интегрированием $W = |\mathbf{S}|$ (11.7.4.4) по области dv. Так как эта область заключена между двумя сферами неконцентрическими на бесконечно малую величину порядка большего, чем расстояние между сферами, то эту область можно считать сферическим слоем толщиной $dR = dt$. Поэтому

$$d\mathcal{E}_e = dt \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathbf{S}|\ R^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta = \frac{dt}{4\pi}\ q^2 a^2 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta.$$

Интегрируя по φ, получим

$$d\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\ dt\ q^2 a^2\ J,$$

где

$$J = \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta\ d\vartheta = \quad [\text{Прудников, 1.5.2.9, с. 170}]$$

$$= \frac{1}{3}\ \cos^3\vartheta - \cos\vartheta\ |_0^{\pi} = -\frac{1}{3} - (-1) - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Таким образом

$$d\mathcal{E}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = dP^0_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = \frac{2}{3}\ q^2 a^2\ dt. \tag{2}$$

Импульс электромагнитного поля излучения $d\mathbf{P}_e$ получим аналогично, интегрируя вместо $|\mathbf{S}|$ вектор $\mathbf{S}$:

$$d\mathbf{P}_e = \frac{dt}{4\pi}\ q^2 a^2 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathbf{R}}{R} \sin^3\ d\varphi\ d\vartheta.$$

В силу симметрии подинтегрального векторного поля относительно оси $\vec{z}$, отличен от нуля лишь интеграл от проекции этого поля на ось $\vec{z}$, поэтому

$$d\mathbf{P}_e = \frac{dt}{4\pi}\ q^2 a^2 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathbf{R}_z}{R} \sin^3\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \frac{dt}{2}\ q^2 a^2 \int\limits_0^{\pi} \mathbf{e_z} \frac{R\cos\vartheta}{R} \sin^3\vartheta\ d\vartheta = \frac{dt}{2}\ q^2 a^2 \mathbf{e}_z J,$$

где

$$J = \int\limits_0^{\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\ d\vartheta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta\ d\vartheta = 0.$$

Таким образом в силу симметрии поля

$$d\mathbf{P}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = 0. \tag{3}$$

Компоненты (2) и (3), очевидно, образуют времени-подобный 4-вектор приращения 4-импульса, что согласно (9.6.5.10) означает, что это **активное приращение 4-импульса излучаемого поля**. Взятое с обратным знаком, оно равно **активной реакции поля, действующей на протистон**. Так как излучённое за время dt поле не является плоской волной, то оно может иметь массу (11.4.2.12). Поскольку 3-пространственный центр симметрии этого поля совпадает с точностью до бесконечно малых 2-го порядка с точкой A', то оно имеет массу, совпадающую с его энергией покоя (2)

$$dm_e = d\mathcal{E}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = \frac{2}{3}\ q^2 a^2\ dt. \tag{4}$$

Наличие у поля массы влечёт наличие **пассивного приращения 4-импульса поля** при ускорении протистона (9.6.5.10).

2. Полная интенсивность излучения. Таким образом, мы видим, что излучаемая протистоном волна, уносит за время dt в мгновенно сопутствующей инерциальной системе координат энергию

$$d\mathcal{E}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = \frac{2}{3} q^2 \mathbf{a}^2 dt \tag{1}$$

и импульс

$$d\mathbf{P}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = 0. \tag{2}$$

Эти выражения можно записать в объединённой 4-х-мерной форме:

$$\frac{dP_e^\mu}{ds} = -\frac{2}{3} q^2 w_\nu w^\nu\ u^\mu, \tag{3}$$

которая согласно (9.6.3.3) переходит в (1) и (2) при $v = 0$. Отсюда, в частности, имеем (при $\mu = 0$)

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{ds} = -\frac{2}{3} q^2 w_\nu w^\nu\ u^0, \tag{4}$$

или

$$I_e = \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -\frac{2}{3} q^2 w_\nu w^\nu, \tag{5}$$

где величина I_e, называемая **полной интенсивностью излучения**, является инвариантом. Тогда

$$\frac{dP_e^\mu}{ds} = I_e u^\mu \tag{6}$$

Вообще говоря, **интенсивность электромагнитной волны** определяется энергией, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны [Яворский,

с.568]. То есть интенсивность волны, вообще говоря, не инвариант. Инвариантом (5) она становится лишь при интегрировании по всевозможным направлениям.

3. Излучение и поглощение. Так как всякое выражение, инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца, инвариантно и по отношению к **4-инверсии** (инверсии всех 4-х координат) [Ландау 4, с. 58], то из существования некоторого процесса следует существование процесса, идущего в обратном направлении.

В частности, для процесса **излучения** существует обратный процесс – **поглощение**. Хотя процесс поглощения можно рассмотреть аналогично излучению, используя вместо запаздывающих потенциалов опережающие, но проще воспользоваться формулами для излучения, инвертировав в них знаки при всех координатах.

Заметим, что так как знак элемента интервала ds связан со знаком dt

$$ds = \sqrt{1 - v^2}\, dt,$$

то при инверсии знака времени нужно инвертировать знак как dt так и ds.

Излучение является частным случаем **радиации** электромагнитных волн, под которой мы понимаем такое их движение, когда поле вектора плотности потока энергии $\mathbf{S}$ имеет точечный источник или сток. В четырёхмерном пространстве сток или исток является мировой линией. В случае стока радиацию будем называть также **поглощением** волн.

В случае радиации волн протистоном их сток или исток есть мировая линия протистона. Различные отрезки мировой линии могут быть как стоками так и истоками в зависимости от направления радиации в данный момент.

Термин **фокус радиации** будем применять как общее название стока и истока.

В зависимости от контекста под **радиацией** мы будем понимать не только определённый выше процесс движения волн, но и сами эти волны.

Выражение (2.5) для интенсивности излучения

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -\frac{2}{3} q^2 w_\mu w^\mu \tag{1}$$

($\mathcal{E}_e > 0$) распишем в координатах:

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -\frac{2}{3} q^2 \frac{d^2 x^\mu}{(ds)^2} \frac{d^2 x_\mu}{(ds)^2}.$$

Так как в 4-инверсии имеют место преобразования:

$$x^\mu \to -x^\mu, \quad ds \to -ds,$$

то знак левой части выражения (1) в такой инверсии изменяется на противоположный, и излучение изменяется на противоположный во времени процесс – поглощение.

То есть обобщённую формулу для интенсивности излучения-поглощения (**интенсивности радиации**) (2.5) нужно записать в виде:

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = I_e = -i_r \frac{2}{3} q^2 w_\mu w^\mu, \tag{2}$$

где

$$i_r = \left\{ \begin{array}{ll} +1\ , & \textit{при излучении} \\ -1\ , & \textit{при поглощении} \end{array} \right\}, \tag{3}$$

$$d\mathcal{E}_{e|v=0} = i_r \frac{2}{3} q^2 \mathbf{a}^2 dt. \tag{4}$$

Отсюда очевидна **несовместимость излучения и поглощения протистоном**, так как энергия поля $\mathcal{E}_e$ не может одновременно убывать и возрастать. То есть если излучение и поглощение происходят, то в разное время.

Ускоренный протистон обязательно либо излучает, либо поглощает, то есть совершает обменную активность (**радиацию**).

Таким образом, протистон может находится только в двух **состояниях радиации** (излучение или поглощение), которые мы обозначаем **указателем радиации** $i_r = \pm 1$.

Из (2) следует

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right| = -\frac{2}{3} q^2 w_\mu w^\mu. \tag{5}$$

4. Принципиальное отличие излучения от поглощения. Казалось бы, что излучение волн с положительной энергией эквивалентно поглощению волн с отрицательной энергией, так как в обоих случаях энергия источника уменьшается. Однако, это не верно, так как излучение предполагает расходящиеся сферические волны, а поглощение – сходящиеся. Только инверсия временно́й оси может превратить излучение в поглощение.

5. Компоненты реакции радиации. По 3-му закону Ньютона, радиация создаёт **реакцию** (9.6.5.7)

$$F_a^\mu = -\frac{dP_e^\mu}{ds}, \tag{1}$$

действующую на протистон. В мгновенно сопутствующей системе отсчёта эта сила реакции времениподобна ($d\mathbf{P}_{e|v=0} = 0$), то есть такая реакция сводится лишь к изменению массы протистона, но не скорости. Если протистон имеет ускорение, то кроме этой времениподобной реакции радиации существует пространственноподобная реакция (9.6.5.6)

$$F_p^\mu = m w^\mu, \tag{2}$$

изменяющая лишь скорость, но не массу протистона. Согласно гл. 11, §4, §5, любые силы, действующие на протистон, сводятся только к реакции радиации. Ускорение

же материальной точки возможно только под действием пространственноподобной компоненты 4-силы. Ниже мы покажем необходимость **самоускорения протистона**.

Точкой приложения силы F_p^μ по отношению к протистону является его точечный заряд. В момент t' это точка A' на мировой линии протистона (рис. 11.6). По отношению же к сопутствующему полю, одной такой точки приложения силы $-F_p^\mu$, действующей в момент t' на поле, указать нельзя. Относительно поля (распространяющегося с предельной скоростью) все точки изотропного конуса с вершиной в точке A' изотропны событию A' (между ними и точкой A' интервал равен 0). Поэтому действие реакции излучения на поле можно отнести сразу ко всем точкам изотропного конуса точки A'.

Таким образом, полная реакция радиации F_r^μ состоит из двух частей (9.6.5.5)

$$F_r^\mu = F_a^\mu + F_p^\mu, \tag{3}$$

где F_a^μ – временіподобная (**активная**) реакция радиации,

F_p^μ – пространственноподобная (**пассивная**) реакция радиации.

6. Поле радиации во Вселенной и Антивселенной. Так как заряды находятся только внутри изотропного конуса Начала, то из Вселенной поле излучения выйти не может, а поле поглощения – может. Для Антивселенной, наоборот.

§4. Масса точечного заряда и реакция радиации.

1. Связь ускорения точечного заряда с его массой. Пусть протистон (или вообще точечный заряд произвольной массы m) движется в мгновенно сопутствующей системе отсчёта с ускорением $\mathbf{a}$ (по любой причине). Тогда изменение его 4-импульса, с учётом радиационного обмена энергией (3.3.4) и ускорения, примет вид

$$\frac{dP^\mu}{ds}\Big|_{\mathbf{v}=0} = \frac{dP^\mu}{dt} = \left(-\frac{d\mathcal{E}_e}{dt}, m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \left(-i_r\frac{2}{3}\ q^2\ \mathbf{a}^2,\ m\mathbf{a}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}q^2 b^\mu\Big|_{\mathbf{v}=0}, \tag{1}$$

где

$$b^\mu\Big|_{\mathbf{v}=0} = (-i_r\mathbf{a}^2, \mathbf{b}), \tag{2}$$

$$\mathbf{b} = \frac{3m\mathbf{a}}{2q^2}. \tag{3}$$

Посмотрим – к каким следствиям приводит одно лишь необходимое требование ковариантности 4-вектора силы dP^μ/ds (а значит и b^μ) в преобразованиях Лоренца.

Компоненты 4-вектора нельзя рассматривать отдельно друг от друга, так как в преобразованиях Лоренца они **переходят друг в друга** (перевычисляются друг через друга).

Поскольку масса m задана произвольно, то вектор $\mathbf{b}$ задан только направлением, совпадающим с направлением ускорения $\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} = \frac{b}{a}\mathbf{a} = \mu_q \mathbf{a}, \tag{4}$$

где μ_q – произвольный скаляр

$$\mu_q = \frac{b}{a} = \frac{3m}{2q^2}. \tag{5}$$

Тогда

$$b^\mu_{\big|_{\mathbf{v}=0}} = (-i_r \mathbf{a}^2,\ \mu_q \mathbf{a}), \tag{6}$$

то есть 4-вектор b^μ задан только ускорением $\mathbf{a}$. Из механики материальной точки известны лишь два 4-вектора подходящего (по временно́й компоненте) вида

$$\frac{dw^\mu}{ds}_{\big|_{\mathbf{v}=0}} = \left(\mathbf{a}^2,\ \frac{d\mathbf{a}}{dt}\right) \tag{7}$$

и

$$u^\mu\ w_\nu w^\nu_{\big|_{\mathbf{v}=0}} = (-\mathbf{a}^2,\ 0). \tag{8}$$

(Они раскрыты в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчёта.)

Линейная комбинация с произвольными коэффициентами (c_m и c_n) этих двух 4-векторов

$$b^\mu = c_m \frac{dw^\mu}{ds} + c_n u^\mu\, w_\nu w^\nu \tag{9}$$

может быть согласована с (6) подходящим выбором этих постоянных коэффициентов, а также скаляра μ_q и подходящей связи между ускорением $\mathbf{a}$ и его производной $d\mathbf{a}/dt$. Из (9) при $v = 0$, подставляя (7) и (8), получим

$$b^\mu_{\big|_{\mathbf{v}=0}} = \left((c_m - c_n)\mathbf{a}^2,\ c_m \frac{d\mathbf{a}}{dt}\right). \tag{10}$$

Сравнивая с (6), имеем

$$c_n = c_m + i_r, \tag{11}$$

$$c_m \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mu_q \mathbf{a} = \frac{3m}{2q^2}\mathbf{a}. \tag{12}$$

2. Геометризация массы точечного заряда. Легко проверить, что релятивистским обобщением последнего уравнения является 4-х-мерное уравнение

$$c_m \frac{dw^\mu}{ds} = \frac{3m}{2q^2} w^\mu - c_m u^\mu\, w_\nu w^\nu. \tag{1}$$

Здесь член $-c_m u^\mu\, w_\nu w^\nu$ необходим, так как иначе следует (после умножения на u_μ), что

$$u_\mu \frac{dw^\mu}{ds} = 0,$$

но это влечёт отсутствие квадрата 4-ускорения, так как из тождества $u_\mu w^\mu \equiv 0$ следует

$$\frac{du_\mu w^\mu}{ds} = u_\mu \frac{dw^\mu}{ds} + w_\mu w^\mu = 0, \quad u_\mu \frac{dw^\mu}{ds} = -w_\mu w^\mu = 0. \tag{2}$$

Из (1) получаем, умножая на w_μ

$$m = c_m \frac{2}{3} q^2 \frac{w_\mu\, dw^\mu/ds}{w_\nu w^\nu}. \tag{3}$$

Масса, очевидно, имеет размерность квадрата заряда, делённого на время. Она зависит от s (**массовая функция**).

Используя (1.9) и (1.11), выражение (1.1) можно записать в виде

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = m\ w^\mu + u^\mu\ \frac{dm}{ds} = \frac{2}{3} q^2 \left(c_m\ \frac{dw^\mu}{ds} + (c_m + i_r)\ u^\mu\ w_\nu w^\nu \right). \tag{4}$$

Умножая на w_μ и учитывая, что $w_\mu u^\mu = 0$, получим опять выражение для массы (3).

Таким образом, масса любого точечного заряда выражается через геометрический инвариант $w_\mu w^\mu$ его мировой линии. Это свойство **массы точечного заряда** мы будем называть её **геометризацией**. **Коэффициент** $\frac{2}{3} q^2 c_m$ **определяет лишь связь единиц измерения массы и заряда**. Поэтому число c_m назовём **массовым множителем**.

Ускорение точечного заряда и его ускорение ускорения может быть охарактеризовано массой (то есть некоторой энергией покоя) и поэтому, как и энергия, не может изменяться мгновенно (обладает инерцией).

Выражение для массы можно записать в следующих видах

$$m = \frac{1}{3} q^2 c_m\ \frac{d(w_\mu w^\mu)/ds}{w_\nu w^\nu} = \frac{1}{3} q^2 c_m\ \frac{d(-w_\mu w^\mu)/ds}{-w_\nu w^\nu} =$$

$$= \frac{1}{3} q^2 c_m \frac{d}{ds} \ln(-w_\mu w^\mu) =$$

$$= \frac{1}{3} q^2 c_m\ \frac{d|w_\mu w^\mu|/ds}{|w_\nu w^\nu|} = \frac{1}{3} q^2 c_m\ \frac{d}{ds} \ln|w_\mu w^\mu| =$$

$$= \frac{2}{3} q^2 c_m\ \frac{d}{ds} \ln\sqrt{|w_\mu w^\mu|} = \frac{2}{3} q^2 c_m\ \frac{d||w^\mu||/ds}{||w^\mu||} =$$

$$= \frac{2}{3} q^2 c_m\ \frac{d}{ds} \ln\sqrt{-w_\mu w^\mu}. \tag{5}$$

Используя (2), формулу (4) можно записать также в виде

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2\left(c_m\ \frac{dw^\mu}{ds} - (c_m + i_r)\ u^\mu u_\nu\ \frac{dw^\nu}{ds}\right). \tag{6}$$

3. Скорость изменения массы протистона и другие формулы. Умножая (2.4) на u_μ, имеем

$$u_\mu\ \frac{dP^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2\left(c_m\ u_\mu\ \frac{dw^\mu}{ds} + (c_m + i_r)\ w_\nu w^\nu\right) = \frac{dm}{ds}. \tag{1}$$

Так как

$$\frac{d}{ds}(u_\mu w^\mu) = 0 = u_\mu\ \frac{dw^\mu}{ds} + w_\mu w^\mu, \tag{2}$$

то

$$u_\mu\ \frac{dP^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2(-c_m\ w_\nu w^\nu + (c_m + i_r)\ w_\nu w^\nu) = i_r\frac{2}{3}q^2\ w_\nu w^\nu =$$

$$= \frac{dm}{ds} = -i_r\frac{2}{3}q^2 u_\mu\frac{dw^\mu}{ds}. \tag{3}$$

Отсюда и из (3.3.2.) видно, что

$$\frac{dm}{ds} = -\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -\frac{dP_e^0}{dt} = -I_e. \tag{4}$$

Так как $w^\nu w_\nu < 0$ (4-ускорение пространственноподобно), то

$$i_r\frac{dm}{ds} < 0, \tag{5}$$

то есть **масса протистона при излучении убывает**, **при поглощении – возрастает** (при этом она не обязательно должна быть положительной).

Подставляя из (3) $dm/ds = i_r(2/3)q^2\,w_\nu w^\nu$ в (2.4), имеем

$$mw^\mu = \frac{2}{3}q^2 c_m\left(\frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu\ w_\nu w^\nu\right) = (\text{с учётом (2)}) \tag{6}$$

$$= \frac{2}{3}q^2 c_m\left(\frac{dw^\mu}{ds} - u^\mu u^\nu\ \frac{dw_\nu}{ds}\right). \tag{7}$$

Отсюда

$$\frac{2}{3}q^2 c_m\frac{dw^\mu}{ds} = mw^\mu - \frac{2}{3}q^2 c_m u^\mu\ w_\nu w^\nu.$$

Используя из (3) выражение $w^\nu w_\nu$ через dm/ds, можно записать (2.4) в виде

$$\frac{dP^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2 c_m\frac{dw^\mu}{ds} + (c_m + i_r)u^\mu\frac{dm}{ds} = (\text{с учётом предыдущего})$$

$$= mw^\mu - \frac{2}{3}q^2 c_m u^\mu\, w_\nu w^\nu + (c_m + i_r)u^\mu \frac{dm}{ds}. \tag{8}$$

Заметим, что в отсутствие 4-силы

$$\frac{dw^\mu}{ds} = -\frac{3}{2q^2 c_m}(c_m + i_r)u^\mu \frac{dm}{ds} \qquad \left(\frac{dP^\mu}{ds} = 0\right). \tag{9}$$

4. Сила F^μ, действующая на протистон, как реакция радиации. Выражение силы F^μ в виде (2.4)

$$F^\mu = \frac{2}{3}q^2 \left(c_m \frac{dw^\mu}{ds} + (c_m + i_r)u^\mu\, w_\nu w^\nu\right) \tag{1}$$

согласно (2.3) и (3.3) равно её выражению в виде

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = mw^\mu + u^\mu \frac{dm}{ds} = mw^\mu + i_r \frac{2}{3}q^2 u^\mu\, w_\nu w^\nu =$$

$$= c_m \frac{2}{3}q^2 w^\mu \frac{w_\nu\, dw^\nu/ds}{w_\nu w^\nu} + i_r \frac{2}{3}q^2 u^\mu\, w_\nu w^\nu. \tag{2}$$

Приравнивая (2) к (1), получаем уравнение

$$w^\mu \frac{w_\nu\, dw^\nu/ds}{w_\nu w^\nu} = \frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu\, w_\nu w^\nu. \tag{3}$$

То есть имеем нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно u^μ.

Таким образом, сила F^μ определяется (через u^μ) решением уравнения (3), то есть только внутренними причинами по отношению к протистону и его полю радиации. Поэтому сила F^μ не может быть ничем иным, кроме как **силой F_r^μ реакции радиации**, действующей на протистон

$$F^\mu = F_r^\mu. \tag{4}$$

Этот 4-вектор силы отличается от выведенного в [Ландау 2, (76.2)], так как мы не накладывали условия $F^\mu u_\mu = 0$ (как у [Ландау]), которое является следствием постоянства массы, так как $F^\mu u_\mu = \frac{dm}{ds}$ (3.1).

Выражение (1) для силы F^μ можно переписать в виде

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = i_r \frac{2}{3}q^2 u^\mu\, w_\nu w^\nu + \frac{2}{3}c_m q^2 \left(\frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu\, w_\nu w^\nu\right) =$$

$$= F_a^\mu + F_p^\mu, \tag{5}$$

где

$$F_a^\mu = -\frac{dP_e^\mu}{ds} = i_r \frac{2}{3}q^2 u^\mu\, w_\nu w^\nu, \tag{6}$$

$$F_p^\mu = \frac{2}{3} c_m q^2 \left(\frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu \, w_\nu w^\nu \right). \tag{7}$$

4-силы F_a^μ и F_p^μ отличаются друг от друга тем, что в мгновенно сопутствующей системе координат 4-сила F_a^μ имеет только временну́ю компоненту (пространственная равна 0), а 4-сила F_p^μ – только пространственную компоненту (временна́я равна 0). Действительно,

$$F^\mu_{a|v=0} = -i_r \frac{2}{3} q^2 (a^2, \ 0) = (\mathbf{F}_a, \ 0), \tag{8}$$

$$F^\mu_{p|v=0} = c_m \frac{2}{3} q^2 (0, \ \frac{d\mathbf{a}}{dt}) = (0, \ \mathbf{F}_p), \tag{9}$$

(см. (1.7),(1.8)).
То есть сила F_a^μ является **времениподобной реакцией радиации**, а F_p^μ – **пространственноподобной реакцией радиации**.

Активность (9.6.6.8) 4-силы F_p^μ

$$u_\mu F_p^\mu = c_m \frac{2}{3} q^2 \left(u_\mu \frac{dw^\mu}{ds} + w_\nu w^\nu \right) = 0. \tag{10}$$

В связи с этим, 4-силу F_p^μ также назовём **пассивной 4-реакцией радиации**, а 3-силу $\mathbf{F}_p$ – **пассивной реакцией радиации**. Тогда активность 4-силы F_a^μ равна активности силы F^μ, которая равна активности dm/ds (9.6.6.8) или интенсивности I_e радиации (3.3.2)

$$u_\mu F_a^\mu = \frac{dm}{ds} = I_e. \tag{11}$$

4-силу F_a^μ назовём также **активной 4-реакцией радиации**, а её временну́ю компоненту $\mathbf{F}_a$ – **активной реакцией радиации**.

Наличие реакции радиации приводит к явлению **самоускорения протистона**, что делает протистон **самодостаточным** во взаимодействии с полем.

5. Изменение энергии поля при радиации. Радиация является единственной частью электромагнитного поля, которая обменивается 4-импульсом с протистоном. А понятие силы Лоренца к истинно точечному заряду не применимо, так как его масса принципиально не постоянна, понятие же силы Лоренца применимо лишь при постоянной массе заряда. Ниже понятие силы Лоренца мы сведём к статистическому понятию реакции радиации и рассмотрим условия его применимости.

Так как реакция радиации является единственной силой, действующей на протистон, то, согласно закону сохранения энергии, изменение **энергии поля** $d\mathcal{E}_f$ за счёт радиации, с учётом пассивной реакции, должно быть равно, с противоположным знаком, изменению энергии протистона dP^0

$$\frac{d\mathcal{E}_f}{dt} = -\frac{dP^0}{dt} = -u^0 \frac{dm}{dt} - m \frac{du^0}{dt} = -\frac{dm}{ds} - \frac{m}{u^0} w^0 =$$

$$(3.4) \quad = \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} - \frac{m}{u^0}w^0 = I_e - \frac{m}{u^0}w^0. \tag{1}$$

Очевидно, что, в отличие от I_e, величина $d\mathcal{E}_f/dt$ не является инвариантом. Инвариантом является лишь сумма

$$\frac{d\mathcal{E}_f}{dt} + \frac{m}{u^0}w^0 = -\frac{dm}{ds} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = I_e. \tag{2}$$

6. Важность ускорения ускорения для активной реакции радиации. Из (2.4) реакция радиации равна

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2\left(c_m\frac{dw^\mu}{ds} + (c_m + i_r)u^\mu\, w_\nu w^\nu\right). \tag{1}$$

Согласно (3.3) активность этой силы определяется квадратом 4-ускорения

$$\frac{dm}{ds} = i_r\frac{2}{3}q^2\, w_\mu w^\mu. \tag{2}$$

Пусть мировая линия заряда произвольна, то есть произвольна его 4-скорость u^μ. Согласно (9.6.6.7) и (2)

$$u_\mu F^\mu = \frac{dm}{ds} = i_r\frac{2}{3}q^2\, w_\mu w^\mu. \tag{3}$$

Интегрируя по частям по произвольному промежутку мировой линии (s_0, s_1) и учитывая, что $u_\mu w^\mu = 0$, имеем с учётом (3.2)

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} u_\mu F^\mu\, ds = i_r\frac{2}{3}q^2\, u_\mu w^\mu|_{s_0}^{s_1} - i_r\frac{2}{3}q^2\int\limits_{s_0}^{s_1} u_\mu\frac{dw^\mu}{ds}\, ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} u_\mu\left(-i_r\frac{2}{3}q^2\frac{dw^\mu}{ds}\right)ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} u_\mu\left(-i_r\frac{2}{3}q^2\frac{dw^\mu}{ds} + f^\mu\right)ds, \tag{4}$$

где f^μ – произвольный 4-вектор, ортогональный к u_μ, то есть

$$f^\mu u_\mu = 0. \tag{5}$$

4-вектор f^μ введён для общности.

Тогда из (4), в силу произвольности u_μ, необходимо

$$F^\mu = -i_r\frac{2}{3}q^2\frac{dw^\mu}{ds} + f^\mu. \tag{6}$$

Это неоднозначное выражение для силы F^μ согласуется с (1) при

$$f^\mu = F^\mu + i_r\frac{2}{3}q^2\frac{dw^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2(c_m + i_r)\left(\frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu\, w_\nu w^\nu\right), \tag{7}$$

что ограничивает произвол в выборе 4-вектора f^μ.

Умножая на u_μ, имеем

$$f^\mu u_\mu = \frac{2}{3}q^2(c_m + i_r)\left(u_\mu \frac{dw^\mu}{ds} + w_\nu w^\nu\right) = 0,$$

так как выражение в последних скобках тождественно равно 0 (2.2). То есть условие (5) выполняется.

Согласно (5) компонента f^μ в выражении (6) является пассивной 4-реакцией радиации, но это не означает, что активной реакцией радиации является компонента $-i_r \frac{2}{3}q^2 \frac{dw^\mu}{ds}$, так как согласно (4.7) эта компонента сама содержит некоторую пассивную часть. Однако выражение (6) показывает, что главную роль в формировании активной реакции радиации играет 4-ускорение ускорения dw^μ/ds.

7. Замкнутость системы протистон – радиация. В этой теории не существует никаких взаимодействий протистона, кроме электромагнитного. Причём даже не существует ещё понятия силы Лоренца. Поэтому любые взаимодействия должны сводиться к обмену энергией протистона с электромагнитным полем, то есть к единственному существующему в этой теории процессу такого рода – радиации. Поэтому протистон и его радиация должны составлять замкнутую механическую систему, ускорение протистона в которой происходит по внутренним причинам, то есть необходимо **самоускорение протистона** только за счёт реакции радиации. Заметим, что синтетический подход к сопутствующему полю протистона допускает кривую форму мировой линии протистона в рамках законов сохранения.

Взаимодействие протистона и поля заключается в обмене их 4-импульсом. Скорость этого обмена является силой взаимной реакции. Интенсивность радиации является временнóй компонентой реакции радиации при ускорении протистона. Но так как ускорение протистона может происходить только под действием пространственной компоненты силы, то должна существовать пространственная компонента 4-силы реакции радиации.

8. Возможность положительного определения массы и энергии протистона. Так как знак заряда протистона определяется знаком ε_q (8.5.3.2), который совпадает со знаком частоты ω (6.1.2.3), определяемым направлением волнового вектора относительно оси времени,

$$\frac{q}{|q|} = \varepsilon = \frac{\omega}{|\omega|} \tag{1}$$

то изменение знака заряда протистона, эквивалентно изменению (инверсии) направления процесса радиации, что, в свою очередь, эквивалентно изменению знака массы (и энергии) протистона. Поэтому в отношении взаимодействия с электромагнитным полем (энергия которого всегда положительна), протистон с заданным знаком заряда и заданным знаком массы, эквивалентен протистону с противоположным знаком заряда и противоположным знаком массы.

Следовательно, **в отношении электромагнитного взаимодействия можно переопределить знак заряда протистона, если одновременно переопределить знак его массы**. (2)

Так как заряд протистона сохраняется, то сохраняется и знак его массы. То есть обмен лишь нейтральным электромагнитным полем не может привести к переходу протистона между состояниями с разными знаками заряда, а значит, и энергии.

Тогда при определеном знаке заряда **все протистоны имеют массу (и энергию) одного знака**. Сохранение одного знака массы позволяет массу рассматривать как инвариант (истинный скаляр), не изменяющий знака в инверсии координат.

Неотрицательность (неположителность) энергии означает, что вектор 4-импульса лежит внутри изотропного конуса будущего (прошлого) и не может перейти в полость прошлого (будущего). Это означает **выделенность одного из направлений времени (стрела времени)**, при условии положительного (отрицательного) определения энергии.

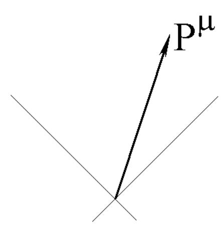


Рис. 112.7.

Таким образом, у нас определено понятие **неопределённой по знаку массы**. Но пользоваться им мы будем лишь в процессе вычисления, чтобы не нарушать непрерывности решений уравнений. При этом переход к отрицательным значениям массы в каждом таком решении должен сопровождаться инверсией знака заряда.

Итак все наблюдаемые виды энергии можно определить только положительными, что повышает познавательную ценность понятия энергии, которая при этом становится **неуничтожимой сохраняющейся величиной**.

Ниже мы покажем, что масса протистона и антипротистона осциллирует синхронно со знаком заряда, но фаза осцилляций зависит от зарядов, поэтому **переопределённая масса (энергия покоя) и протистона и антипротистона положительна, но их знаки противоположны**. О знаке этих зарядов требуется дополнительное соглашение, например, что электрический заряд и пара заряд протистона имеют одинаковые знаки, что сделано в главе 8:

$$q/|q| = q_p/|q_p|. \tag{8}$$

9. Универсальность реакции радиации. Вся энергия протистона, как материальной точки, определяется его массой. Единственным механизмом обмена энергией протистона с электромагнитным полем в нашей теории является радиация электромагнитного поля протистоном, поэтому единственной (универсальной) силой, действующей на протистон, является реакция радиации. В

классической электродинамике силу, действующую на точечный заряд со стороны электромагнитного поля, называют силой Лоренца. Однако здесь сила Лоренца может быть и не связана с радиацией, если заряд удерживается в состоянии инерциального движения другими силами. Мы намерены в дальнейшем показать, что такое представление справедлтво лишь при макроскопическом рассмотрении, усредняющем микроскопические движения. То есть сила Лоренца в нашей теории должна происходить из силы реакции радиации, что мы в дальнейшем и покажем. Обратим внимание, что при излучении потенциалы определены однозначно, то есть калибровка излучённых потенциалов определённая (**калибровка излучения**) и удовлетворяет условию Лоренца (**неразрывность потенциалов**).

10. Угловое распределение поля поглощения. Не трудно видеть, что поле поглощения распределяется аналогично полю излучения. Поэтому направление потока радиации всегда обращено в сторону скорости, что в случае излучения соответствует **торможению протистона** под действием силы реакции, а в случае поглощения – **ускорению**. Заметим, что инверсии радиации соответствует инверсия знака её реакции dP/ds.

§5. Самодействие протистона как квазиточечного заряда.

1. Квазиточечный заряд. Итак масса протистона величина **не постоянная**, благодаря чему протистон может проявлять самостоятельную активность. Ниже мы покажем, что масса протистона пульсирует с почти постоянным периодом (**микроскопическая масса**). Отвлекаясь от обмена массой между протистоном и полем, можно считать его **наблюдаемую массу (макроскопическую)** постоянной. Тогда мировой линией протистона следует считать центр инерции протистона вместе с обмениваемым полем.

При условии постоянства массы становится возможным использование для протистонов только пространственно-подобной силы (в том числе силы Лоренца). При этом макроскопическое ускорение приводит только к излучению (без поглощения).

Отвлекаясь от самостоятельной активности протистона (связанной с изменением его массы), будем называть его (а также любую достаточно компактную систему таких протистонов) **квазиточечным зарядом**, определяющим свойством которого является **практически постоянная масса**. Макроскопическое взаимодействие квазиточечного заряда с электромагнитным полем происходит посредством силы Лоренца (см. II, гл. 5) и излучения, вызванного ускорением от силы Лоренца. Микромасштабная активность протистона отражается в значении массы квазиточечного заряда.

2. Реакция излучения квазиточечного заряда.
Вопрос о реакции излучения квазиточечного заряда решается иначе, чем для точечного заряда. Здесь важное отличие в том, что масса считается постоянной или,

по-крайней мере, в условиях данной задачи допустимо пренебрежение производной dm/ds. Поэтому ускорение можно рассматривать только как результат действия внешней **пространственноподобной** силы, работа которой производит излучение. Поглощение же энергии от внешнего поля происходит только за счёт работы внешней силы (силы Лоренца).

Как и точечный заряд, квази точечный заряд излучает энергию, определяемую формулой (3.3.4), так как при её выводе условие постоянства массы не использовалось

$$d\mathcal{E}_{e}\big|_{\mathbf{v}=0} = i_r \frac{2}{3} q^2 \mathbf{a}^2 dt,$$

где процесс при отрицательном значение i_r для квазиточечного заряда можно понимать лишь как обратный во времени процесс. Чтобы найти реакцию излучения, допустим, что заряд совершает на достаточно коротком криволинейном отрезке, где величины изменяются достаточно мало, такое движение, что в некоторый момент времени t_1 он приходит в состояние движения с тем же значением величины $\mathbf{av}$, которое было в некоторый предшествующий момент t_0. В остальном (то есть на любых промежуточных интервалах) движение произвольно. Такое движение можно обеспечить (причём разными способами) просто выбором системы отсчёта, так как величина $\mathbf{av}$ скалярная, а преобразование Лоренца имеет 6 свободных параметров. При этом можно наложить ещё условие достаточно малой (нерелятивистской) скорости при t_0 и t_1, что обеспечивается достаточно малым интервалом между началом и концом движения.

Так как масса квазиточечного заряда считается постоянной ($dm/ds = 0$), то согласно (9.6.6.4), полагая $ds = dt$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_Q \ \mathbf{v} \ dt = \mathcal{E}(t_1) - \mathcal{E}(t_0) = \mathcal{E}_e(t_0) - \mathcal{E}_e(t_1) = -\frac{2}{3} i_r \ q^2 \int\limits_{t_0}^{t_1} a^2 \ dt,$$

где $\mathbf{F}_Q$ – сила реакции излучения квазиточечного заряда,

$\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_e$ – энергия заряда и поля.

То есть работа реакции излучения на интервале $(t_0, \ t_1)$ равна изменению энергии заряда под действием реакции излучения. Таким образом, мы неявно предполагаем, что **для квазиточечного заряда 4-реакция излучения пространственноподобна**, так как **вся** работа реакции излучения отнесена к 3-силе $\mathbf{F}_Q$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_Q \ \mathbf{v} \ dt = -\frac{2}{3} \ i_r q^2 \ \mathbf{av}\big|_{t_0}^{t_1} + \frac{2}{3} \ i_r q^2 \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}\dot{\mathbf{a}} \ dt.$$

Поскольку в момент t_1 значение величины $\mathbf{av}$ совпадает с его значением в момент

t_0, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_Q \ \mathbf{v} \ dt = \frac{2}{3} \ i_r q^2 \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}\dot{\mathbf{a}} \ dt.$$

В силу произвольности функции $\mathbf{v}(t)$, необходимо:

$$\mathbf{F}_Q = \frac{2}{3} i_r q^2 \dot{\mathbf{a}}. \tag{1}$$

(Сравните с [Беллюстин, (5.42)], [Ландау 2, (75,8)], [Левич 1, (29,2)]).

Таким образом, мы получили **4-силу реакции излучения квазиточечного заряда**, которая пространственно-подобна.

Времени-подобная компонента этой 4-силы реакции излучения по определению равна нулю, то есть силу реакции в 4-мерном виде можно записать так:

$$F^{\mu}_{Q}\Big|_{\mathbf{v}=0} = (0, \ \frac{2}{3} \ i_r q^2 \ \dot{\mathbf{a}}).$$

В произвольной системе отсчёта это выражение можно записать в виде (используя (4.3.2))

$$F^{\mu}_{Q} = \frac{2}{3} \ i_r q^2 \left(\frac{dw^{\mu}}{ds} + u^{\mu} \ w_{\nu} w^{\nu} \right) = \frac{2}{3} \ i_r q^2 \left(\frac{dw^{\mu}}{ds} - u^{\mu} u^{\nu} \frac{dw_{\nu}}{ds} \right). \tag{2}$$

которое, как не трудно убедиться с помощью (9.6.3.2),(9.6.3.5), переходит в предыдущее выражение при $\mathbf{v} = 0$.

Из (1) видно, что реакция излучения существует только в том случае, если ускорение ускорения не равно нулю. Это же условие необходимо и для существования массы точечного заряда (4.2.5).

В отличие от точечного заряда, реакция излучения для квазиточечного заряда только пространственноподобна. Это отличие является следствием игнорирования (осреднения) изменения массы квазиточечного заряда.

Для одиночного протистона, рассматриваемого статистически как квазиточечный заряд, радиация, соответствующая сглаженным (микроскопическим, **внутреним**) движениям протистона, игнорируется. Макроскопическое ускорение протистона становится возможным рассматривать как результат действия силы Лоренца (см. ниже), а результат макроскопического ускорения – как **наблюдаемое излучение** и только излучение (без поглощения). Тем самым для квазиточечного представления протистона реализуется **принцип причинности**, хотя (в силу сглаживания) лишь статистически. В представлении же точечного заряда в рамках абстрактной электродинамики этот принцип (как мы покажем ниже) утрачен, хотя в представлении единого поля он содержится в уравнении этого поля.

3. О значении постоянной c_m. Пространственно-подобной реакции излучения F^{μ}_{Q} (2.2) квазиточечного заряда в точности соответствует пространственно-подобная реакция излучения F^{μ}_{p} (4.4.7) точечного заряда при

$$c_m = i_r. \tag{1}$$

Такой выбор значения c_m обеспечивает универсальность пространственно-подобной реакции радиации как для точечных так и квазиточечных зарядов. Однако для аналитических целей мы пока сохраним разное обозначение величин c_m, i_r.

4. Самодействие квази-точечного заряда. Под действием одной лишь силы реакции излучения (2.1), уравнение движения квази-точечного заряда массы m примет вид

$$m\mathbf{a} = \frac{2}{3}q^2\dot{\mathbf{a}}$$

(сравните с [Ландау 2, (75,8)]).
Его тривиальное решение

$$\mathbf{a} = 0$$

является частным случаем общего решения (при $m = \text{const}$):

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}e^{\frac{3m}{2q^2}t},$$

которое показывает, что заряд может самоускоряться. Будем говорить, что имеет место **самодействие** заряда самого на себя за счёт реакции радиации. Однако для **квазиточечного заряда** кроме локальной силы реакции излучения существуют и осреднённые силы, например, сила Лоренца.

С точки зрения классической электродинамики, где масса зарядов полагается постоянной, самоускорение является абсурдным, так как нарушает закон сохранения энергии. В этой теории, однако, масса протистона не является постоянной, что допускает его самоускорение по реактивному принципу (без нарушения законов сохранения).

В представлении квазиточечного заряда микроскопические ускорения усредняются (сглаживаются) вместе с соответствующими микроволновыми излучениями-поглощениями, уравновешивающими друг друга. В результате остаются лишь неуравновешенные (макроскопические) ускорения и излучения квази точечного заряда под действием макроскопической внешней силы, которая может оказаться значительно меньше силы самодействия. Условия, позволяющие пренебречь самодействием квазиточечного заряда по сравнению с внешними силами, будем называть **условиями несамодействия**. Эти условия выполнимы только для квазиточечных зарядов с достаточно постоянной массой.

В точном же представлении протистон имеет непостоянную массу, то есть не является квази-точечным зарядом, поэтому для него уравнение движения будет иметь другой вид. Как мы увидим, в этом случае всегда имеет место **самодействие протистона**, имеющее далеко идущие конструктивные следствия.

5. О направлении реакции излучения квазиточечного заряда. Направление реакции излучения (пространственноподобной части) совпадает с направлением ускорения ускорения $\dot{a}$, что, как мы видели, приводит к самоускорению, однако это ускорение при точном рассмотрении (то есть согласно уравнению движения истинно точечного заряда) с учётом микропульсаций заряда, приводит

к автоколебательному движению протистона в вакууме. Тогда при осреднении осцилляций, первый член в (2.2) выпадает и реакция излучения оказывается направленной против скорости ($w_\nu w^\nu \leqslant 0$), то есть соответствует **торможению квази точечного заряда**. Сила торможения пропорциональна квадрату макроскопического 4-ускорения $|w_\nu w^\nu|$. Инерциальное же движение свободного квази точечного заряда не тормозится.

6. Краткие итоги первой части. Антропный мир детерминирован 4-х-мерным псевдоэвклидовым диофантовым уравнением, решения которого (спектральные точки) определяют (через обратное преобразование Фурье) **единое поле**, носителем которого является линейно роасширяющийся во времени шар – **Вселенная**. Единое поле удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока (КГФ), среди решений которого есть решения (**протистоны**) с особой точкой, интерпретируемой как положительный или отрицательный **точечный электрический заряд**, из которого истекает **неразрывный ток**. Движение же самих точечных зарядов образует **дискретный ток**. 4-инвариантность уравнения КГФ единого поля и неразрывность 4-тока позволяют с помощью лагранжева формализма рассматривать систему точечных зарядов как механическую систему, удовлетворяющую электродинамическим законам. При этом в малых окрестностях точечных зарядов их 4-потенциалы должны иметь специальную (**корпускулярную**) калибровку, обеспечивающую сходимость 4-импульса каждого i-ого точечного заряда к определённому конечному значению за счёт обнуления положительной плотности энергии сопутствующего точечному заряду электромагнитного поля отрицательной плотностью энергии истекающего тока в поле потенциала. При этом 4-импульс самого точечного заряда удовлетворяет **потенциальному условию**:

$$P_i^\mu = q\sum_{j\neq i} A_j^\mu, \quad i,j=1,2,\dots. \tag{1}$$

То есть этот **активный 4-потенциал**, влияющий на каждый i-тый заряд, является суммой 4-потенциалов всех точечных зарядов с выколотыми точками на каждом точечном заряде, где обнуляется сингулярный потенциал самого этого заряда и остаётся только сумма 4-потенциалов всех остальных зарядов. Иначе говоря, выколотые точки x_i^μ активного потенциала в соответствие с потенциальным условием (1) доопределяются в виде

$$A_i^\mu = P_i^\mu/q, \tag{2}$$

что обеспечивает непрерывность **общего 4-потенциала** как обобщённой функции. Заполнение выколотых точек исходными сингулярностями образует **полный 4-потенциал**. Таким образом понятие активного потенциала является результатом корпускулярной калибровки в малых окрестностях точечных зарядов. При космологически больших значениях возраста Вселенной эти окрестности становятся пренебрежимо малыми по сравнению со средним расстоянием между точечными

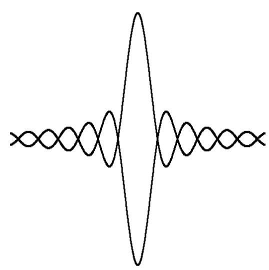
зарядами, поэтому, наряду с корпускулярной калибровкой становится возможным применение и других калибровок вне этих окрестностей.

Применение механических законов к такой системе зарядов требует от них не инерциального движения, а движения с определённой **шаговой структурой мировой линии** с определённой **не постоянной массой**. Электромагнитное поле точечных зарядов при таком движении состоит из **сопутствующего поля** и **радиационного поля**. Сопутствующее поле, благодаря корпускулярной калибровке, имеет нулевую плотность 4-импульса, поэтоиу само не может передавать 4-импульс другим точечным зарядам, но потенциальное условие требует связи 4-импульса точечных зарядов с потенциалами других точечных зарядов. Эта связь обеспечивается посредством радиационных полей, которые можно рассматривать как **возмущения сопутствующих** полей.

⋆ ⋆ ⋆

Я не могу поверить, что Бог играет в кости.

Эйнштейн.



ЧАСТЬ II

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Глава 1. САМОДВИЖЕНИЕ ПРОТИСТОНА.

Если заряд протистона постоянен, то масса протистона изменяется детерминированно и он движется по траектории вполне определённой формы, излучая или поглощая лишь собственное поле радиации.

§1. Динамика массы и 4-ускорения протистона.

1. Уравнение для массы протистона. Выразим $w_\mu w^\mu$ из формулы (I.12.4.3.3):

$$w_\mu w^\mu = i_r \frac{3}{2q^2}\ \frac{dm}{ds} \tag{1}$$

и подставим в выражение (I.12.4.2.5) для массы протистона:

$$m = \frac{1}{3} q^2 c_m \frac{\frac{d}{ds}(w_\mu w^\mu)}{w_\nu w^\nu} = \frac{1}{3} q^2 c_m \frac{\frac{d^2 m}{ds^2}}{\frac{dm}{ds}},$$

откуда

$$\frac{dm^2}{ds} = \frac{2}{3} q^2 c_m \frac{d^2 m}{ds^2}. \tag{2}$$

Так как заряд протистона изменяется космологически мало, то величина q в первом (очень точном) приближении является постоянной. В этой главе мы вычислим именно это приближение.

2. Решение уравнения для массы протистона. Интегрируя по s, имеем

$$m^2 = \frac{2}{3}\ q^2 c_m \frac{dm}{ds} \mp b^2, \tag{1}$$

где $\mp b^2$ – постоянная интегрирования.

Откуда

$$\frac{dm}{m^2 \pm b^2} = \frac{3}{2q^2 c_m} ds.$$

Очевидно, что b имеет ту же размерность, что и m, что означает пропорциональность b квадрату заряда

$$b \sim q^2,$$

что не исключает космологически медленной зависимости b от T вида

$$b = f(T)\, q^2.$$

При $b = 0$, получаем

$$-\frac{1}{m} = \frac{3}{2q^2 c_m}(s - s_m),$$

где $\frac{3}{2q^2 c_m} s_m$ – постоянная интегрирования (при фиксированном s_m), отсюда

$$m = \frac{-2q^2 c_m}{3(s - s_m)}.$$

s_m – это координата определённой точки на мировой линии, поэтому замечание о фиксированном значении s_m существенно, так как значение q^2 не вполне постоянно, поскольку оно космологически медленно изменяется пропорционально $1/T^6$ и имеет микропульсации с амплитудой $1/T^7$.

При $b \neq 0$, используя [Прудников 1.2.10.14, с. 41], имеем

$$\frac{1}{b} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arc\,tg} \frac{m}{b} \\ \frac{1}{2} \ \ln \left| \frac{m-b}{m+b} \right| \end{array} \right\} = \frac{3}{2q^2 c_m}(s - s_m),$$

где $\frac{3}{2q^2 c_m} s_m$ – постоянная интегрирования (при фиксированном s_m)

или

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{m}{b} = \operatorname{tg}(\beta(s - s_m)) \\ \left| \frac{m-b}{m+b} \right| = \mathrm{e}^{2\beta(s - s_m)} \end{array} \right\},$$

где

$$\beta = \frac{3b}{2q^2 c_m} = \frac{3f(T)}{2c_m}. \tag{2}$$

Мы заключили здесь уравнения в фигурные скобки, чтобы подчеркнуть, что это не система уравнений, а альтернативные уравнения.

Заметим, что пропорциональность b и q^2 означает независимость величины β от q, то есть во всяком случае β **не имеет микропульсаций**, хотя её постоянство может быть лишь в космологическом смысле, то есть допустимы космологически медленные изменения β.

Выражая m из первого уравнения, имеем

$$m = b\ \mathrm{tg}(\beta(s - s_m)).$$

Из второго уравнения имеем

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{m-b}{m+b} = \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}, & |m| > |b| \\ \frac{b-m}{m+b} = \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}, & |m| < |b| \end{array} \right\},$$

здесь условия очевидны, если учесть, что

$$\frac{m-b}{m+b} = \frac{(m-b)^2}{m^2 - b^2}.$$

Далее

$$\left\{ \begin{array}{ll} m - b = me^{2\beta(s-s_m)} + be^{2\beta(s-s_m)}, & |m| > |b| \\ b - m = me^{2\beta(s-s_m)} + b\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}, & |m| < |b| \end{array} \right\}$$

или

$$\left\{ \begin{array}{ll} m = \frac{b\left(1+\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}\right)}{1-\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}, & |m| > |b| \\ \\ m = \frac{b\left(1-\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}\right)}{1+\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}, & |m| < |b| \end{array} \right\}.$$

Так как

$$1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)} > 1 - \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)},$$

то условие $|m| > |b|$ для первого уравнения и условие $|m| < |b|$ для второго уравнения всегда выполняется, поэтому их можно опустить и получим

$$m = \frac{b\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}\right)}{1 \mp \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}.$$

Или, вынося за скобки в числителе и знаменателе множитель

$$\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)},$$

получим

$$m = -b \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{cth}(\beta(s - s_m)) \\ \mathrm{th}(\beta(s - s_m)) \end{array} \right\}.$$

Таким образом, окончательно

$$m = b \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{\beta(s-s_m)} \\ \mathrm{tg}(\beta(s - s_m)) \\ -\mathrm{cth}(\beta(s - s_m)) \\ -\mathrm{th}(\beta(s - s_m)) \end{array} \right\}. \qquad (3)$$

На рис. 201.1 приведены графики этих функций при $b > 0$. Номер графика соответствует порядку перечисления функций в выражении (3).

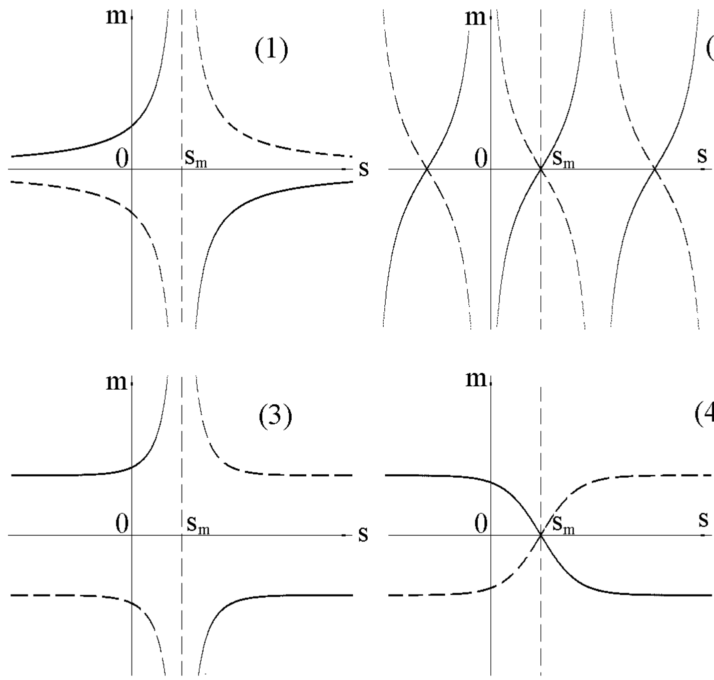


Рис. 201.1.

Отбрасывая неограниченные решения, получим единственное решение

$$m = -b\ \mathrm{th}(\beta(s - s_m)). \tag{4}$$

Неограниченные решения неудовлетворительны тем, что в окрестности особенности такого решения излучается (или поглощается) бесконечная, то есть неопределённая, энергия поля. При этом теряется смысл системы протистон-поле, как замкнутой механической системы, основным признаком которой является сохранение энергии, сохранение же неопределённой энергии бессмысленно.

Между знаками i_r и c_m существует связь. Действительно, из выражения

$$\frac{dm}{ds} = i_r\frac{2}{3}q^2 w^\mu w_\mu = \frac{bi_r}{\beta c_m}w^\mu w_\mu, \tag{5}$$

дифференцируя полученную функцию $m(s)$, находим

$$\frac{bi_r}{\beta c_m}w^\mu w_\mu = -b\frac{d}{ds}(\mathrm{th}\,\beta(s - s_m)) = \frac{-b\beta}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))},$$

откуда

$$w^\mu w_\mu = \frac{-\beta^2 c_m}{i_r\ \mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))} = \frac{-\beta^2 i_r c_m}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))}, \tag{6}$$

где $i_r = \pm 1$ (I.12.3.3.3). График $w^\mu w_\mu$ на рис.201.2.

Так как $w^\mu w_\mu \leqslant 0$ (ускорение пространственноподобно), то необходимо

$$i_r c_m > 0, \tag{7}$$

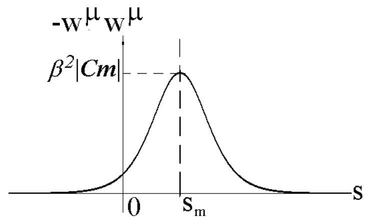


Рис. 201.2.

тогда

$$i_r c_m = |c_m|, \tag{8}$$

то есть i_r и c_m должны иметь одинаковые знаки. На рис.201.1 штриховой линией изображены графики при $i_r = -1$.

Рассмотренное изменение массы протистона будем называть при $i_r = 1$ **релаксацией массы протистона**, а при $i_r = -1$ – **антирелаксацией**.

В окрестностях момента $s = s_m$ это изменение массы будем называать её **виражом**, а момент s_m – **сгоном**. Вдали от сгона масса практически постоянна.

3. Выбор положительной массы протистона. Согласно закону сохранения заряда и связи инверсии знака точечного заряда с инверсией знака массы (I.12.4.8.*), необходимо выбирать ветви функции $m(s)$ с неизменным знаком. Поэтому выберем решение для массы **в положительно определённом виде**

$$m = |b\,\mathrm{th}(\beta(s - s_m))|.$$

То же самое можно записать и в прежнем виде

$$m = -b\,\mathrm{th}(\beta(s - s_m)), \tag{1}$$

используя независимость вывода этой формулы от знака b. При этом положительность m обеспечивается накладываемым на знак b условием:

$$\mathrm{sign}\,b = \mathrm{sign}\,c_m = \mathrm{sign}\,i_r, \tag{2}$$

то есть **должны совпадать знаки** b, c_m, i_r. И из (2.2) следует

$$\beta = \frac{3b}{2q^2 c_m} > 0. \tag{3}$$

Тогда производная массы протистона при переходе через ноль испытывает скачок (Рис. 13.3), который однако удовлетворяет исходному уравнению:

$$m\,\frac{dm}{ds} = \frac{1}{3} q^2 c_m \frac{d^2 m}{ds^2}, \tag{4}$$

так как dm/ds испытывает конечный разрыв, то есть не однозначна как раз в той точке, где $m = 0$, в силу чего произведение $m\,\frac{dm}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dm^2}{ds}$ неразрывно. Вторая же

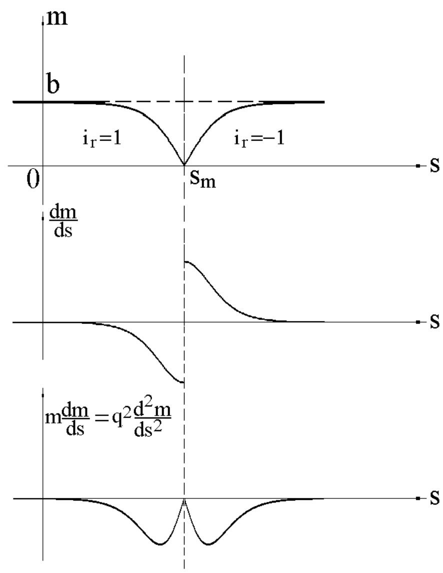


Рис. 201.3.

производная массы в этой точке разрыва не имеет (точнее, разрыв устранимый) и равна 0. В исходном же виде решения величина dm/ds вообще неразрывна.

Поскольку момент сгона изменяет убывание массы на возрастание, то **на сгоне изменяется знак радиации** или, другими словами происходит **переход радиации**.

На переходе радиации в точке s_m величина $w^\mu w_\mu$ изменяется гладко, если изменяется гладко $|dm/ds|$, что видно из (2.5).

Таким образом **массовая кривая** (Рис.201.3) разбивается точкой сгона s_m на две ветви со следующими параметрами:

$$s < s_m, \quad i_r = 1, \quad c_m > 0, \quad b > 0 \tag{5}$$

– **ветвь излучения**,

$$s > s_m, \quad i_r = -1, \quad c_m < 0, \quad b < 0 \tag{6}$$

– **ветвь поглощения**. Для обеих ветвей

$$\beta > 0. \tag{7}$$

Модуль b одинаков для обеих ветвей, но знаки противоположны.

4. Выражение массы через модуль 4-ускорения протистона. Найдём связь между m и $w^\mu w_\mu$

$$m = \left| -b\frac{\mathrm{sh}(\beta(s-s_m))}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))} \right| = |b|\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))-1}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}}.$$

Подставляя выражение гиперболического косинуса через $w_\mu w^\mu$, имеем

$$m = |b|\sqrt{\frac{\frac{-\beta^2|c_m|}{w^\mu w_\mu}-1}{\frac{-\beta^2|c_m|}{w^\nu w_\nu}}} = |b|\sqrt{1+\frac{w^\mu w_\mu}{\beta^2|c_m|}}. \tag{1}$$

Откуда обратная зависимость:

$$w^\mu w_\mu = \beta^2 |c_m| \left(\frac{m^2}{b^2} - 1 \right). \qquad (2)$$

5. Картина электромагнитного поля радиации протистона в точке наблюдения. Интенсивности радиации протистона (2.5)

$$\frac{dm}{ds} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = I_e = i_r \frac{2}{3} q^2 w^\mu w_\mu$$

в достаточно удалённой точке наблюдения соответствует пропорциональная ей плотность энергии электромагнитного поля, медленно зависящая от расстояния до этой точки $(W \approx \mathrm{const}(r))$

$$W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi} \sim I_e,$$

тогда с точностью до сдвига во времени, с учётом (2.6),

$$E^2 \sim w^\mu w_\mu = \frac{-\beta^2 |c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))},$$

откуда, извлекая корень и учитывая посредством s_{i_r} сдвиг во времени, имеем

$$E \sim \frac{1}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_{i_r}))}.$$

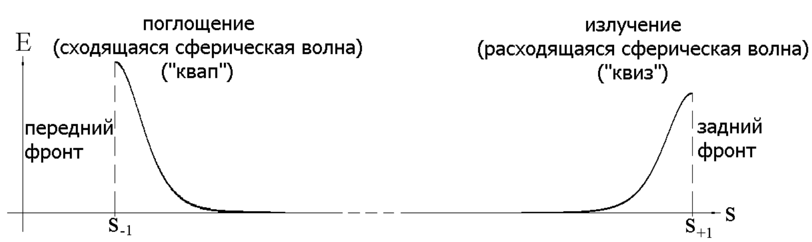


Рис. 201.4.

Так как изотропные конусы излучения и поглощения не совпадают, то s_{i_r} на данном большом расстоянии различно для излучения и поглощения $(s = s_{\pm 1})$, при этом для поглощения $(s_{i_r} = s_{-1})$

$$E = E_- \sim \begin{cases} 1/\mathrm{ch}(\beta(s - s_{-1})), \ s > s_{-1} \\ 0, \ s \leqslant s_{-1} \end{cases},$$

для излучения $(s_{i_r} = s_1)$

$$E = E_+ \sim \begin{cases} 1/\mathrm{ch}(\beta(s - s_{+1})), \ s > s_{+1} \\ 0, \ s \geqslant s_{+1} \end{cases}.$$

§2. Уравнения движения протистона.

1. Уравнение движения протистона. Подставляя выражение для массы

$$m = -b\ \mathrm{th}(\beta(s-s_m)) \tag{1}$$

и квадрата модуля 4-ускорения

$$w^\mu w_\mu = \frac{-\beta^2|c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))} \tag{2}$$

в выражение (I.12.4.3.6)

$$mw^\mu = \frac{2}{3}q^2 c_m\left(\frac{dw^\mu}{ds} + u^\mu\ w_\nu w^\nu\right), \tag{3}$$

получим уравнение движения протистона в линейной форме

$$-b\ \mathrm{th}(\beta(s-s_m))\frac{du^\mu}{ds} = \frac{2}{3}q^2 c_m\left(\frac{d^2u^\mu}{ds^2} - \frac{\beta^2|c_m|\ u^\mu}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}\right).$$

Выражая b из (1.3.3), имеем

$$-\beta\ \mathrm{th}(\beta(s-s_m))\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2u^\mu}{ds^2} - \frac{\beta^2|c_m|\ u^\mu}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}$$

или

$$\frac{d^2u^\mu}{ds^2} + \beta\ \mathrm{th}(\beta(s-s_m))\frac{du^\mu}{ds} - \beta^2|c_m|\ \frac{u^\mu}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))} = 0. \tag{4}$$

Важно, что скачки выражений (1) и (3), обусловленные скачками значений b и c_m в точке $s = s_m$, взаимно уничтожились в выражении (4), которое является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка относительно каждой из 4-х координат функции $u^\mu(s)$. Это исключает скачки мировой линии протистона и подтверждает естественность положительного определения его массы. Сделаем замену

$$\beta(s-s_m) = \sigma, \quad -\infty < s < \infty, \quad -\infty < \sigma < \infty, \tag{5}$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\ \frac{d}{d\sigma} = \beta\ \frac{d}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = \beta\ \frac{d}{d\sigma}\left(\beta\ \frac{d}{d\sigma}\right) = \beta^2\ \frac{d^2}{d\sigma^2}.$$

Тогда имеем

$$\frac{d^2u^\mu}{d\sigma^2} + \mathrm{th}\,\sigma\ \frac{du^\mu}{d\sigma} - \frac{|c_m|}{\mathrm{ch}^2\sigma}\ u^\mu = 0. \tag{6}$$

Сделаем замену

$$x = \mathrm{e}^{\sigma} = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{7}$$

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}\ \frac{d}{dx} = x\frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} = x\ \frac{d}{dx}\left(x\ \frac{d}{dx}\right) = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\ \frac{d}{dx}.$$

Тогда

$$x^2\frac{d^2u^\mu}{dx^2} + x\ \frac{du^\mu}{dx} + \frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}\ x\frac{du^\mu}{dx} - \frac{4|c_m|}{(x+\frac{1}{x})^2}u^\mu = 0$$

или

$$x^2\frac{d^2u^\mu}{dx^2} + x\ \frac{du^\mu}{dx} + \frac{x^2-1}{x^2+1}\ x\frac{du^\mu}{dx} - \frac{4x^2|c_m|}{(x^2+1)^2}u^\mu = 0$$

или

$$x\frac{d^2u^\mu}{dx^2} + \frac{x^2+1+x^2-1}{x^2+1}\ \frac{du^\mu}{dx} - \frac{4x|c_m|}{(x^2+1)^2}u^\mu = 0$$

или

$$\frac{d^2u^\mu}{dx^2} + \frac{2x}{x^2+1}\ \frac{du^\mu}{dx} - \frac{4|c_m|}{(x^2+1)^2}u^\mu = 0. \tag{8}$$

Сюда следует добавить релятивистское условие

$$u^\mu u_\mu = 1, \tag{9}$$

которое связывает решения при различных μ.

2. Решения уравнения движения. Не трудно проверить, что двумя линейно независимыми решениями уравнения (1.8) (для каждой компоненты u^μ) являются функции

$$u^\mu = \mathrm{e}^{\pm 2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x}. \tag{1}$$

Действительно, вычисляя производные

$$\frac{du^\mu}{dx} = \frac{\pm 2\sqrt{|c_m|}}{1+x^2}u^\mu, \tag{2}$$

$$\frac{d^2u^\mu}{dx^2} = \frac{\mp 4\sqrt{|c_m|}x}{(1+x^2)^2}u^\mu + \frac{\pm 2\sqrt{|c_m|}}{1+x^2}\ \frac{du^\mu}{dx} =$$

$$= \frac{\mp 4\sqrt{|c_m|}x}{(1+x^2)^2}u^\mu + \frac{4|c_m|}{(1+x^2)^2}\ u^\mu$$

и подставляя их в (1.5), получим тождество:

$$\frac{\mp 4\sqrt{|c_m|}x}{(1+x^2)^2}u^\mu + \frac{4|c_m|}{(1+x^2)^2}\ u^\mu + \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{\pm 2\sqrt{|c_m|}}{1+x^2}u^\mu - \frac{4|c_m|}{(x^2+1)^2}u^\mu \equiv 0.$$

Так как уравнение (1.5) линейно, то его решениями являются любые линейные комбинации двух решений (1). Однако, решения (1) не удовлетворяют условию $u^\mu u_\mu = 1$. Действительно, умножая (2) на u_μ, приходим к противоречию

$$u_\mu \frac{du^\mu}{dx} = \frac{\pm 2\sqrt{|c_m|}}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{du^\mu u_\mu}{dx} = 0.$$

3. Решения, удовлетворяющие условию $u^\mu u_\mu = 1$. В частности, решениями являются линейные комбинации:

$$\left.\begin{aligned} u_c^\mu &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu))} + \mathrm{e}^{-(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu))}) = \\ &= \operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu)) \\ u_s^\mu &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu))} - \mathrm{e}^{-(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu))}) = \\ &= \operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma(\mu)) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $\gamma(\mu)$ – произвольная постоянная, своя для каждого значения μ, для данной системы координат.

Эти функции замечательны тем, что из них легко построить решения, удовлетворяющие необходимому условию $u^\mu u_\mu = 1$. Действительно, так как в прямоугольных декартовых координатах

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (\mathbf{u})^2 = 1, \tag{2}$$

то чтобы удовлетворить этому условию достаточно взять

$$\left.\begin{aligned} (u^0)^2 &= \operatorname{ch}^2(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ (\mathbf{u})^2 &= \operatorname{sh}^2(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ \gamma &= \gamma(0) = \gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

то есть $\gamma(\mu)$ достаточно выбрать в виде **постоянного скаляра** γ. Откуда в компонентах необходимо:

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ u^1 &= A^1 \operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ u^2 &= A^2 \operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ u^3 &= A^3 \operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma) \\ (A^1)^2 &+ (A^2)^2 + (A^3)^2 = 1 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Итак, решение можно записать в виде:

$$\left.\begin{gathered} u^\mu = (\operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma),\ \mathbf{A}\operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x - \gamma)) \\ x = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} \\ \mathbf{A}^2 = 1 \\ \beta = \tfrac{3b}{2q^2 c_m} \end{gathered}\right\}. \tag{5}$$

Отметим также, что система отсчёта, в которой получены эти решения не произвольна, а именно такая инерциальная система, в которой направление скорости до сгона и после него лежит на одной линии, так как все компоненты скорости $\mathbf{u}$ изменяются пропорционально. Такую систему отсчёта назовём **системой прямого хода**.

Таким образомвся 4-х-мерная кривая лежит в одной плоскости, содержащей ось времени. Любое изменение параметра γ этой кривой не выводит её из этой плоскости и сохраняет скаляр $u^\mu u_\mu$ в любой точке кривой. Векторный параметр $\mathbf{A}$, очевидно задаёт ориентацию указанной плоскости в 3-пространстве. Тогда для параметра γ остаётся роль **параметра преобразования Лоренца** (без поворотов в 3-пространстве). Форма же 4-кривой должна быть инвариантна относительно поворотов в 4-пространстве в силу инвариантности уравнения (1.8).

Любая 4-векторная функция, полученная из найденного решения с помощью произвольного преобразования Лоренца, очевидно, также будет решением. При этом направление скорости, вообще говоря, будет изменяться в заданной точке кривой, например, в точке сгона.

В точке сгона $s = s_m$, при этом

$$u^0 = \mathrm{ch}(\sqrt{|c_m|}\,\frac{\pi}{2} - \gamma).$$

Если систему координат выбрать так, чтобы в точке сгона протистон покоился ($u^0 = 1$), то необходимо принять $\gamma = \sqrt{|c_m|}\,\pi/2$.

Вдали от сгона $s \to \pm\infty$, $\mathrm{arc\,tg\,x} \to \pm\frac{\pi}{2}$, то есть скорость стремится к постоянным значениям, а **мировая линия имеет две прямых асимптоты**.

4. Производные скорости протистона. Для уравнения движения протистона

$$\frac{d^2u^\mu}{ds^2} + \beta\ \mathrm{th}(\beta(s - s_m))\frac{du^\mu}{ds} - \beta^2|c_m|\ \frac{u^\mu}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))} = 0 \tag{1}$$

мы нашли решение в виде:

$$u^\mu = (\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg\,e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma),\ \mathbf{A}\,\mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg\,e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)). \tag{2}$$

Дифференцируя 4-скорость протистона, получим его 4-ускорение

$$w^0 = \frac{du^0}{ds} = \mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg\,e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)\frac{2\sqrt{|c_m|}\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}\beta}{1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}} =$$

$$= \frac{\beta\sqrt{|c_m|}\,\mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg\,e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))} =$$

$$= \frac{\beta\sqrt{|c_m|}(\pm\sqrt{u^{02} - 1})}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))} = \frac{i_r\beta\sqrt{|c_m|}|\mathbf{u}|}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))}, \tag{3}$$

при $\gamma = l\pi/2$, изменение знака w^0 эквивалентно переходу между торможением (излучением) и ускорением (поглощением), поэтому множитель ± 1 перед $\sqrt{u^{02}-1}$ мы интерпретировали как i_r,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{A}\frac{\beta\sqrt{|c_m|}\,\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))} =$$

$$= \frac{\mathbf{A}\beta\sqrt{|c_m|}u^0}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))} = \frac{\mathbf{A}\beta\sqrt{|c_m|}\sqrt{\mathbf{u}^2+1}}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))}. \quad (4)$$

Откуда, как и было ранее найдено:

$$w^\mu w_\mu = (w^0)^2 - \mathbf{w}^2 = \frac{-\beta^2|c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}. \quad (5)$$

Таким образом, в системе отсчёта, в которой решалось уравнение движения (в инерциальной системе прямого хода), 3-вектор скорости параллелен 3-вектору ускорения, то есть **в этой системе движение протистона прямолинейно, хотя и ускорено**.

Так как движение ускорено, то в других системах, движущихся относительно данной с постоянной скоростью, вектор которой имеет другое направление, траектория будет искривлённой.

Всегда можно выбрать инерциальную систему отсчёта так, что одна из компонент постоянного вектора $\mathbf{A}$ обратится в ноль и вместе с ней обратится в ноль и соответствующая компонента скорости, что означает параллельность траектории одной из плоскостей координат. Это значит, что **мировая линия детерминированного движения протистона плоская**.

Обратим внимание, что знак w^0 зависит от γ, то есть от выбора системы координат. В частности, при $\gamma = \sqrt{|c_m|}\,\pi/2$

$$\left.\begin{matrix} w^0 < 0, \ s < s_m \\ w^0 > 0, \ s > s_m \end{matrix}\right\}, \ \gamma = \sqrt{|c_m|}\,\pi/2, \quad (6)$$

то есть в этой системе протистон тормозится при излучении и ускоряется при поглощении.

Найдём ускорение ускорения

$$\frac{dw^0}{ds} = \frac{d^2u^0}{ds^2} = \frac{\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2|c_m| -$$

$$-\frac{\mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2\sqrt{|c_m|}\,\mathrm{sh}\,\beta(s-s_m), \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} = \mathbf{A}\Big(\frac{\mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2|c_m| -$$

$$-\frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2\sqrt{|c_m|}\operatorname{sh}\beta(s-s_m)\Big). \tag{8}$$

Отсюда видно, что в точке $s = s_m$

$$\frac{d^2u^\mu}{ds^2} = \frac{u^\mu}{\operatorname{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2|c_m| = u^\mu\beta^2|c_m|, \quad s = s_m, \tag{9}$$

то есть первый и третий члены уравнения (1) в точке $s = s_m$ взаимно уничтожаются, а второй член обращается в ноль за счёт множителя $\operatorname{th}\beta(s-s_m)$.

Хотя масса в момент сгона изменяется не гладко, **мировая линия протистона остаётся в момент сгона непрерывной и гладкой**. То, что **мировая линия в окрестности сгона плоская**, следует из того, что всегда можно выбрать систему отсчёта так, что одна из компонент вектора **A** обратится в ноль и вместе с ней обратится в ноль и соответствующая компонента скорости, что и означает параллельность траектории одной из плоскостей координат.

Заметим, что электромагнитное поле, излучаемое в момент s_m сгона имеет разрыв, так как излучение сменяется поглощением, то есть существуют **ударные электромагнитные волны**, что допускается волновым уравнением.

Если бы на сгоне допускалась ещё и негладкость мировой линии, то есть бесконечное ускорение, то интенсивность излучения в этой точке должна была бы быть бесконечной.

Аналогично вычислим

$$\frac{d^2w^0}{ds^2} = \frac{\beta^3|c_m|\sqrt{|c_m|}\operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^3(\beta(s-s_m))} -$$

$$-\frac{2\beta^3|c_m|\operatorname{sh}(\beta(s-s_m))\operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^3(\beta(s-s_m))} -$$

$$-\frac{\beta^3|c_m|\operatorname{sh}(\beta(s-s_m))\operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^3(\beta(s-s_m))} -$$

$$-\frac{\beta^3|c_m|\operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}(\beta(s-s_m))} +$$

$$+\frac{2\beta^3\sqrt{|c_m|}\operatorname{sh}^2(\beta(s-s_m))\operatorname{sh}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^3(\beta(s-s_m))} =$$

$$= \frac{\beta^2|c_m|w^0}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))} -$$

$$-\frac{3\beta^3|c_m|\operatorname{th}(\beta(s-s_m))\operatorname{ch}(2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))} -$$

$$-\beta^2w^0 + \frac{2\beta^2\operatorname{sh}^2(\beta(s-s_m))}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))}w^0. \tag{10}$$

Для $\mu=1,2,3$ достаточно заменить
$\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)$ на
$\mathrm{sh}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)$.
Подставляя производные ускорения в уравнение (2.2.3) при $\mu=0$, имеем

$$\frac{\beta^2|c_m|w^0}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}-$$

$$-\frac{3\beta^3|c_m|\mathrm{th}(\beta(s-s_m))\,\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}-$$

$$-\beta^2w^0+\frac{2\beta^2\mathrm{sh}^2(\beta(s-s_m))}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}w^0+$$

$$+\frac{3\beta^3|c_m|\mathrm{th}(\beta(s-s_m))\,\mathrm{ch}(2\sqrt{|c_m|}\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}-$$

$$-3\beta^2\mathrm{th}^2(\beta(s-s_m))\,w^0+2\beta^2\mathrm{th}^2(\beta(s-s_m))\,w^0+$$

$$+\frac{(1-|c_m|)\beta^2}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}w^0=0$$

или

$$\frac{\beta^2|c_m|w^0}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}-$$

$$-\beta^2w^0+\frac{2\beta^2\mathrm{sh}^2(\beta(s-s_m))}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}w^0-$$

$$-\beta^2\mathrm{th}^2(\beta(s-s_m))\,w^0+\frac{(1-|c_m|)\beta^2}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}w^0=0$$

или

$$\frac{|c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}-1+\mathrm{th}^2(\beta(s-s_m))+\frac{1-|c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}=0$$

или

$$-1+\mathrm{th}^2(\beta(s-s_m))+\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))}\equiv 0,$$

то есть $|c_m|$ – любое.

Для $\mu=1,2,3$ результат аналогичный.

5. Квазистационарные состояния протистона.

Рассматривая закон изменения массы и квадрата модуля ускорения протистона

$$m=-b\,\mathrm{th}(\beta(s-s_m)), \tag{1}$$

$$w^\mu w_\mu=\frac{-\beta^2|c_m|}{\mathrm{ch}^2(\beta(s-s_m))},\qquad \beta=\frac{3b}{2q^2c_m}, \tag{2}$$

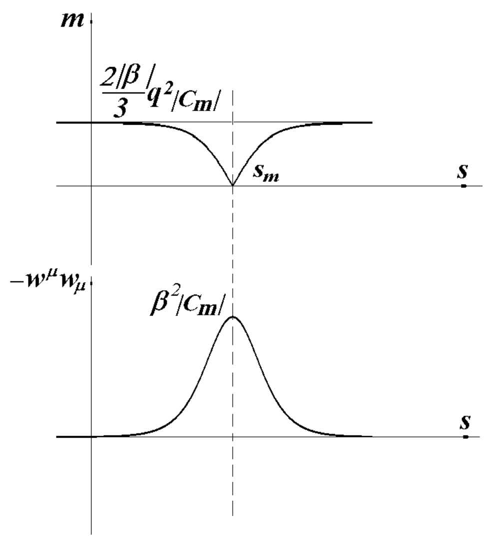


Рис. 201.5.

видим, что масса протистона практически всегда постоянна, но быстро изменяет своё значение от b до 0 и от 0 до b в небольшой окрестности точки $s = s_m$ на оси собственного времени. При этом только в этой же области простистон испытывает большое ускорение, а следовательно только в этой области, то есть в области сгона, он сильно излучает или поглощает, так как интенсивность излучения или поглощения пропорциональна $-w^\mu w_\mu$.

Так как характер убывания $-w^\mu w_\mu$ при удалении от точки s_m экспоненциальный, то вдали от этой точки излучение или поглощение практически отсутствует так же как и ускорение.

В любых системах отсчёта до и после виража массы протистон движется практически прямолинейно и равномерно. Сам же вираж массы в различных системах выглядит как скруглённый излом прямолинейной траектории с различным углом в зависимомти от выбора системы отсчёта.

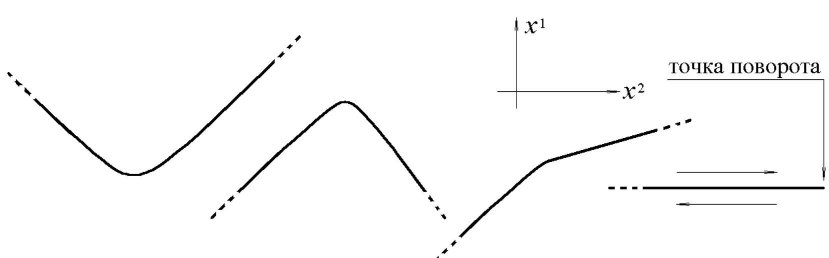


Рис. 201.6.

Вне виража будем говорить о **протистоне** как о **находящемся в квази-стационарном состоянии**.

В квази-стационарном состоянии протистон имеет практически постоянную массу, равную (с космологической точностью)

$$|b| = m_{max} = m_m = \frac{2\beta}{3} q^2 |c_m|. \tag{3}$$

Энергия в квазистационарном состоянии зависит от скорости:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{4}$$

6. Приведение уравнения для u^μ к гипергеометрическому типу. В соответствие с [Никифоров, с. 13] запишем уравнение для u^μ в виде

$$\psi'' + \frac{\tilde\tau(x)}{\sigma(x)}\psi' + \frac{\tilde\sigma(x)}{\sigma^2(x)}\psi = 0. \tag{1}$$

(Здесь $u^\mu = \psi$ для любой компоненты u^μ.)
Это **обобщённое уравнение гипергеометрического типа**.
Здесь $\sigma(x), \tilde\sigma(x)$ – полиномы не выше 2-й степени,
$\tilde\tau(x)$ – полином не выше 1-й степени.
Такой вид наше уравнение имеет при
$\tilde\tau = 2x$,
$\sigma(x) = x^2 + 1$,
$\tilde\sigma(x) = -4|c_m|$.
Попытаемся с помощью замены
$u^\mu = \psi = \varphi(x)\ y$
привести уравнение (1) к более простому виду путём специального выбора функции $\varphi(x)$. Имеем

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde\tau}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\tilde\tau}{\sigma} + \frac{\tilde\sigma}{\sigma^2}\right)y = 0. \tag{2}$$

Для того, чтобы уравнение (2) не было более сложным, чем исходное уравнение (1), естественно потребовать, чтобы коэффициенты при y' имели вид
$\tau(x)/\sigma(x)$,
где $\tau(x)$ некоторый полином не выше 1-й степени. Тогда для функции $\varphi(x)$ получим уравнение

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \tag{3}$$

где

$$\pi(x) = \frac{1}{2}[\tau(x) - \tilde\tau(x)] \tag{4}$$

– полином не выше 1-й степени.

Так как

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

то уравнение (2) примет вид

$$y'' + \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\ y' + \frac{\bar\sigma(x)}{\sigma^2(x)}\ y = 0, \tag{5}$$

где

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x), \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}(x) + \pi^2(x) + \pi(x)[\tilde{\tau}(x) - \sigma'(x)] + \pi'(x)\sigma(x). \tag{7}$$

Функции $\tau(x)$ и $\tilde{\sigma}(x)$ являются полиномами не выше первой и второй степени соответственно. Поэтому уравнение (5) является уравнением того же типа, что и уравнение (1).

Воспользуемся произволом в выборе полинома $\pi(x)$ для того, чтобы среди всех возможных видов уравнения (5) выбрать наиболее простой и удобный для исследования свойств решений. Выберем коэффициенты полинома $\pi(x)$ из условия, чтобы входящий в уравнение (5) полином $\bar{\sigma}(x)$ делился бы без остатка на полином $\sigma(x)$, то есть

$$\bar{\sigma}(x) = \lambda\,\sigma(x), \tag{8}$$

где λ – некоторая постоянная.

Это возможно, так как приравнивая коэффициенты при различных степенях x в обеих частях равенства (8), мы получим три уравнения относительно трёх неизвестных постоянных – постоянной λ и двух коэффициентов полинома $\pi(x)$. Ясно, что допустимо значение $\lambda = 0$, так как $\bar{\sigma}(x)$ входит в числитель дроби.

В результате уравнение (5) приведётся к виду:

$$\sigma(x)\ y'' + \tau(x)\ y' + \lambda y = 0, \tag{9}$$

которое называется **уравнением гипергеометрического типа**.

Для определения полинома $\pi(x)$ и постоянной λ перепишем условие (8) в виде

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

где

$$k = \lambda - \pi'(x). \tag{10}$$

Если считать постоянную k известной, то в результате решения квадратного уравнения для $\pi(x)$, получим

$$\pi(x) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} + \delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}, \tag{11}$$

где $\delta = \pm 1$, а корень имеется в виду однозначный, то есть одна из его двух **непрерывых** ветвей. (Не важно какая).

Так как $\pi(x)$ – полином, то подкоренное выражение должно представлятся в виде квадрата некоторого полинома. Это возможно лишь в случае, когда дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для постоянной k, вообще говоря, квадратное. После определения k находим $\pi(x)$ по формуле (11), а затем $\varphi(x)$, $\pi(x)$ и λ с помощью (3), (6) и (10).

Очевидно, что сведение уравнения (1) к уравнению гипергеометрического типа (9) может быть осуществлено несколькими способами в соответствии с выбором разных значений (2 возможных) постоянной и выбором различных ветвей корня в формуле (11).

В нашем случае подкоренное выражение в (11) имеет вид

$$\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma = \left(\frac{2x - 2x}{2}\right)^2 + 4|c_m| + k(x^2 + 1) =$$

$$= kx^2 + k + 4|c_m|.$$

Приравнивая дискриминант этого квадратного трёхчлена нулю, получим уравнение для k:

$$-4k(k + 4|c_m|) = 0,$$

откуда

$$k = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -4|c_m| \end{array} \right\}.$$

Удобно выбрать

$$k = 0.$$

При этом выражение для корня в (11) примет вид

$$\delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} = \delta\sqrt{kx^2 + k + 4|c_m|} = 2\delta\sqrt{|c_m|}.$$

Тогда

$$\pi(x) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} + \delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} = \frac{2x - 2x}{2} + 2\delta\sqrt{|c_m|},$$

$$\pi(x) = 2\delta\sqrt{|c_m|}.$$

Из (3)

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{2\delta\sqrt{|c_m|}}{x^2 + 1},$$

$$\ln|\varphi| + c' = 2\delta\sqrt{|c_m|}\int\frac{dx}{x^2 + 1} = \qquad \text{[Прудников, 1.2.10.14, с. 41]}$$

$$= 2\delta\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x,$$

$$\varphi = c\, e^{2\delta\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x}.$$

Выберем $\delta = 1$.

Тогда имеем одно из линейнонезависимых решений:

$$\varphi_1 = c\, e^{2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x}.$$

Из (6) находим

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x) = 2x + 4\delta\sqrt{|c_m|} = 2x + 4\sqrt{|c_m|}.$$

Из (10)

$$\lambda = k + \pi'(x) = 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, мы привели уравнение к гипергеометрическому типу

$$\sigma(x)\ y'' + \tau(x)\ y' + \lambda y = 0,$$

то есть в нашем случае

$$(x^2 + 1)\ y'' + (2x + 4\sqrt{|c_m|})\ y' = 0.$$

Здесь имеем тривиальное решение

$$y = c.$$

Тогда имеем одно решение для u^μ в виде

$$u^\mu = \varphi(x)\ y = A^\mu_+\ \mathrm{e}^{2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x}.$$

Выбирая

$$\delta = -1,$$

аналогично получим второе линейно независимое решение:

$$u^\mu = A^\mu_-\ \mathrm{e}^{-2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x}.$$

То есть общее решение имеет вид

$$u^\mu = A^\mu_\pm\ \mathrm{e}^{\pm 2\sqrt{|c_m|}\operatorname{arc\,tg} x},$$

что соответствует (2.1).

7. Уравнение относительно ускорения w^μ. Так как квадрат модуля ускорения $w^\mu w_\mu$ стремится к 0 при $s \to \pm\infty$, а m стремится при этом к константе, то протистон в этом пределе не излучает и движется равномерно и прямолинейно, то есть

$$w^\mu_{|s\to\pm\infty} = w^\mu_{|\sigma\to\pm\infty} = 0,$$

поэтому интересно записать уравнение также и относительно ускорения, имея при этом простые краевые условия.

С этой целью продифференцируем (1.3) по σ:
(учитывая, что $du^\mu/d\sigma = du^\mu/\beta\, ds = w^\mu/\beta$)

$$\frac{d^2 w^\mu}{\beta d\sigma^2} + \frac{1}{\beta \operatorname{ch}^2\sigma} w^\mu + \frac{\operatorname{th}\sigma}{\beta}\ \frac{dw^\mu}{d\sigma} +$$

$$+\frac{2|c_m|\mathrm{sh}\,\sigma}{\mathrm{ch}^3\sigma}u^\mu - \frac{|c_m|}{\beta\mathrm{ch}^2\sigma}w^\mu = 0. \tag{1}$$

Выразим u^μ из уравнения (1.3)

$$u^\mu = \frac{1}{\beta|c_m|}\mathrm{ch}^2\sigma\frac{dw^\mu}{d\sigma} + \frac{1}{\beta|c_m|}\mathrm{ch}\,\sigma\ \mathrm{sh}\,\sigma\ w^\mu$$

и, подставляя в (1), получим искомое уравнение

$$\frac{d^2w^\mu}{d\sigma^2} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\sigma}\ w^\mu + \mathrm{th}\,\sigma\ \frac{dw^\mu}{d\sigma} +$$

$$+2\ \mathrm{th}\,\sigma\ \frac{dw^\mu}{d\sigma} + 2\ \mathrm{th}^2\sigma\ w^\mu - \frac{|c_m|}{\mathrm{ch}^2\sigma}\ w^\mu = 0.$$

Или

$$\frac{d^2w^\mu}{d\sigma^2} + 3\ \mathrm{th}\,\sigma\ \frac{dw^\mu}{d\sigma} + \frac{2\ \mathrm{sh}^2\sigma + 1 - |c_m|}{\mathrm{ch}^2\sigma}\ w^\mu = 0, \tag{2}$$

или, возвращаясь к переменной s

$$\frac{d^2w^\mu}{ds^2} + 3\beta\ \mathrm{th}\,\beta(s-s_m)\frac{dw^\mu}{ds} + \frac{2\ \mathrm{sh}^2\beta(s-s_m) + 1 - |c_m|}{\mathrm{ch}^2\beta(s-s_m)}\beta^2 w^\mu = 0. \tag{3}$$

При этом имеем краевые условия:

$$w^\mu_{|s\to\pm\infty} = 0. \tag{4}$$

Получилась стандартная задача на собственные значения.

Сделаем замену

$$x = \mathrm{e}^\sigma, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}\ \frac{d}{dx} = x\frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} = x\ \frac{d}{dx}\left(x\ \frac{d}{dx}\right) = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\ \frac{d}{dx}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$x^2\frac{d^2w^\mu}{dx^2} + x\ \frac{dw^\mu}{dx} + 3\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}\ x\frac{dw^\mu}{dx} + \frac{2\cdot\frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})^2 + 1 - |c_m|}{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})^2}w^\mu = 0$$

или

$$\frac{d^2w^\mu}{dx^2} + \frac{1}{x}\ \frac{dw^\mu}{dx} + 3\frac{x^2-1}{x^2+1}\ \frac{1}{x}\ \frac{dw^\mu}{dx} +$$

$$+\frac{2(x^2-1)^2 + 4x^2 - 4|c_m|x^2}{(x^2+1)^2}\ \frac{1}{x^2}\ w^\mu = 0$$

или

$$\frac{d^2w^\mu}{dx^2} + \frac{x^2+1+3x^2-3}{(x^2+1)x}\ \frac{dw^\mu}{dx} + \frac{2x^4 - 4|c_m|x^2 + 2}{(x^2+1)^2x^2}w^\mu = 0$$

или

$$\frac{d^2w^\mu}{dx^2} + \frac{2(2x^2-1)}{(x^2+1)x}\ \frac{dw^\mu}{dx} + \frac{2(x^4 - 2|c_m|x^2 + 1)}{(x^2+1)^2x^2}w^\mu = 0. \tag{6}$$

Однако, это уравнение слишком сложное.

§3. Мировая линия протистона (автоида).

1. Уравнение автоиды. В различных системах прямого хода, определяемых по отношению к мировой линии протистона параметром γ, скорость протистона имеет вид

$$u^\mu = (\operatorname{ch}(2l\operatorname{arc\,tg} e^{\beta(s-s_m)} - \gamma),\ \mathbf{A}\operatorname{sh}(2l\operatorname{arc\,tg} e^{\beta(s-s_m)} - \gamma)), \tag{1}$$

где

$$l = \sqrt{|c_m|}, \tag{2}$$

$$\mathbf{A}^2 = 1. \tag{3}$$

Интегрируя u^μ по s, можно получить аналитическое выражение для мировой линии протистона, которую назовём **автоидой**. То есть **уравнение автоиды** имеет вид

$$x^\mu = \int\limits_{s_m}^{s} u^\mu\, ds. \tag{4}$$

Пределы интегрирования мы выбрали так, чтобы $x^\mu = 0$ при $s = s_m$. При этом s_m соответствует космологически большому значению T, то есть само велико.

Сделаем замену

$$2l\operatorname{arc\,tg} e^{\beta(s-s_m)} - \gamma = x, \quad x_{\big|s=s_m} = l\frac{\pi}{2} - \gamma, \tag{5}$$

$$\frac{2l\beta\, e^{\beta(s-s_m)}}{1 + e^{2\beta(s-s_m)}} ds = dx, \tag{6}$$

$$ds = \frac{1}{2l\beta}\frac{1 + e^{2\beta(s-s_m)}}{e^{\beta(s-s_m)}} dx = \frac{1}{l\beta}\operatorname{ch}\beta(s-s_m)\, dx. \tag{7}$$

Деля (5) на $2l$ и применяя операцию tg, получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right) = e^{\beta(s-s_m)}, \tag{8}$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\beta(s-s_m)) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)\cos\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)} = \frac{1}{\sin(x/l+\gamma/l)}, \end{aligned} \tag{9}$$

тогда

$$ds = \frac{dx}{l\beta\sin(x/l+\gamma/l)}, \tag{10}$$

$$x^\mu = \frac{1}{l\beta}\int\limits_{l\frac{\pi}{2}-\gamma}^{x} (\operatorname{ch} x,\ \mathbf{A}\operatorname{sh} x)\frac{dx}{\sin(x/l+\gamma/l)} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}(\mathrm{ch}(ly-\gamma),\ \mathbf{A}\,\mathrm{sh}(ly-\gamma)\frac{dy}{\sin y} = \frac{1}{\beta}(J_1,\ J_2\mathbf{A}), \tag{11}$$

где

$$y = x/l + \gamma/l = 2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}, \tag{12}$$

$$J_1 = \mathrm{ch}\,\gamma\ J_3 - \mathrm{sh}\,\gamma\ J_4, \tag{13}$$

$$J_2 = \mathrm{ch}\,\gamma\ J_4 - \mathrm{sh}\,\gamma\ J_3, \tag{14}$$

$$J_3 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{ch}\,ly}{\sin y}dy, \quad J_4 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{sh}\,ly}{\sin y}dy. \tag{15}$$

Здесь использованы формулы [Корн,(21.2-22)]

$$\mathrm{sh}(A \pm B) = \mathrm{sh}\,A\ \mathrm{ch}\,B \pm \mathrm{ch}\,A\,\mathrm{sh}\,B, \quad \mathrm{ch}(A \pm B) = \mathrm{ch}\,A\ \mathrm{ch}\,B \pm \mathrm{sh}\,A\,\mathrm{sh}\,B. \tag{16}$$

Из (11)

$$x^\mu x_\mu = \frac{1}{\beta^2}(J_1^2 - J_2^2) = \frac{1}{\beta^2}(\mathrm{ch}^2\gamma\ J_3^2 + \mathrm{sh}^2\gamma\ J_4^2 -$$

$$-2\mathrm{sh}\,\gamma\ \mathrm{ch}\,\gamma\ J_3J_4 - \mathrm{ch}^2\gamma\ J_4^2 - \mathrm{sh}^2\gamma\ J_3^2 + 2\mathrm{sh}\,\gamma\ \mathrm{ch}\,\gamma\ J_3J_4) =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}(\mathrm{ch}^2\gamma(J_3^2 - J_4^2) + \mathrm{sh}^2\gamma(J_4^2 - J_3^2)) = \frac{1}{\beta^2}(J_3^2 - J_4^2) =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}(J_3 - J_4)(J_3 + J_4) = \frac{1}{\beta^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{e}^{-ly}}{\sin y}dy\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{e}^{+ly}}{\sin y}dy = \frac{1}{\beta^2}J_5J_6, \tag{17}$$

где

$$J_5 = J_3 - J_4 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{e}^{-ly}}{\sin y}dy, \ \ J_6 = J_3 + J_4 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{e}^{+ly}}{\sin y}dy. \tag{18}$$

Итак 4-радиус-вектор автоиды в зависимости от параметра s принимает вид

$$x^\mu = \frac{1}{\beta}(\mathrm{ch}\,\gamma\ J_3 - \mathrm{sh}\,\gamma\ J_4,\ (\mathrm{ch}\,\gamma\ J_4 - \mathrm{sh}\,\gamma\ J_3)\mathbf{A}). \tag{19}$$

Заметим, что

$$J_5(-y) = J_6(y), \tag{20}$$

$$J_6 + J_5 = 2J_3, \tag{21}$$

$$J_6 - J_5 = 2J_4. \tag{22}$$

Таким образом достаточно знать функцию

$$J_6 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}\frac{\mathrm{e}^{ly}}{\sin y}dy. \tag{23}$$

Заметим, что
$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{y}{\pi}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{y}{\pi}\right)\ \text{[Никифоров, с. 321]}, \tag{24}$$
тогда
$$J_6 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y} \mathrm{e}^{ly}\,\Gamma\left(\frac{y}{\pi}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{y}{\pi}\right)\,dy. \tag{25}$$

Из (19) следует
$$x^0 = t = \frac{1}{\beta}(\operatorname{ch}\gamma\ J_3 - \operatorname{sh}\gamma\ J_4), \tag{26}$$
$$\mathbf{x} = \frac{1}{\beta}(\operatorname{ch}\gamma\ J_4 - \operatorname{sh}\gamma\ J_3)\mathbf{A}. \tag{27}$$

Если плоскость автоиды проходит через оси $\vec{x}^0,\ \vec{x}^1$, то
$$x^1 = \frac{1}{\beta}(\operatorname{ch}\gamma\ J_4 - \operatorname{sh}\gamma\ J_3), \quad x^2 = x^3 = 0. \tag{28}$$

2. Характерные элементы автоиды. Мы выяснили, что автоида – плоская кривая. Максимум ускорения, то есть наибольшая кривизна достигается в точке сгона $s = s_m$. Как и для массовой кривой, точка сгона s_m разбивает автоиду на две ветви – **ветвь излучения** (где $s < s_m$) и **ветвь поглощения** (где $s > s_m$). 4-скорость в точке сгона очевидно равна
$$u^\mu = (\operatorname{ch}(l\frac{\pi}{2} - \gamma),\ \mathbf{A}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2} - \gamma)), \quad s = s_m. \tag{1}$$

Интересны также две бесконечно удалённые точки $s \to \pm\infty$, где соответственно
$$u^\mu_+ = (\operatorname{ch}(l\pi - \gamma),\ \mathbf{A}\operatorname{sh}(l\pi - \gamma)), \quad s \to \infty, \tag{2}$$
$$u^\mu_- = (\operatorname{ch}(-\gamma),\ \mathbf{A}\operatorname{sh}(-\gamma)), \quad s \to -\infty. \tag{3}$$
При этом ускорение равно нулю, то есть при $s \to \pm\infty$ автоида имеет две прямолинейные асимптоты, которым соответствуют скорости u^μ_+, u^μ_-. Так как модуль 4-ускорения (а значит и кривизна) монотонно растёт при приближении к сгону, то автоида имеет форму выпуклой кривой с максимумом кривизны в точке сгона и двумя прямолинейными асимптотами на обоих концах.

Состояния протистона вдали от сгона будем называть **квазистационарными**.

3. Значения γ в разных системах отсчёта. Относительно автоиды просто определяются 3 характерные системы координат:
- система, в которой протистон неподвижен (покоится) в точке сгона $s = s_m$ (**система покоя сгона**),
- система, в которой протистон покоится в далёком прошлом $s \to -\infty$ (**система покоя до сгона**),

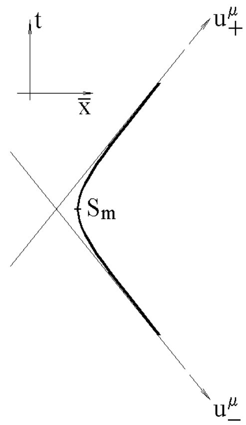


Рис. 201.7.

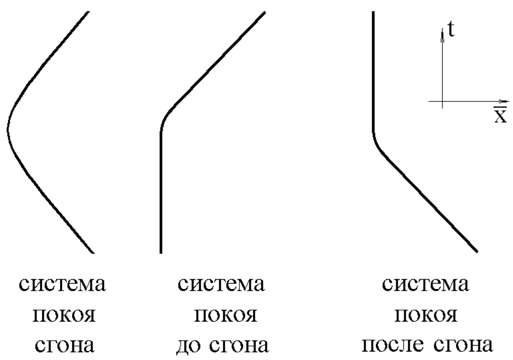


Рис. 201.8.

- система, в которой протистон покоится в далёком будущем $s \to +\infty$ (**система покоя после сгона**).

Каждой из этих систем координат соответствует своё значение γ, которое легко найти из условия равенства скорости нулю в точке покоя, то есть из условия

$$u^0 = \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma) = 1 \tag{1}$$

в точках $s = s_m,\ s \to -\infty,\ s \to +\infty$. Тогда очевидно

$$\begin{cases} \text{в системе покоя сгона } \gamma = l\pi/2, \\ \text{в системе покоя до сгона } \gamma = 0, \\ \text{в системе покоя после сгона } \gamma = l\pi. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом протистон может быть мгновенно неподвижен только в таких системах координат, для которых

$$0 \leqslant \gamma \leqslant l\pi.$$

Для любых же систем координат

$$-\infty < \gamma < \infty. \tag{3}$$

4. Связь времени с собственным временем протистона.

Рассмотрим временну́ю компоненту скорости протистона (в качестве упражнения) несколько иначе.

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{ds} = \operatorname{ch}(2l \operatorname{arc\,tg} x - \gamma), \quad x = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}.$$

Интегрируя, имеем (отсчитывая t от сгона s_m)

$$t = \int\limits_{s_m}^{s} \operatorname{ch}(2l \operatorname{arc\,tg} x - \gamma)\ ds.$$

Так как

$$dx = \beta x\ ds, \quad ds = \frac{1}{\beta x}\ dx, \quad x_{|s=s_m} = x_1 = 1, \quad x_{|s=s} = x_2 = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)},$$

то

$$t = \frac{1}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \operatorname{ch}(2l \operatorname{arc\,tg} x - \gamma)\ dx. \tag{1}$$

Сделаем замену:

$$2l \operatorname{arc\,tg} x - \gamma = y, \quad \frac{2l}{1+x^2} dx = dy, \quad x = \operatorname{tg}(\frac{y+\gamma}{2l}),$$

$$y_{|x=1} = l\frac{\pi}{2} - \gamma = y_1, \quad y_{|x=\mathrm{e}^{\beta s}} = y_2 = 2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta x} - \gamma,$$

тогда

$$t = \frac{1}{\beta l} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{1+x^2}{2x} \operatorname{ch} y\ dy.$$

Так как

$$\frac{1+x^2}{x} = \frac{1/\cos^2(\frac{y+\gamma}{2l})}{\operatorname{tg}(\frac{y+\gamma}{2l})} = \frac{1}{\sin(\frac{y+\gamma}{2l})\cos(\frac{y+\gamma}{2l})} = \frac{2}{\sin(y/l + \gamma/l)},$$

то

$$t = \frac{1}{\beta l} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\operatorname{ch} y}{\sin(y/l + \gamma/l)}\ dy = \frac{1}{\beta l} \int\limits_{y_2}^{y_2} \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2\sin(y/l + \gamma/l)}\ dy. \tag{2}$$

Сделаем замену

$$y/l + \gamma/l = z, \quad dy = l\,dz, \quad y = lz - \gamma, \quad z_{|y=l\frac{\pi}{2}-\gamma} = \frac{\pi}{2} = z_1$$

$$z_{y=2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta x} - \gamma} = 2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta x} = z_2, \quad \frac{\pi}{2} < z < 2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta s},$$

тогда

$$t = \frac{1}{2\beta l}\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}\mathrm{e}^{lz} + \mathrm{e}^{\gamma}\mathrm{e}^{-lz}}{\sin z}\ dz = \frac{1}{2\beta l}(\mathrm{e}^{-\gamma}J_1 + \mathrm{e}^{\gamma}J_2), \tag{3}$$

где

$$J_{\{{1 \atop 2}\}} = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{e}^{\pm lz}}{\sin z}\ dz. \tag{4}$$

Этот интеграл можно представить в виде предела по параметру, пользуясь формулой [Прудников, 1.5.49.16, с. 234], при этом получается наопределённость вида $0/0$, раскрывая которую по правилу Лопиталя, приходим к выражению, содержащему

$$\int \mathrm{e}^{\pm z} \sin z\ \ln \sin z\ dz,$$

где $\sin z\ ln \sin z$ можно выразить с помощью ряда [Прудников, 5.4.6.15].

Разлагая $\mathrm{e}^{\pm lz}$ в степенной ряд, можно использовать формулу для

$$\int \frac{x^p\ dx}{\sin x} \qquad \text{[Прудников 1.5.44.2, с. 228].}$$

В системе отсчёта, в которой протистон неподвижен при $s = s_m$, то есть $u^0_{|s=s_m} = 1$, следует положить $\gamma = l\pi/2$, тогда из (2)

$$t = \frac{1}{\beta l}\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\mathrm{ch}\ y}{\cos y}\ dy, \tag{5}$$

где

$$y = 2l \operatorname{arc\,tg} x - l\frac{\pi}{2}.$$

В системе отсчёта, в которой протистон неподвижен при $s \to -\infty$, то есть $u^0_{|s\to-\infty} = 1$, следует положить $\gamma = 0$, тогда из (2)

$$t = \frac{1}{\beta l}\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\mathrm{ch}\ y}{\sin y}\ dy, \tag{6}$$

где

$$y = y_2 = 2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}, \quad y_1 = l\frac{\pi}{2}.$$

§4. Характерные скорости протистона.

1. Скорости квазистационарных состояний протистона в различных системах прямого хода. Для 4-скорости протистона имеем

$$u^\mu = (\mathrm{ch}(2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma),\ \mathbf{A}\ \mathrm{sh}(2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)), \tag{1}$$

$$|\mathbf{A}|^2 = 1.$$

Рассмотрим три характерных системы прямого хода, каждой из которых соответствует своё значение γ:

2. Система покоя сгона. Систему отсчёта, в которой скорость протистона равна нулю в момент сгона, $(s = s_m)$ мы назвали **системой покоя сгона**.

В такой системе очевидно $\gamma = l\pi/2$.
Тогда

$$u^0_\pm = \mathrm{ch}\ l\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$u_\pm = \pm\mathrm{sh}\ l\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

где индекс “$-$” означает скорость до сгона, а “$+$” – после сгона.

Так как

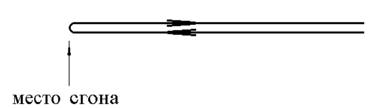
$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad 1 - v^2 = \frac{1}{(u^0)^2},$$

то

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{(u^0)^2}} = \mathrm{th}\, l\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

В системе покоя сгона протистон сначала движется к месту сгона, а затем удаляется от него в обратном направлении

Рис. 201.9.



Здесь момент сгона является как-бы неподвижным отражателем протистона. Скорости при $s \to \infty$ и $s \to -\infty$ одинаковы, по модулю и противоположны по направлению.

3. Система покоя после сгона. Систему отсчёта, в которой скорость при $s \to \infty$ равна нулю, мы назвали **системой покоя протистона после сгона**.

В такой системе очевидно $\gamma = l\pi$.
Тогда скорость до сгона $(s \to -\infty)$

$$u^0_- = \mathrm{ch}(-l\pi), \tag{1}$$

$$u_{=}\mathrm{sh}(-l\pi). \tag{2}$$

Скорость в момент сгона ($s = s_m$)

$$u_m^0 = \mathrm{ch}(l\frac{-\pi}{2}), \tag{3}$$

$$u_m = \mathrm{sh}(l\frac{-\pi}{2}). \tag{4}$$

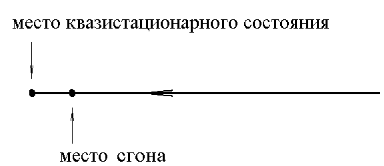
Скорость после сгона ($s \to \infty$)

$$u_+^0 = \mathrm{ch}\,0 = 1, \tag{5}$$

$$u_+ = \mathrm{sh}\,0 = 0. \tag{6}$$

В такой системе протистон движется к месту квазистационарного состояния и останавливается здесь.

Рис. 201.10.

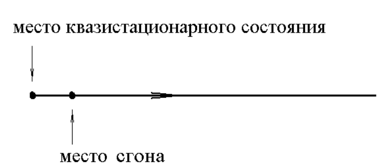


$$v_m = \sqrt{1 - \frac{1}{(u_m^0)^2}} = \mathrm{th}\,l\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

$$v^{\pm} = \mathrm{th}\,l\pi. \tag{8}$$

4. Система покоя до сгона. Систему отсчёта, в которой скорость при $s \to -\infty$ равна нулю, мы назвали **системой покоя протистона до сгона**.

Рис. 201.11.



В такой системе очевидно $\gamma = 0$.
Тогда скорость до сгона ($s \to -\infty$)

$$u_-^0 = \mathrm{ch}\ 0 = 1, \tag{1}$$

$$u_- = \mathrm{sh}\ 0 = 0. \tag{2}$$

Скорость в момент сгона ($s = s_m$)

$$u_m^0 = \mathrm{ch}\,l\frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

$$u_m = \operatorname{sh} l\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Скорость после сгона ($s \to \infty$)

$$u_+^0 = \operatorname{ch} l\pi, \tag{5}$$

$$u_+ = \operatorname{sh} l\pi. \tag{6}$$

В такой системе протистон стоит в квазистационарном состоянии, а затем быстро от него удаляется

Найдём путь, L который пройдёт протистон до момента сгона в системе покоя до сгона

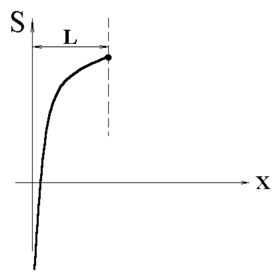


Рис. 201.12.

$$L = \int\limits_{-\infty}^{s_m} u\ ds = \int\limits_{-\infty}^{s_m} \operatorname{sh}(2l \operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)})\ ds.$$

Сделаем замену

$$\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} = y, \quad y\beta\ ds = dy, \quad y_{|s=\infty} = 0, \quad y_{|s=s_m} = 1.$$

Тогда

$$L = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^1 \frac{1}{y}\ \operatorname{sh}\ (2l \operatorname{arc\,tg} y)\ dy.$$

Сделаем замену

$$2l \operatorname{arc\,tg} y = x, \quad \frac{2l}{1+y^2}\ dy = dx,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2l} = y, \quad x_{|y=0} = 0, \quad x_{|y=1} = l\frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$L = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\frac{l\pi}{2}} \frac{1}{y}\cdot\frac{1+y^2}{2l}\ \operatorname{sh} x\ dx = \frac{1}{2\beta l}\int\limits_0^{\frac{l\pi}{2}} (\operatorname{ctg}\frac{x}{2l} + \operatorname{tg}\frac{x}{2l})\ \operatorname{sh} x\ dx =$$

$$= \frac{1}{2\beta l}\int\limits_0^{\frac{l\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} x\ dx}{\sin\frac{x}{2l}\ \cos\frac{x}{2l}} = \frac{1}{\beta l}\int\limits_0^{\frac{l\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin(x/l)}\ dx. \tag{7}$$

§5. Значение коэффициента c_m.

1. Крайние значения массы протистона. Без учёта положения в пространстве-времени, автоиду однозначно определяет всего один свободный параметр b. Из формулы

$$m = -b\,\mathrm{th}\,\beta(s - s_m) \tag{1}$$

видно, что величина $|b|$ является максимальным значением m_{max} (положительно определённой) массы

$$|b| = m_{max} = m_m, \tag{2}$$

достигаемым в пределе $s \to \pm\infty$, то есть это **значение массы квазистационарных состояний протистона**.

Минимальное значение массы достигается на сгоне автоиды (в точке s_m) и оно равно нулю

$$m_{min} = 0. \tag{3}$$

От точки сгона $s = s_m$ до $s \to \pm\infty$ масса изменяется монотонно.

2. Изменение энергии протистона на автоиде. Обмен энергией протистона с полем происходит только посредством радиации, поэтому для **мгновенного** значения энергии протистона нет понятия потенциальной энергии и можно говорить лишь о его кинетической энергии

$$\mathcal{E} = P^0 = mu^0. \tag{1}$$

Учитывая формулы для m и u^0 протистона, имеем

$$\mathcal{E} = -b\,\mathrm{th}\,\beta(s - s_m)\,\mathrm{ch}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s - s_m)} - \gamma). \tag{2}$$

Обозначим:

$\mathcal{E}_-$ – энергия протистона при $s \to -\infty$,

$\mathcal{E}_+$ – энергия протистона при $s \to +\infty$.

Тогда

$$\mathcal{E}_- = |b|u^0_- = |b|\,\mathrm{ch}\,\gamma = m_m\mathrm{ch}\,\gamma, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_+ = |b|u^0_+ = |b|\,\mathrm{ch}(l\pi - \gamma) = m_m\mathrm{ch}(l\pi - \gamma). \tag{4}$$

Изменение энергии протистона на всей автоиде

$$\Delta_\pm\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_- = |b|(\mathrm{ch}(l\pi - \gamma) - \mathrm{ch}\,\gamma). \tag{5}$$

Энергия протистона $\mathcal{E}$ достигает минимума в любой системе отсчёта, в которой существует **точка покоя автоиды**, где скорость $\mathbf{u}$ равна нулю ($u^0 = 1$). До точки покоя энергия монотонно убывает (торможение), а после неё – монотонно растёт (ускорение). В системе покоя сгона торможение и ускорение симметричны относительно сгона, то есть при $\gamma = l\pi/2$, энергия протистона на обоих концах

автоиды одинакова и равна $m_{max}\mathrm{ch}\, l\frac{\pi}{2}$. В других системах отсчёта точка минимума энергии смещается из сгона тем больше, чем больше скорость системы относительно системы покоя сгона. Если при этом u^0 превышает значение $\mathrm{e}^{l\pi/2}$, то минимум энергии на автоиде вообще исчезает, то есть энергия на всей автоиде изменяется монотонно.

Для отыскания на автоиде минимума энергии приравняем к 0 её производную по s.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s} = 0 = \frac{-b\beta}{\mathrm{ch}^2\beta(s-s_m)}\mathrm{ch}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma) -$$

$$-b\,\mathrm{th}\,\beta(s-s_m)\,\mathrm{sh}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)\frac{2l\beta \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}}{1+\mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}$$

или

$$\mathrm{ch}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\sigma} - \gamma) = -l\,\mathrm{sh}\,\sigma \cdot \mathrm{sh}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\sigma} - \gamma),$$

где

$$\sigma = \beta(s-s_m). \tag{6}$$

То есть для точки автоиды, имеющей минимум энергии (если эта точка существует) имеем уравнение

$$\mathrm{th}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\sigma} - \gamma) = \frac{-1}{l\,\mathrm{sh}\,\sigma}. \tag{7}$$

3. Вычисление величин $\mathcal{E}_-, \mathcal{E}_+$ интегрированием скорости изменения энергии протистона. Величины $\mathcal{E}_-, \mathcal{E}_+$ должны получаться интегрированием скорости изменения энергии протистона на полуавтоиде (прошлого или будущего). Проверим это. Запишем скорость изменения энергии протистона в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d(mu^0)}{dt} = u^0\frac{dm}{dt} + m\frac{du^0}{dt} = \frac{dm}{ds} + \frac{m}{u^0}\frac{du^0}{ds}. \tag{1}$$

Эта величина инвариантна. Интегрируя по интервалу излучения, имеем

$$\mathcal{E}_- = -\int\limits_{-\infty}^{t(s_m)} \frac{d\mathcal{E}}{dt}\,dt = -\int\limits_{-\infty}^{s_m} \frac{d\mathcal{E}}{dt}u^0\,ds = -\int\limits_{-\infty}^{s_m} \frac{d\mathcal{E}}{ds}\,ds =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{s_m} \left(\frac{dm}{ds} + \frac{m}{u^0}\frac{du^0}{ds}\right) u^0\,ds = -(J_1 + J_2), \tag{2}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{s_m} \frac{dm}{ds}u^0\,ds, \tag{3}$$

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{s_m} m\frac{du^0}{ds}\,ds, \tag{4}$$

u^0 берётся в системе отсчёта, определяемой параметром γ, поэтому и $\mathcal{E}_-$ найдём в этой системе.

Для массы имеем

$$m = -b\,\mathrm{th}\,(\beta(s - s_m)), \tag{5}$$

$$u^0 = \mathrm{ch}(2l\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma), \tag{6}$$

в интервале излучения

$$\frac{du^0}{ds} = \frac{i_r l\beta|\mathbf{u}|}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))} = \frac{\beta\,\mathrm{sh}(2l\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))} < 0, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\,\mathrm{sh}(2l\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma). \tag{8}$$

Дифференцируя (5), получим

$$\frac{dm}{ds} = \frac{-b\beta}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))}. \tag{9}$$

При $b > 0$ масса убывает, как и должно быть.

Сделаем замену переменных

$$2l\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma = x, \quad \frac{2l\beta\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}}{1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}ds = dx, \tag{10}$$

$$ds = \frac{1}{2l\beta}\frac{1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}{\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}}dx = \frac{1}{l\beta}\mathrm{ch}\,\beta(s - s_m)\,dx, \tag{11}$$

$$x_{|s\to-\infty} = x_1 = -\gamma, \quad x_{|s=s_m} = x_2 = l\frac{\pi}{2} - \gamma, \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right) = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}, \tag{13}$$

$$\mathrm{ch}(\beta(s - s_m)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right) + \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right)\cos\left(\frac{x}{2l} + \frac{\gamma}{2l}\right)} = \frac{1}{\sin(x/l + \gamma/l)}, \tag{14}$$

Тогда имеем

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{s_m} \frac{-b\beta}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))}\mathrm{ch}(2l\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)\,ds =$$

$$= -\frac{b}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{ch}\,x \cdot \sin(x/l + \gamma/l)\,dx =$$

[Прудников 1.5.52.2, с 236, $a = 1, b = 0, c = 1/l, d = \gamma/l$]

$$= -\frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh} x\cdot\sin(x/l+\gamma/l) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch} x\cdot\cos(x/l+\gamma/l))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= -\frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) - 0 - 0 + \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch}\gamma) =$$

$$= -\frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) + \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch}\gamma). \tag{15}$$

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{s_m} -b\operatorname{th}(\beta(s-s_m))\frac{\beta\operatorname{sh}(2l\operatorname{arc\,tg} e^{\beta(s-s_m)}-\gamma)}{\operatorname{ch}(\beta(s-s_m))}\,ds =$$

$$= \frac{-b}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)}\operatorname{sh} x\,dx =$$

$$= \frac{-b}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\sin^2\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2l}+\frac{\gamma}{2l}\right)\right)\operatorname{sh} x\,dx =$$

[Корн (21.2-8)]

$$= \frac{-b}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2}\operatorname{sh} x\,(-\cos(x/l-\gamma/l))\,dx = \frac{b}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2}\operatorname{sh} x\,\cos(x/l+\gamma/l)\,dx =$$

[Прудников 1.5.52.1, с. 235, $a=1, b=0, c=1/l, d=\gamma/l,$]

$$= \frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{ch} x\cdot\cos(x/l+\gamma/l) + \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{sh} x\cdot\sin(x/l+\gamma/l))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{b}{l}(0 + \frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) - 1l(1+1/l^2)\operatorname{ch}\gamma - 0) =$$

$$= \frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch}\gamma). \tag{16}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_- = \frac{2b}{l^2(1+1/l^2)}\operatorname{ch}\gamma. \tag{17}$$

Это совпадает с найденным ранее значением только при $l=1$.

Аналогично находим $\mathcal{E}_+$ с той лишь разницей, что

$$x_1 = x_{|s=s_m} = l\frac{\pi}{2}-\gamma,$$

$$x_2 = x_{|s\to\infty} = 2l\operatorname{arc\,tg} e^{\beta(s-s_m)} - \gamma = l\pi - \gamma,$$

$$\mathcal{E}_+ = J_1 + J_2.$$

Тогда имеем

$$J_1 = \frac{-b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh} x \cdot \sin(x/l+\gamma/l) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch} x \cdot \cos(x/l+\gamma/l))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{-b}{l}(0 - \frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch}(l\pi-\gamma)(-1)+0) =$$

$$= \frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{ch}(l\pi-\gamma)). \qquad (18)$$

$$J_2 = \frac{b}{l}(\frac{1}{1+1/l^2}\operatorname{ch} x \cdot \cos(x/l+\gamma/l) + \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{sh} x \cdot \sin(x/l+\gamma/l))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{b}{l}(\frac{-1}{1+1/l^2}\operatorname{ch}(l\pi-\gamma) - 0 + 0 - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma)) =$$

$$= \frac{b}{l}(\frac{-1}{1+1/l^2}\operatorname{ch}(l\pi-\gamma) - \frac{1}{l(1+1/l^2)}\operatorname{sh}(l\frac{\pi}{2}-\gamma)). \qquad (19)$$

Тогда, при уже найденном значении $l=1$,

$$\mathcal{E}_+ = -b\operatorname{ch}(\pi-\gamma) = m_m \operatorname{ch}(\pi-\gamma). \qquad (20)$$

Таким образом $\mathcal{E}_-, \mathcal{E}_+$ совпадают с ранее найденными значениями только при

$$l = 1. \qquad (21)$$

4. Собственные значения коэффициента c_m. Мы нашли решение уравнения движения протистона, удовлетворяющее условию обращения w^μ в ноль на бесконечности и условию $u^\mu u_\mu = 1$, при любых значениях c_m, то есть это уравнение допускает непрерывный спектр значений c_m. Однако, дифференциальное уравнение (2.7.6), записанное относительно w^μ, при условии обращения w^μ на бесконечности в ноль, имеет вид задачи на собственные значения c_m (при этом $w^\mu w_\mu$ интегрируемо). Полученное в предыдущем пункте условие

$$l = \sqrt{|c_m|} = 1 \qquad (1)$$

и определяет спектр собственных значений c_m:

$$c_m = \pm 1. \qquad (2)$$

При этом условие $i_r c_m = |c_m|$ означает равенство

$$c_m = i_r. \qquad (3)$$

Значение коэффициента $c_m = 1$, возникает также из требования равенства пространственно-подобной части реакции излучения квазиточечного заряда и

протистона. Однако этот случай имеет ограниченное применение, так как игнорирует самодвижение протистона.

Особым является тривиальное значение:

$$c_m = 0.$$

При этом, очевидно, уравнение для u^μ допускает решение

$$u^\mu = A^\mu = \mathrm{const},$$

которое удовлетворяет условию $u^\mu u_\mu = 1$ при $A^\mu A_\mu = 1$. Тогда, так как $w^\mu = 0$

$$\frac{dm}{ds} = i_r \frac{2}{3} q^2 w^\nu w_\nu = 0,$$

то есть $m = \mathrm{const}$ и масса в этом случае геометрически не определяется (разве, что в пределе) и поэтому не имеет смысла массы протистона.

Теперь из (2.5.3) можно написать

$$m_m = \frac{2}{3} q^2 \beta. \tag{4}$$

Из (1.3.3)

$$b = \frac{2}{3} q^2 \beta > 0. \tag{5}$$

Из (3.1.1) 4-скорость автоиды

$$u^\mu = (\mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma),\ \mathbf{A}\,\mathrm{sh}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)), \tag{6}$$

где

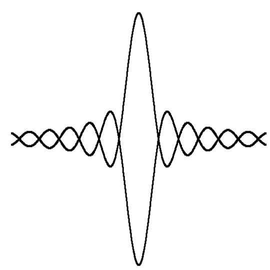
$$\mathbf{A}^2 = 1. \tag{7}$$

Выражение (6) форминвариантно, так как изменение системы отсчёта изменяет лишь значение постоянной γ и направление 3-вектора $\mathbf{A}$.

⋆⋆⋆

Глядя на Мир, нельзя не удивляться!

Козьма Прутков.



Глава 2. РАДИАЦИЯ ПРОТИСТОНА НА АВТОИДЕ.

§1. Структура электромагнитного взаимодействия протистона.

1. Сопутствующее и обменное поле. Поле протистона удобно разделить на две части:

– **сопутствующее поле**, то есть поле, энергия которого, благодаря корпускулярной калибровке потенциала, равна нулю),

– **обменное поле**, или **поле радиации**, то есть поле излучения или поглощения, с которым протистон обменивается энергией.

2. Центр инерции протистона и его поля. Поле, излучённое протистоном на сгоне, имеет вполне определённую плотность 4-импульса. Поэтому оно имеет определённую мировую линию его центра инерции (прямую вдали от сгона). Так как сам протистон точечный, то его центр инерции (без поля) совпадает в каждый момент с мировой линией протистона. В силу сохранения 4-импульса, **мировая линия общего центра инерции протистона и его поля** должна быть прямой, причём, в силу симметрии автоиды, эта прямая должна быть параллельна касательной к автоиде в точке сгона.

3. Картина радиации в области сгона. Протистон вместе со своей радиацией образует замкнутую механическую систему. Взаимодейсивие протистона с внешним полем означает не более того, что его поле радиации является частью общего электромагнитного поля, то есть принадлежит этому внешнему полю. Сила Лоренца (как мы увидим) задаёт лишь статистические параметры движения протистона при заданных статистических параметрах поля.

Рисунок даёт представление о распределении потенциалов поля радиации в области сгона. Густота линий, изображающих динамические потенциалы точек

мировой линии протистона тем больше, чем больше потенциал, но не учитывает убывание потенциала с расстоянием.

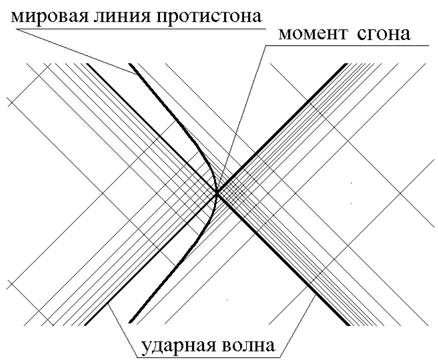


Рис. 202.1.

4. Диаграмма электромагнитного взаимодействия.

Рассмотрим замкнутую механическую систему протистон – его поле радиации в системе покоя сгона. Рисунок изображает схему (**диаграмму**) этой механической системы, то есть взаимодействие протистона с электромагнитным полем.

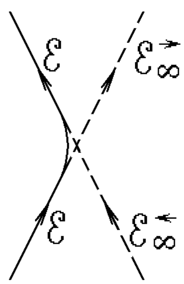


Рис. 202.2.

Мировая линия протистона (автоида) изображена сплошной линией. Энергия протистона сосредоточена на этой линии, а энергия поля распределена в пространстве, поэтому пунктирные линии показывают движение потока энергии поля условно. Точка сгона делит автоиду на две симметричные части: **полуавтоиду прошлого** и **полуавтоиду будущего**.

Процесс взаимодействия протистона с полем, в силу симметрии относительно инверсии времени, является по своему результату упругим, то есть не изменяется как энергия протистона, так и энергия поля. При этом квиз и квап инверсны во времени друг относительно друга (то есть принципиально различны).

Энергия покоя (масса) $m_{\Pi\gamma}$ этой системы, в силу замкнутости, постоянна. Значение этой энергии задолго до сгона является суммой энергии протистона $\mathcal{E} = m_m \operatorname{ch}(\pi/2)$ и **энергии радиации (поглощения) в дальней зоне прошлого** $\mathcal{E}_\infty^{\leftarrow}$

$$m_{\Pi\gamma} = m_m \operatorname{ch}(\pi/2) + \mathcal{E}_\infty^{\leftarrow}. \tag{1}$$

Много позже сгона, в силу симметрии излучения и поглощения, имеем аналогичную формулу

$$m_{\Pi\gamma} = m_m \operatorname{ch}(\pi/2) + \mathcal{E}_\infty^{\rightarrow}, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_\infty^{\rightarrow}$ – **энергия радиации (излучения) в дальней зоне будущего**.

В момент сгона энергия протистона обращается в ноль, но имеются обе компоненты энергии радиации (излучения и поглощения), поэтому имеем

$$m_{\Pi\gamma} = \mathcal{E}_\infty^{\leftarrow} + \mathcal{E}_\infty^{\rightarrow}. \tag{3}$$

Из формул (1) и (2) следует равенство

$$\mathcal{E}_\infty^{\rightarrow} = \mathcal{E}_\infty^{\leftarrow}, \tag{4}$$

которое уже известно из симметрии относительно инверсии времени. Вычитая (1) из (3) получим

$$\mathcal{E}_\infty^{\rightarrow} = m_m \operatorname{ch}(\pi/2). \tag{5}$$

Упругость взаимодействия и его симметрия относительно инверсии времени требуют равенства модуля импульсов протистона и поля как в дальней зоне прошлого так и в дальней зоне будущего. Так как модуль импульса протистона в дальней зоне равен

$$P = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m_m^2} = m_m \operatorname{sh}(\pi/2), \tag{6}$$

то и модуль импульса излучения (или поглощения) в дальней зоне равен этой же величине

$$P^{\rightarrow} = P^{\leftarrow} = m_m \operatorname{sh}(\pi/2). \tag{7}$$

Отсюда ясно, что 4-импульс излучения (то есть квиза) и поглощения (то есть квапа) не является светоподобным, хотя линии потока энергии радиации светоподобны. Иными словами, центр инерции потока энергии радиации движется со скоростью меньшей 1 (как и протистон), хотя бесконечно малые элементы этого потока имеют скорость равную 1. Это соответствует представлению об **эффективной массе радиации, равной массе протистона** (гл.2).

Не принимая во внимание обмен энергией поля и протистона в малой окрестности сгона, диаграмму электромагнитного взаимодействия в дальней зоне в системе отсчёта, сопутствующей сгону, можно изобразить в следующем общем виде (правая часть рисунка)

Такое изображение 4 импульсов относится к центрам инерции вне виража. Интересуясь энергией радиации (фотонов) в волновой зоне, можно не принимать во внимание обмен энергией поля и протистона в малой окрестности сгона.

5. Совершённая энергия излучения (поглощения) протистона на вираже. Поместим протистон внутрь некоторой (например, сферической) поверхности S достаточно далеко расположенной от виража и покоящейся относительно протистона в момент сгона. При этом решим задачу о количестве всей энергии излучения от виража, прошедшей наружу через эту поверхность. Эту энергию $\mathcal{E}_S^{\rightarrow}$ назовём **совершённой энергией излучения автоиды**. Точно также можно найти **совершённую энергию поглощения автоиды** $\mathcal{E}_S^{\leftarrow}$, отличающуюся от

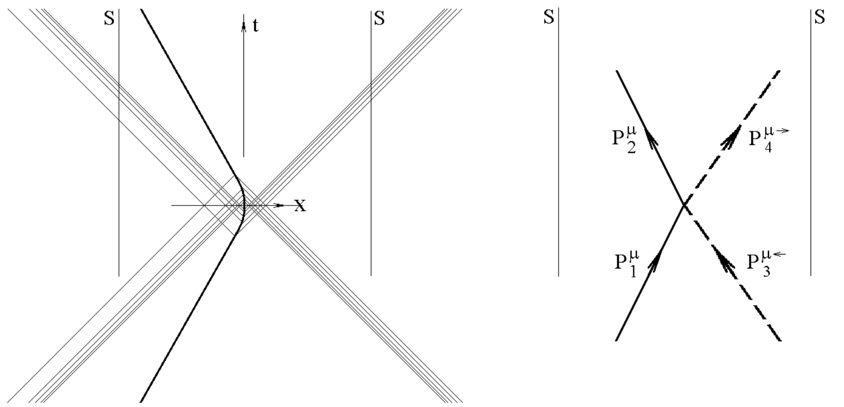


Рис. 202.3.

$\mathcal{E}_S^{\to}$ только (в силу симметрии относительно инверсии времени) противоположным направлением потока энергии через поверхность S.

6. Радиационная рекуперация. В силу линейности уравнений для электромагнитного потенциала, линии запаздывающих и опережающих потенциалов изображены на рисунке прямыми, наклонёнными под 45 градусов. Вдали от сгона такими же линиями можно схематически изобразить и линии потока 4-импульса. Вдали от сгона потоки энергии излучения и поглощения практически не пересекаются, но они существенно пересекаются вблизи сгона, что хорошо видно на левом рисунке. Так как 4 импульс зависит от 4-потенциала нелинейно (пропорционален квадрату потенциала), то линии потока 4-импульса искажаются вблизи сгона, где потенциалы велики. Например, в силу симметрии относительно инверсии во времени, можно утверждать, что на оси $\vec{x}$ направление линий плотности 4-импульса совпадает с направлением оси времени, что очевидно означает возврат части потока энергии излучения в виде части потока поглощения. Это явление мы будем называть **радиационной рекуперацией**. Вследствие рекуперации совершённая энергия излучения (поглощения), измеряемая в дальней зоне, несколько меньше полной энергии

$$\mathcal{E}_m = m_m \mathrm{ch}(\pi/2) \qquad (1)$$

излучения на вираже, то есть

$$\mathcal{E}_S^{\to} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_r = m_m \mathrm{ch}(\pi/2) - \mathcal{E}_r, \qquad (2)$$

где $\mathcal{E}_r$ – **энергия рекуперации**. Рекуперация наглядно поясняет самодействие точечного заряда.

В силу симметрии относительно инверсии времени, пространственные компоненты всех 4-х 4-импульсов, изображённых на рисунке равны друг другу по модулю, а временные компоненты 4-импульсов радиации (в силу рекуперации) несколько меньше временных компонент 4-импульсов протистонов. Поэтому на схеме угол между 4-векторами $P_4^{\mu\to}, P_3^{\mu\leftarrow}$ изображён несколько меньшим, чем между P_2^μ, P_1^μ. Эту схему можно рассматривать как **упругое столкновение**

простона с электромагнитным полем, инициируемое каждой пульсацией заряда.

7. Ультрарелятивистское представление электромагнитного взаимодействия. Ранее мы нашли, что скорость протистонов в изначальной системе отсчёта в высшей степени ультрарелятивистская, то есть значение релятивистского фактора u^0 космологически большое порядка $\sim \sqrt{T}$. Поэтому, даже в ультрарелятивистских системах отсчёта с u^0 порядка меньше $\sim \sqrt{T}$, движение протистонов остаётся ультрарелятивистским. По этой причине масса протистонов, а также квизов и квапов, космологически мала по сравнению с их энергией, а скорость практически равна 1. В таких условиях квизы и квапы можно во многих случаях рассматривать как безмассовые объекты, движущиеся со световой скоростью. В силу очень сильного релятивистского сжатия углов в направлении движения, они являются хорошо локализованными частицами электромагнитной энергии. Квизы и квапы обобщены в едином электромагнитном

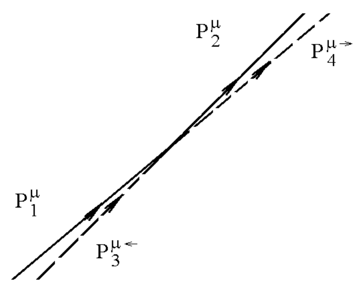


Рис. 202.4.

поле, индивидуализируясь лишь на время взаимодействия со своим протистоном.

§2. Взаимосвязи параметров автоиды.

1. Связь скорости автоиды с временем в системе прямого хода. Для анализа автоиды удобна **система координат прямого хода**, в которой траектория прямолинейна. Её начало удобно выбрать в точке сгона автоиды s_m, а оси координат направить так, чтобы

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = 1. \tag{1}$$

Соответствующую систему координат (инерциальную систему прямого хода, в которой $t = 0$ на сгоне) будем называть **занулённой системой координат автоиды**.

Тогда 4-скорость автоиды примет вид (l=1):

$$u^\mu = (\mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta s} - \gamma),\ \mathbf{e}_z \mathrm{sh}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta s} - \gamma)). \tag{2}$$

Заметим, что здесь 4-скорость u^μ является неявной функцией времени t, так как

$$u^0 = dt/ds, \tag{3}$$

где u^0 – временнáя компонента 4-скорости.

Выразив u^0, легко найти и пространственную компоненту $\mathbf{u}$, так как $\mathbf{u} = \mathbf{e}\sqrt{u^{02}-1}$. Поэтому рассмотрим временную компоненту

$$u^0 = \mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta s} - \gamma). \tag{4}$$

Отсюда следуют условия для $u^0(s)$ и для $u^0(t)$:

$$u^0(-\infty) = \mathrm{ch}(-\gamma), \quad u^0(0) = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \quad u^0(\infty) = \mathrm{ch}(\pi - \gamma). \tag{5}$$

Эти же условия можно использовать и для $u^0(t)$, выбирая нулевую постоянную интегрирования уравнения (3), из которого также следует монотонная зависимость t от s (т.к. $u^0 > 0$).

Найти явную функцию $u^0(t)$ не удаётся, но не трудно найти обратную функцию $t(u^0)$, применив несколько обратных операций:

$$\mathrm{ar\ ch}\,u^0 = 2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta s} - \gamma, \quad \frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma) = \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta s},$$

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma) = \mathrm{e}^{\beta s} > 0, \quad \ln\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma) = \beta s,$$

$$s = \frac{1}{\beta}\ln\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}u^0 + \gamma). \tag{6}$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt/ds} = \frac{1}{u^0} = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}(\ln\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u^{02}-1}}\cdot\frac{du^0}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\beta\ \sin(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)\cdot\sqrt{u^{02}-1}}\frac{du^0}{dt}$$

или

$$\frac{u^0\,du^0}{\beta\sqrt{u^{02}-1}\ \sin(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)} = dt,$$

откуда

$$t = \frac{1}{\beta}\int\limits_{u^0}^{\mathrm{ch}(\frac{\pi}{2}-\gamma)}\frac{u^0\,du^0}{\sqrt{u^{02}-1}\ \sin(\mathrm{ar\,ch}\,u^0 + \gamma)}, \tag{7}$$

где пределы интегрирования выбраны так, что для функции $t(u^0)$ выполняется условие занулённой системы координат автоиды:

$$t(u^0(0)) = t(\mathrm{ch}(\pi/2 - \gamma)) = 0. \tag{8}$$

Интервал изменения функции $u^0(t)$ ограничен пределами $u^0(-\infty) = \operatorname{ch}(-\gamma)$, $u^0(\infty) = \operatorname{ch}(\pi-\gamma)$, причём, какой из этих пределов больше другого, зависит от значения γ. Знак t связан со знаком разности $\operatorname{ch}(\pi/2) - u^0$.

2. 3-ускорение автоиды. Выразим время t на автоиде через модуль 3-скорости v. Для этого используем выражения

$$t = \frac{1}{\beta} \int\limits_{u^0}^{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{2}-\gamma)} \frac{u^0\,du^0}{\sqrt{u^{02}-1}\,\sin(\operatorname{ar\,ch} u^0 + \gamma)}, \tag{1}$$

где пределы изменения $u^0(t)$:

$$u^0(-\infty) = \operatorname{ch}(-\gamma),\ u^0(\infty) = \operatorname{ch}(\pi-\gamma) \tag{2}$$

и

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{3}$$

Для v получим

$$v^2 = 1 - \frac{1}{u^{02}},\quad v = \frac{\sqrt{u^{02}-1}}{u^0}, \tag{4}$$

$$v_{|u^0=\operatorname{ch}(\pi/2-\gamma)} = \frac{\operatorname{sh}(\pi/2-\gamma)}{\operatorname{ch}(\pi/2-\gamma)} = \operatorname{th}(\pi/2-\gamma),\quad v_{|u^0=u^0} = v. \tag{5}$$

Используя [Корн, 21.2-37], получим

$$\operatorname{ar\,ch} u^0 = \ln(u^0 + \sqrt{u^{02}-1}) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}. \tag{6}$$

$$du^0 = \frac{v}{(1-v^2)^{3/2}}\,dv. \tag{7}$$

Тогда

$$t = \frac{1}{\beta} \int\limits_{v}^{\operatorname{th}(\pi/2-\gamma)} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} + \gamma\right)} \cdot \frac{v}{(1-v^2)^{3/2}}\,dv =$$

$$= \frac{1}{\beta} \int\limits_{v}^{\operatorname{th}(\pi/2-\gamma)} \frac{dv}{(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} + \gamma\right)} =$$

$$= \frac{-1}{\beta} \int\limits_{\operatorname{th}(\pi/2-\gamma)}^{v} \frac{dv}{(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} + \gamma\right)}, \tag{8}$$

где пределы изменения $v(t)$:

$$v(-\infty) = \operatorname{th}(-\gamma),\ v(\infty) = \operatorname{th}(\pi-\gamma), \tag{9}$$

откуда для **ускорения** a **автоиды в направлении скорости** имеем [Курант, гл.2,§4,п.1,с.136]

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{\beta(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}+\gamma\right)} = \frac{f_v}{\beta}, \tag{10}$$

где

$$f_v = \frac{-1}{(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}+\gamma\right)}. \tag{11}$$

И так

$$a(v) = \frac{\beta}{f_v} = -\beta(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}+\gamma\right). \tag{12}$$

3. Ускорение автоиды в момент сгона. На сгоне $v = \text{th}(\pi/2-\gamma)$. Тогда здесь

$$f_v = \frac{-1}{(1-\text{th}^2(\pi/2-\gamma))^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-\text{th}(\pi/2-\gamma)}{1+\text{th}(\pi/2-\gamma)}+\gamma\right)} =$$

$$= -\frac{\pm\text{ch}^3(\pi/2-\gamma)}{\sin\left(\frac{1}{2}\ln(\text{ch}(\pi/2-\gamma)+\text{sh}(\pi/2-\gamma))^2+\gamma\right)} =$$

$$= \frac{\mp\text{ch}^3(\pi/2-\gamma)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\gamma+\gamma)} = \mp\text{ch}^3(\pi/2-\gamma). \tag{1}$$

Откуда

$$a(0) = \mp\beta/\text{ch}^3(\gamma-\pi/2). \tag{2}$$

Так как ускорение a может быть отрицательным, то при возведении в степень 1/2 мы не можем игнорировать отрицательные значения, откуда возникло $\pm$.

Очевидно кривая $a(v)$ не симметрична относительно сгона, где $v = \text{th}(\gamma-\pi/2)$.

§3. Излучение автоиды.

1. Радиация автоиды. В этом параграфе мы вычислим **излучение автоиды** (в смысле излучения точечного заряда q, мировая линия которого является автоидой). Излучению соответствует только половина автоиды, то есть её часть от $s = -\infty$ до точки сгона s_m. Остальная часть автоиды симметрична в собственном времени относительно точки s_m и соответствует **поглощению автоиды**, которое отличается от излучения только инверсией времени. Поэтому для вычисления полной **радиации автоиды** достаточно вычислить лишь её излучение. Ультрарелятивистскому движению автоиды в инерциальной системе прямого хода соответствует большое значение модуля константы γ. Для анализа излучения удобно считать, что в окрестности точки s_m происходит торможение. При этом надо соответственно выбрать направление осей координат.

Заметим, что в инерциальной системе прямого хода ускорение протистона является чисто продольным, что не характерно для движения заряженной частицы под действием силы Лоренца [Багров, с.58].

Для поля излучения точечного заряда у нас есть формула (I.12.2.3.1)

$$\mathbf{E}^{\rightarrow}(t) = \frac{q}{R}\frac{[\mathbf{n}[(\mathbf{n}-\mathbf{v})\mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{nv})^3}, \quad \mathbf{H}^{\rightarrow} = [\mathbf{n}\mathbf{E}^{\rightarrow}], \quad \mathbf{R} = \mathbf{n}R, \tag{1}$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в момент излучения $t' = t - R$,

$\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении излучения,

$\mathbf{R}$ – радиус-вектор, направленный от заряда в точку наблюдения,

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt'$.

Здесь электромагнитное поле излучения мы пометили индексом $\rightarrow$. Этот индекс мы будем использовать для **поля излучения отдельного протистона**, когда надо отличить его от **поля поглощения отдельного протистона**, которое мы будем помечать индексом $\leftarrow$. Эти же индексы мы будем использовать для различения и других полей излучения и поглощения **отдельного протистона**. Используя такие обозначения можно, например, для электромагнитного поля поглощения протистона, записать

$$\mathbf{E}^{\leftarrow}(t) = \mathbf{E}^{\rightarrow}(-t). \tag{2}$$

2. Ультрарелятивистский случай для автоиды. Выражение (2.1.5)

$$u^0(0) = \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi/2-\gamma} + \mathrm{e}^{-\pi/2+\gamma}\right) \tag{1}$$

показывает, что релятивистский фактор $u^0(0)$ в точке сгона зависит от параметра γ автоиды, имея минимум при

$$\gamma = \gamma_{min} = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

При значении $\gamma = \pi/2$ скорость v протистона в момент сгона равна нулю ($u^0 = 1$). Движение выглядит как отражение от точки в момент $t = 0$ (**точка возврата**).

Ниже мы покажем, что протистоны в изначальной системе движутся со скоростью порядка $u^0 \sim \sqrt{T}$, чему соответствует, согласно (1), значение γ порядка

$$\gamma \sim \ln u^0(0) \sim \ln T, \tag{3}$$

поэтому для исследования излучения автоиды удобно брать γ того же порядка, при этом практически точно

$$u^0 = |\mathbf{u}| \gg 1, \tag{4}$$

то есть имеем сугубо **ультрарелятивистский случай**. В этом случае

$$u^0 = \mathrm{ch}(x-\gamma) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x+\gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma}\mathrm{e}^{-x} \gg 1, \tag{5}$$

где

$$x = 2\mathrm{arc\,tg\,e}^{\beta s}, \tag{6}$$

откуда

$$x = -\ln(2e^{-\gamma}u^0) = -\ln u^0 - \ln 2 + \gamma, \quad u^0 \gg 1. \tag{7}$$

Из (2.1.5)

$$u^0(-\infty) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma},\ u^0(\infty) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma-\pi}, \tag{8}$$

откуда видно, что от одного конца автоиды до другого релятивистский фактор в ультрарелятивистском случае изменяется в $\mathrm{e}^{\pi} = 23,14$ раз, то есть возрастает или убывает, в зависимости от временно́й ориентации выпуклости сгона в гиперплоскости автоиды. Из (1) следует, что γ – параметр, определяющий значение u^0 в точке сгона. В ультрарелятивистском случае

$$u^0(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \tag{9}$$

Значение u^0 в других точках зависит также от β и от ориентации кривой в её плоскости.

Назовём
$u^0 = (1/2)\mathrm{e}^{\gamma-x}$ – (**ультрарелятивистским**) **фактором скорости автоиды**,
$(1/2)\mathrm{e}^{\gamma}$ – **внешним фактором скорости автоиды**,
e^{-x} – **внутреним фактором скорости автоиды**.

3. Поле излучения автоиды. Пусть в занулённой системе координат автоиды направление скорости совпадает с направлением оси $\vec{z}$, а направление ускорения противоположно ему. Тогда

$$[\mathbf{n}[(\mathbf{n}-\mathbf{v})\mathbf{a}]] = [\mathbf{n}[\mathbf{na}]] = \quad [\text{Корн}, (5.2-12)]$$

$$= \mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}(\mathbf{nn}) = \mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}, \tag{1}$$

$$1 - \mathbf{nv} = 1 - \mathbf{nv}_z = 1 - v\cos\vartheta, \tag{2}$$

где ϑ – угол между направлением оси $\vec{z}$ и вектором $\mathbf{R}$.

Тогда электрическое поле излучения автоиды:

$$\mathbf{E}^{\rightarrow}(t) = \frac{q}{R}\frac{\mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}}{(1-\mathbf{nv})^3}, \tag{3}$$

где величины справа берутся в момент излучения.

Рассмотрим поле излучения в точке наблюдения, расположенной в **плосковолновой зоне**. При этом **точка наблюдения неподвижна** ($r = \mathrm{const}$) (см. Рис.202.5). Векторы $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}'$ можно рассматривать и как функции $\mathbf{R}(t), \mathbf{r}'(t)$ и как функции $\mathbf{R}(t'), \mathbf{r}'(t')$, где t и t' связаны между собой ($t = t' + R$).

$$R^{\mu} = (\mathbf{R}, R^0), \quad |\mathbf{R}| = R^0 = R, \quad t = t' + R, \quad R \geqslant 0, \quad t' \leqslant 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

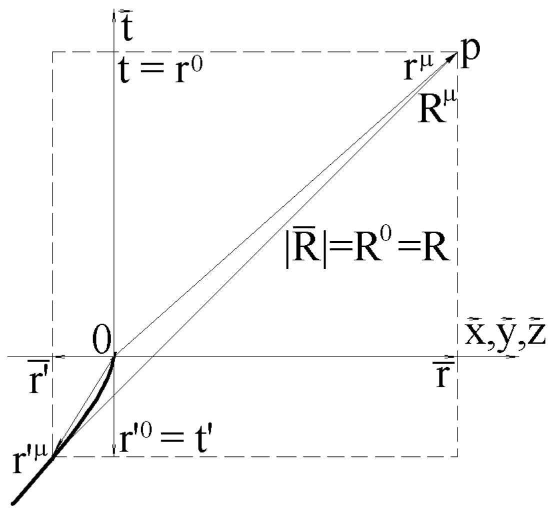


Рис. 202.5.

4. Поле излучения автоиды в спектральном представлении. Вектор $\mathbf{E}^{\rightarrow}$ в неподвижной точке наблюдения p, является функцией времени t. Её компонента Фурье (при $A_F = 1$) в этой точке на частототе ω:

$$\mathbf{E}^{\rightarrow}_{\omega}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{R} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}}{(1 - \mathbf{nv})^3} \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt. \tag{1}$$

Преобразуемое выражение задано как функция от x'^{μ}. Тогда интеграл удобно брать по t', поэтому сделаем замену переменной $t = t' + R$. Для этого надо знать производную $\partial t'/\partial t$, для чего продифференцируем соотношение $R = t - t'$ по t

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{2}$$

Дифференцируя тождество $R^2 = \mathbf{R}^2$, имеем

$$2R\frac{\partial R}{\partial t'} = 2\mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -2\mathbf{R}\mathbf{v}(t'), \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{v}(t'), \tag{3}$$

($\mathbf{R}$ направлен против $\vec{t}$). Тогда

$$-\frac{\mathbf{Rv}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{\partial t'}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{Rv}}{R}} = \frac{1}{1 - \mathbf{nv}}, \tag{4}$$

тогда

$$dt = (1 - \mathbf{nv})\, dt'. \tag{5}$$

Теперь, фиксируя R, что не препятствует изменению t и t' при интегрировании, получим

$$\mathbf{E}^{\to}_{\omega}(\omega) = \frac{q}{R}\mathrm{e}^{-i\omega R}J^{\to}, \tag{6}$$

где

$$J^{\to} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}}{(1-\mathbf{nv})^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,dt', \tag{7}$$

множитель $\mathrm{e}^{-i\omega R}$ отражает изменение фазы волны в зависимости от положения точки наблюдения.

Ясно, что излучению протистона соответствует часть интеграла в пределах $(-\infty, 0)$, а поглощению – часть $(0, \infty)$, поэтому, рассматривая излучение, мы выбрали нулевой верхний предел интегрирования.

Заметим, что полученная формула общая для любого **прямолинейного** движения точечного заряда независимо от наличия или отсутствия силы Лоренца.

Величина $(1/4\pi)\mathbf{E}^{\to 2} = W^{\to} = S^{\to}$ имеет смысл **интенсивности излучения в данной точке**.

5. Совершённая энергия излучения автоиды. Как было показано, интенсивность излучения I в пространстве, свободном от 4-тока, равна плотности энергии W этого излучения. Рассмотрим эту интенсивность, то есть плотность энергии излучения автоиды в заданной точке наблюдения p:

$$I^{\to} = W^{\to} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}^{\to 2}. \tag{1}$$

Так как автоида имеет существенное ускорение только на вираже, то есть в окрестности сгона, то всё излучение автоиды ограничено во времени и можно говорить о **совершённой энергии излучения автоиды** $\mathcal{E}^{\to}_S$, понимая её как интеграл от энергии, излучённой автоидой за всё время, что можно записать в виде

$$\mathcal{E}^{\to}_S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I^{\to}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int W^{\to}R^2\,do\,dt. \tag{2}$$

При этом можно говорить и о **плотности совершённой энергии** $W^{\to}_S$ в данной точке наблюдения, понимая её как интеграл от интенсивности (то есть плотности энергии) излучения в этой точке за всё время

$$W^{\to}_S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I^{\to}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W^{\to}\,dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}^{\to 2}\,dt. \tag{3}$$

Сравнивая выражения для $\mathcal{E}^{\to}_S$ и $W^{\to}_S$, получим

$$\mathcal{E}^{\to}_S = \int W^{\to}_s R^2\,do. \tag{4}$$

Баланс 4-импульса с протистоном требует

$$\mathcal{E}_S^{\rightarrow} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_r = m_m \operatorname{ch}(\pi/2) - \mathcal{E}_r. \tag{5}$$

Аналогично можно вообще говорить и о **совершённом 4-импульсе излучения**. Заметим, что он **времениподобный**, а не **светоподобный**.

6. Спектрально-угловое распределение совершённой энергии излучения автоиды. В силу интегрируемости квадрата ускорения по времени, зависимость интенсивности излучения от времени – тоже интегрируемая функция времени, поэтому её спектральное представление тоже интегрируемо (по частоте) и интегралы этих двух представлений (временно́го и частотного) просто связаны друг с другом [Ландау 2, с.157]. Действительно, будем рассматривать поля, обращающиеся в нуль при $t = \pm\infty$. Пусть f – одно из таких полей, например, одна из компонент векторных полей $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. Тогда имеем разложение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega, \tag{1}$$

причём компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt, \tag{2}$$

при этом, ввиду вещественности функции $f(t)$,

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \tag{3}$$

С точностью до постоянного множителя, квадрат $f^2(t)$ имеет смысл плотности энергии (интенсивности) волны. Выразим **совершённую плотность волны**, то есть интеграл от f^2 по всему времени, через интенсивность компонент Фурье. С помощью (1),(2) имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f_\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{e}^{i\omega t}\, dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega}\, d\omega$$

или, учитывая (3)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} |f_\omega|^2\, d\omega. \tag{4}$$

В частности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{\to 2}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\mathbf{E}_{\omega}^{\to}|^2\, d\omega,$$

откуда

$$W_S^{\to} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}^{\to 2}\, dt = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2}|\mathbf{E}_{\omega}^{\to}|^2\, d\omega. \qquad (5)$$

Тогда совершённую энергию излучения автоиды можно записать в виде

$$\mathcal{E}_S^{\to} = \int\int_{0}^{\infty} \frac{R^2}{4\pi^2}|\mathbf{E}_{\omega}^{\to}|^2\, d\omega\, do, \qquad (6)$$

где подинтегральное выражение, очевидно, представляет собой **спектрально-угловое распределение совершённой энергии излучения автоиды**, то есть величину [Багров, (5.25), с.274]

$$\frac{d\mathcal{E}_S^{\to}}{do \cdot d\omega} = \frac{R^2}{4\pi^2}|\mathbf{E}_{\omega}^{\to}|^2. \qquad (7)$$

Совершённая энергия излучения $\mathcal{E}_S^{\to}$ представлена здесь как **аддитивная величина**, распределённая в угловом и частотном пространстве.

Подставляя значение $\mathbf{E}_{\omega}^{\to}$ для излучения автоиды (4.6), получим

$$\frac{d\mathcal{E}_S^{\to}}{do \cdot d\omega} = \frac{q^2}{4\pi^2}\left|\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}}{(1-\mathbf{nv})^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\, dt'\right|^2. \qquad (8)$$

Напомним, что здесь t' определяет момент излучения и в этот же момент определяются все подинтегральные величины.

Множитель

$$\mathbf{f} = \mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a}$$

возведём в квадрат

$$\mathbf{f}^2 = (\mathbf{n}(\mathbf{na}) - \mathbf{a})^2 = (\mathbf{na})^2 - 2(\mathbf{na})^2 + \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^2\cos^2\vartheta = \mathbf{a}^2\sin^2\vartheta,$$

откуда

$$\mathbf{f} = \pm\mathbf{a}\sin\vartheta.$$

Так как направление вектора $\mathbf{a}$ в условиях задачи для автоиды неизменно в интервале интегрирования, а интеграл берётся по модулю, то в выражении (8) вещественный вектор $\mathbf{f}$ можно заменить на его модуль

$$f = a\sin\vartheta,$$

то есть выражение (8) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}_S^{\to}}{do\cdot d\omega}=\frac{q^2}{4\pi^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{a\sin\vartheta}{(1-\mathbf{nv})^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,dt'\right|^2. \tag{9}$$

§4. Радиация автоиды в волновой зоне.

1. Спектрально-угловое распределение в волновой зоне.
Нас интересует спектр излучения автоиды в далёкой волновой зоне, где расстояние до зоны излучения автоиды (виража) много больше размера этой зоны. На этом расстоянии угол, под которым видна эта зона, зависит от положения наблюдателя, но практически не зависит от времени t', так как отрезок этого времени, существенный для излучения, очень мал. Поэтому множитель $\sin\vartheta$ можно вынести за знак интегрирования по времени. Тогда, заметив, что

$$\mathbf{nv}=v\cos\vartheta,\quad a=\frac{dv}{dt'},\quad t'=t'(v), \tag{1}$$

получим

$$\frac{d\mathcal{E}_S^{\to}}{do\cdot d\omega}=\frac{q^2}{4\pi^2}|J_v^{\to}|^2=\frac{q^2}{4\pi^2}J_v^{\to}J_v^{\to *}, \tag{2}$$

где

$$J_v^{\to}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,dt'=\int\limits_{v(-\infty)}^{v(0)}\frac{\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'(v)}\,dv. \tag{3}$$

Пределы интегрирования $v(-\infty),v(0)$ найдём из условий (2.1.5):

$$u^0(-\infty)=\mathrm{ch}(-\gamma),\ u^0(0)=\mathrm{ch}(\pi/2-\gamma), \tag{4}$$

откуда получаем

$$1-v^2(-\infty)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(-\gamma)},\ 1-v^2(0)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\pi/2-\gamma)},$$

$$v^2(-\infty)=1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(-\gamma)},\ v^2(0)=1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\pi/2-\gamma)},$$

$$v(-\infty)=\mathrm{th}(-\gamma),\ v(0)=\mathrm{th}(\pi/2-\gamma). \tag{5}$$

Очевидно, излучение симметрично относительно оси z. Из (3) видно, что $J_v^{\to}$ есть ни что иное как Фурье-изображение величины $a/(1-v\cos\vartheta)^2$.

С учётом [Корн, (21.2-25), с.727], найдём длину интервала изменения v:

$$l_v=\mathrm{th}(-\gamma)-\mathrm{th}(\gamma-\pi/2)=\frac{\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{ch}(-\gamma)\,\mathrm{ch}(\gamma-\pi/2)}. \tag{6}$$

В **ультрарелятивистском случае** $\gamma \gg \pi$ и тогда

$$l_v = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\mathrm{e}^{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma-\pi/2}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{2\gamma}} \approx \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{2\ln u^0}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{u^{02}} = \mathrm{e}^{\pi}(1-v^2) \approx 2\mathrm{e}^{\pi}(1-v). \tag{7}$$

Постоянный параметр γ имеет тот же порядок величины, что и $\ln u^0$:

$$u^0 \sim \mathrm{e}^{\gamma}. \tag{8}$$

То есть изменение u^0 на вираже сказывается на γ логарифмически.

2. Спектральное распределение в волновой зоне. [21.09.10]. Интересуясь интегральным по всем направлениям распределением излучения по частоте, найдём **спектральную плотность энергии излучения автоиды**:

$$W_{\omega}^{\rightarrow} = \frac{d\mathcal{E}_S^{\rightarrow}}{d\omega} = \int \frac{d\mathcal{E}_S^{\rightarrow}}{do \cdot d\omega} do = \frac{q^2}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |J_v^{\rightarrow}|^2 \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{q^2}{2\pi} J_{\omega}^{\rightarrow}, \tag{1}$$

где, после интегрирования по φ, обозначено

$$J_{\omega}^{\rightarrow} = \int_0^{\pi} |J_v^{\rightarrow}|^2 \, d\vartheta. \tag{2}$$

Интегрируя $W_{\omega}^{\rightarrow}$ по ω, вернёмся к совершённой энергии излучения автоиды:

$$\mathcal{E}_S^{\rightarrow} = \int_0^{\infty} W_{\omega}^{\rightarrow} \, d\omega = \frac{q^2}{2\pi} \int_0^{\infty} J_{\omega}^{\rightarrow} \, d\omega = \frac{q^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} |J_v^{\rightarrow}|^2 \, d\vartheta \, d\omega. \tag{3}$$

3. Независимость волн излучения и поглощения в волновой зоне. Существенная часть поля радиации автоиды излучается и поглощается её двумя небольшими смежными участками вблизи сгона. В волновой зоне волна этого излучения наблюдается много позже момента сгона, а волна поглощения – много раньше момента сгона. То есть в волновой зоне волны излучения и поглощения не интерферируют друг с другом (**независимы**, в отличие от ближней зоны). Это иллюстрируется рисунком 202.6.

4. Спектр радиации автоиды. Вычисление величин, относящихся к поглощению, отличается от вычисления величин, относящихся к излучению, только заменой интеграла

$$J_v^{\rightarrow} = \int_{-\infty}^{0} \frac{a \sin\vartheta}{(1 - v\cos\vartheta)^2} \mathrm{e}^{-i\omega t'} \, dt' = \int_0^{\infty} \frac{a \sin\vartheta}{(1 - v\cos\vartheta)^2} \mathrm{e}^{i\omega t'} \, dt', \tag{1}$$

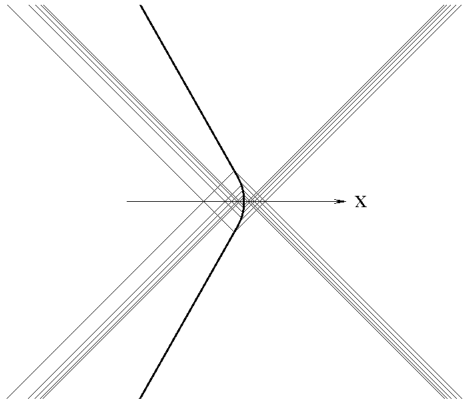


Рис. 202.6.

на интеграл

$$J_v^{\leftarrow} = \int\limits_0^{\infty} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,dt' = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{i\omega t'}\,dt', \tag{2}$$

что сводится к замене лишь знака при ω. Величина же $J_\omega^{\rightarrow}$ не чувствительна к замене этого знака. Поэтому

$$W_\omega^{\rightarrow} = W_\omega^{\leftarrow},\ J_\omega^{\rightarrow} = J_\omega^{\leftarrow},\ \mathcal{E}_S^{\rightarrow} = \mathcal{E}_S^{\leftarrow},\ J_{\mathcal{E}}^{\rightarrow} = J_{\mathcal{E}}^{\leftarrow}, \tag{3}$$

где величины помеченные знаком $\rightarrow$, относятся к излучению, а величины, помеченные знаком $\leftarrow$, относятся к поглощению. Это является следствием **совпадения спектров излучения и поглощения с точностью до знака частоты**.

Интеграл $J_v^{\rightarrow}$, очевидно, можно представить также в виде

$$J_v^{\rightarrow} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,dt' + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\mathrm{e}^{i\omega t'}\,dt' =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\cos(\omega t')\,dt', \tag{4}$$

так же представляется и интеграл $J_v^{\leftarrow}$, поэтому

$$J_v^{\rightarrow} = J_v^{\leftarrow} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\cos(\omega t')\,dt' = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\cos(\omega t')\,dt'. \tag{5}$$

Таким образом оба эти интеграла вещественны

$$\mathrm{Im}\,J_v^{\rightarrow} = \mathrm{Im}\,J_v^{\leftarrow} = 0 \tag{6}$$

и равны друг другу.

Процесс излучения отличается от процесса поглощения только изменением направления во времени. Величина

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_S^{\rightarrow} + \mathcal{E}_S^{\leftarrow} = 2\mathcal{E}_m - 2\mathcal{E}_r = 2m_m \mathrm{ch}(\pi/2) - 2\mathcal{E}_r, \tag{7}$$

является **совершённой энергией радиации**, то есть суммарной энергией поглощения и излучения, прошедшей через достаточно большую сферу с центром на сгоне (**сферу наблюдения**) за всё время наблюдения. Компоненты $\mathcal{E}_S^{\rightarrow}, \mathcal{E}_S^{\leftarrow}$ входят в $\mathcal{E}_S$ независимо друг от друга, так как в волновой зоне излучение и поглощение не пересекаются друг с другом. Итак **энергия спектра радиации равна сумме энергий спектров излучения и поглощения**.

Величина $\mathcal{E}_S$ является суммарной энергией квиза и квапа. Для радиации в целом можно определить величины (без стрелочек)

$$W_\omega = 2W_\omega^{\rightarrow},\ J_\omega = 2J_\omega^{\rightarrow},\ \mathcal{E}_S = 2\mathcal{E}_S^{\rightarrow},\ J_{\mathcal{E}} = 2J_{\mathcal{E}}^{\rightarrow}, \tag{8}$$

аналогичные величинам для излучения (поглощения), но удвоенные.

5. Спектральная плотность вероятности радиации.
Перепишем $\mathcal{E}_S^{\rightarrow}$ в виде

$$\mathcal{E}_S^{\rightarrow} = \mathcal{E}_S^{\leftarrow} = \frac{q^2}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_\omega^{\rightarrow}\,d\omega = \int\limits_0^\infty W_\omega^{\rightarrow}\,d\omega = \int\limits_0^\infty \mathcal{E}_S^{\rightarrow}\,w^{\rightarrow}\,d\omega = \mathcal{E}_S^{\rightarrow}\int\limits_0^\infty w^{\rightarrow}\,dw, \tag{1}$$

где величина $w^{\rightarrow}$ определена равенством

$$W_\omega^{\rightarrow} = \frac{d\mathcal{E}_S^{\rightarrow}}{d\omega} = \mathcal{E}_S^{\rightarrow}\,w^{\rightarrow}, \tag{2}$$

при этом $w^{\rightarrow}$ имеет смысл **спектральной плотности вероятности излучения автоиды**, так как из (1) следует

$$\int_0^\infty w^{\rightarrow}\,dw = 1. \tag{3}$$

То есть под **спектральной плотностью вероятности излучения** понимается отношение спектральной плотности энергии излучения к полной энергии $\mathcal{E}_S^{\rightarrow}$ излучения. Величина $w^{\rightarrow}d\omega$ показывает – какая часть полной энергии излучения $\mathcal{E}_S$ излучается в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

Плотность вероятности поглощения будет, конечно такой же. И такой же будет плотность вероятности радиации, так как величины $W_\omega^{\rightarrow}, \mathcal{E}_S^{\rightarrow}$ удваиваются совместно. Для радиации можно написать аналогичные формулы как для излучения:

$$\mathcal{E}_S = \int\limits_0^\infty W_\omega\,d\omega = \int\limits_0^\infty \mathcal{E}_S\,w\,d\omega = \mathcal{E}_S\int\limits_0^\infty w\,dw = \frac{q^2}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_\omega\,d\omega = 2\mathcal{E}_S^{\rightarrow}, \tag{4}$$

где

$$W_\omega = \frac{d\mathcal{E}_S}{d\omega} = \mathcal{E}_S\, w, \tag{5}$$

w – **спектральная плотность вероятности радиации автоиды**,

$$w = w^{\to}. \tag{6}$$

6. Средняя частота радиации автоиды. Тогда для **средней частоты радиации** (в системе покоя сгона) найдём интеграл

$$\bar{\omega} = \int\limits_0^\infty \omega w\, d\omega = \int\limits_0^\infty \frac{\omega W_S}{\mathcal{E}_S}\, d\omega = \frac{1}{\mathcal{E}_S}\, J_s, \tag{1}$$

где

$$w = \frac{W_\omega}{\mathcal{E}_S}, \tag{2}$$

$$J_s = \int\limits_0^\infty \omega W_\omega\, d\omega = \frac{q^2}{2\pi} \int\limits_0^\infty \omega J_\omega\, d\omega. \tag{3}$$

Тогда, учитывая (4.4), получаем

$$\bar{\omega} = \frac{\int\limits_0^\infty \omega J_\omega\, d\omega}{\int\limits_0^\infty J_\omega\, d\omega}. \tag{4}$$

7. Безразмерная константа радиации. Рассмотрим отношение

$$\hbar_0 = \frac{\mathcal{E}_S}{\bar{\omega}} = \frac{\mathcal{E}_S u^0}{\bar{\omega} u^0} = \frac{\mathcal{E}'_S}{\bar{\omega}'}, \tag{1}$$

которое назовём **волновым параметром радиации**. Как энергия так и частота преобразуются одинаково, так как являются временны́ми координатами 4-векторов, соответственно, – 4-импульса и волнового 4-вектора. Поэтому $\hbar_0$ является инвариантной в преобразованиях Лоренца величиной. Раскрывая $\mathcal{E}_S$ и $\bar{\omega}$, представим её в виде

$$\hbar_0 = \frac{\mathcal{E}_S}{\bar{\omega}} = \frac{q^2}{\alpha_0}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_0 = q^2 \frac{\bar{\omega}}{\mathcal{E}_S} = \frac{2\pi \int\limits_0^\infty \omega J_\omega(\omega)\, d\omega}{\left(\int\limits_0^\infty J_\omega(\omega)\, d\omega\right)^2} = \frac{2\pi \int\limits_0^\infty \omega J_\omega(k_\omega \omega)\, d\omega}{\left(\int\limits_0^\infty J_\omega(k_\omega \omega)\, d\omega\right)^2} \tag{3}$$

– безразмерная инвариантная постоянная, которую мы будем называть **безразмерной константой радиации**. Её обозначение намекает на связь с постоянной тонкой структуры.

Очевидно, что **произвольный постоянный множитель** k_ω **не изменяет значения** α_0.

В системе координат сопутствующей сгону, полная энергия излучения, то есть энергия спектра излучения равна $m_m\mathrm{ch}(\pi/2)$. А **энергия спектра радиации**:

$$\mathcal{E}_S = 2m_m\mathrm{ch}(\pi/2) - 2\mathcal{E}_r = \frac{4}{3}q^2\beta\,\mathrm{ch}(\pi/2) - 2\mathcal{E}_r = 5,018356957\ldots m_m - 2\mathcal{E}_r \tag{4}$$

и, следовательно, $\hbar_0$ можно записать в виде

$$\hbar_0 = 2\frac{m_m\mathrm{ch}(\pi/2) - \mathcal{E}_r}{\bar\omega} = \frac{q^2}{\alpha_0}. \tag{5}$$

где $\bar\omega$ – средняя частота радиации автоиды в системе покоя сгона.

Тогда α_0 можно выразить в виде

$$\alpha_0 = \frac{q^2\bar\omega}{2m_m\mathrm{ch}(\pi/2) - 2\mathcal{E}_r} = \frac{3\bar\omega}{4\beta\,\mathrm{ch}(\pi/2) - 6\mathcal{E}_r}. \tag{6}$$

8. Масштабный фактор автоиды. Уравнение движения протистона (2.1.4) в системе покоя сгона можно записать в виде

$$\frac{d^2u^\mu}{d(\beta s)^2} + \mathrm{th}(\beta s)\frac{du^\mu}{d(\beta s)} - |c_m|\,\frac{u^\mu}{\mathrm{ch}^2(\beta s)} = 0, \tag{1}$$

откуда видно, что значение инварианта β определяет только масштаб мировой линии движения протистона, то есть автоиды. Поэтому эту величину будем называть **масштабным фактором автоиды**. Все характерные размеры автоиды обратно-пропорциональны значению β. То есть автоида при различных β подобна сама себе. Так как $\mathcal{E}_m = (4/3)q^2\beta\,\mathrm{ch}(\pi/2)$, то, вычислив при заданном q значение $\mathcal{E}_m$ при $\beta = 1$:

$$\mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_{m|\beta=1} = \frac{4}{3}q^2\mathrm{ch}(\pi/2), \tag{2}$$

легко найти значение $\mathcal{E}_m$ при любом другом β, просто умножая $\mathcal{E}_{m1}$ на β

$$\mathcal{E}_m = \beta\mathcal{E}_{m1}. \tag{3}$$

Так как $\mathcal{E}_S \sim \mathcal{E}_m$, то аналогично

$$\mathcal{E}_S = \beta\mathcal{E}_{S1}, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{E}_{S1} = \mathcal{E}_{S|\beta=1}. \tag{5}$$

По той же причине

$$\bar\omega = \beta\bar\omega_1, \quad \bar\omega_1 = \bar\omega_{|\beta=1}. \tag{6}$$

§5. Вычислительные формулы и результаты для спектра радиации.

1. Замена переменной в функции $t'(v)$. Интегрирование мы намерены делать методом Монте-Карло после вычисления интегральной функции $t'(v)$, таблица которой одновременно даёт и функцию $v(t')$.

Согласно (6.2.8)

$$\beta t' = \int\limits_{v}^{\operatorname{th}(\pi/2-\gamma)} \frac{dv}{(1-v^2)^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}+\gamma\right)}, \tag{1}$$

где пределы $v(t')$ для излучающей части автоиды:

$$v(-\infty) = \operatorname{th}(-\gamma),\ v(\infty) = \operatorname{th}(\pi/2-\gamma). \tag{2}$$

Приведём интеграл к более удобному виду, который позволит нам найти аналитическое выражение для t'. Для этого сделаем замену:

$$v = \operatorname{th}(x-\gamma),\ x = \gamma + \operatorname{ar\,th} v,$$

$$dv = dx/\operatorname{ch}^2(x-\gamma),\ x_{|v=v} = x,\ x_{v=\operatorname{th}(\pi/2-\gamma)} = \pi/2, \tag{3}$$

Тогда

$$\beta t' = \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{dx}{(1-\operatorname{th}^2(x-\gamma))^{3/2}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{th}(x-\gamma)}{1-\operatorname{th}(x-\gamma)}+\gamma\right)\operatorname{ch}^2(x-\gamma)} = \tag{4}$$

$$= \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ch}(x-\gamma)\,dx}{\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}^{x-\gamma}}{\mathrm{e}^{-x+\gamma}}+\gamma\right)} = \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ch}(x-\gamma)\,dx}{\sin x} = \tau(x), \tag{5}$$

где

$$\tau(x) = \beta t' = \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ch}(x-\gamma)\,dx}{\sin x}, \tag{6}$$

$$x = \gamma + \operatorname{ar\,th} v, \quad 0 < x < \pi/2, \tag{7}$$

$$v = \operatorname{th}(x-\gamma), \quad \operatorname{th}(-\gamma) < v < \operatorname{th}(\pi/2-\gamma), \quad \mathrm{e}^{|\gamma|} \gg \mathrm{e}^{\pi}. \tag{8}$$

2. Замена переменной в интеграле J_ω. Интеграл

$$J_\omega = 2J_\omega^{\rightarrow} = 2\int\limits_0^{\pi} J_v^{\rightarrow *} J_v^{\rightarrow}\, d\vartheta \tag{1}$$

содержит интеграл $J_v^{\to}$, который выразим через x:

$$J_v^{\to} = 2\int_0^\infty \frac{a\sin\vartheta}{(1-v\cos\vartheta)^2}\cos(\omega t')\,dt' = \int_{\mathrm{th}(-\gamma)}^{\mathrm{th}(\pi/2-\gamma)} \frac{2\cos(\omega t')\sin\vartheta\,dv}{(1-v\cos\vartheta)^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((\omega/\beta)\tau(x))\ \sin\vartheta\,dx}{(\mathrm{ch}(x-\gamma)-\mathrm{sh}(x-\gamma)\cos\vartheta)^2}. \tag{2}$$

3. Формулы для вычисления α_0 и $\mathcal{E}_S$. Выпишем конкретные формулы для вычисления α_0 и $\mathcal{E}_S$.

$$\alpha_0 = 2\pi\frac{\int\limits_0^\infty \omega J_\omega\,d\omega}{(\int\limits_0^\infty J_\omega\,d\omega)^2} = \pi\frac{\int\limits_0^\infty \omega\int\limits_0^\pi J_v^{\to}J_v^{\to *}\,d\vartheta\,d\omega}{(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi J_v^{\to}J_v^{\to *}\,d\vartheta\,d\omega)^2}, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_S = \frac{q^2}{2\pi}\int_0^\infty J_\omega\,d\omega = \frac{q^2}{\pi}\int_0^\infty J_\omega^{\to} d\omega, \tag{2}$$

где в системе, сопутствующей сгону $(\gamma=\pi/2)$

$$J_v^{\to} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((\omega/\beta)\tau(x))\ \sin\vartheta\,dx}{(\mathrm{ch}(x-\pi/2)-\mathrm{sh}(x-\pi/2)\ \cos\vartheta)^2}, \tag{3}$$

Из этих формул видно, что **умножение переменной ω на любой постоянный множитель не изменяет значения** α_0. Поэтому можно умножить ω на космологически постоянный множитель β, что равносильно вычислению интеграла $J_v^{\to}$ при $\beta=1$. При этом получим формулы

$$\alpha_0 = q^2\frac{\bar\omega_1}{\mathcal{E}_{S1}} = \pi\frac{R1}{(R2)^2},\quad \bar\omega_{|\beta=1} = \bar\omega_1 = \frac{R1}{R2}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}_{S1} = \frac{q^2}{\pi}\int_0^\infty J_\omega^{\to}(\omega)\,d\omega_{|\beta=1} = \frac{q^2}{\pi}R2, \tag{5}$$

где

$$R1 = \int_0^\infty \omega\int_0^\pi J^{\to 2}_{v|\beta=1}\,d\vartheta\,d\omega = \int_0^\infty \omega J_\omega^{\to}(\omega)_{|\beta=1}\,d\omega, \tag{6}$$

$$R2 = \int_0^\infty\int_0^\pi J^{\to 2}_{v|\beta=1}\,d\vartheta\,d\omega = \int_0^\infty J_\omega^{\to}(\omega)_{|\beta=1}\,d\omega, \tag{7}$$

$$J_{\omega}^{\rightarrow}(\omega)_{|\beta=1} = \int\limits_0^{\pi} J_{v|\beta=1}^{\rightarrow} J_{v|\beta=1}^{\rightarrow *}\, d\vartheta = \int\limits_0^{\pi} J_{v|\beta=1}^{\rightarrow 2}\, d\vartheta \tag{8}$$

$$J_{v|\beta=1}^{\rightarrow} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2\cos(\omega\tau(x))\sin\vartheta\, dx}{(\mathrm{ch}(x-\pi/2) - \mathrm{sh}(x-\pi/2)\ \cos\vartheta)^2}, \tag{9}$$

$$\tau(x) = \int\limits_x^{\pi/2} \frac{\mathrm{ch}(x-\pi/2)}{\sin x}\, dx. \tag{10}$$

Тогда согласно (4.8.5),(4.8.6) и (4),(5)

$$\bar{\omega} = \beta\bar{\omega}_1 = \beta\frac{R1}{R2}, \quad \mathcal{E}_S = \beta\mathcal{E}_{S1} = \frac{\beta q^2}{\pi}R2. \tag{11}$$

Заметим, что здесь $R2/\pi$ можно рассматривать как энергию $\mathcal{E}_S$ в единицах $q^2\beta$ и поэтому её можно легко сравнивать с выражением

$$\mathcal{E}_m = 2m_m\mathrm{ch}(\pi/2) = \frac{4}{3}q^2\beta\,\mathrm{ch}(\pi/2) = 3,345571305\ldots q^2\beta, \tag{12}$$

представляющем энергию в тех же единицах. Это удобно для контроля вычислений. Величина $R1/R2$ имеет имысл частоты в единицах β.

Обратим внимание, что результат вычисления $\mathcal{E}_S$ зависит от принятого коэффициента A_F в преобразовании Фурье. С принятой нами формой электромагнитного Лагранжиана, соответствующей гауссовой системе единиц, согласуется коэффициент $A_F = 1$, который и был использован для спектрального разложения радиации (3.6.1).

4. Вычисление спектра радиации. Вычисления начнём с табулирования функции $\tau(x)$. При этом очевидны значения

$$\tau(0) \to \infty, \quad \tau(\pi/2) = 0. \tag{1}$$

Интегрирование выполним отдельно для каждого значения x с постоянным шагом с числом точек 1000, применяя квадратурную формулу, точную для многочленов третей степени [Корн, (20.7-15), с.697]. Полученную таблицу на 1000 точек будем использовать с линейной интерполяцией. Результат демонстрирует график.

Подинтегральное выражение для $J_v^{\rightarrow}$ – быстро осциллирующая несинусоидальная функция, поэтому её интегрирование чревато ошибками от интерференции с регулярными сетками значений аргументов. В этом отношении лучше использовать сетку случайно выбранных значений аргументов, то есть – метод интегрирования Монте-Карло [Корн, (20.10-1), с.717]. Кроме того этот метод позволяет оценить дисперсию ошибки, которая убывает обратно пропорционально корню квадратному из числа случайно выбранных значений аргумента.

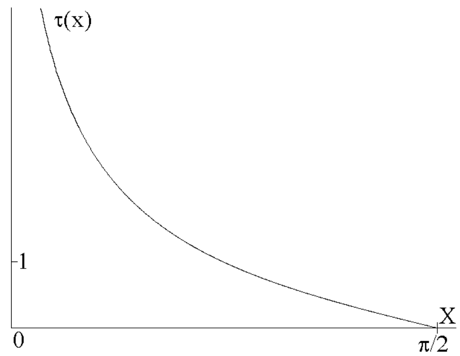


Рис. 202.7.

Интеграл $J_v^{\rightarrow}$ дающий распределение энергии излучения по спектру и углам, мы вычислим, ограничиваясь небольшим числом $k = 92$ значений частоты ω и числом $l = 3000$ значений угла θ, применяя метод Монте-Карло для интегрирования лишь по x. На рисунке изображён график спектра, представленный функцией $J_\omega(k)$, где $k = \omega/0,06 \leqslant 40$.

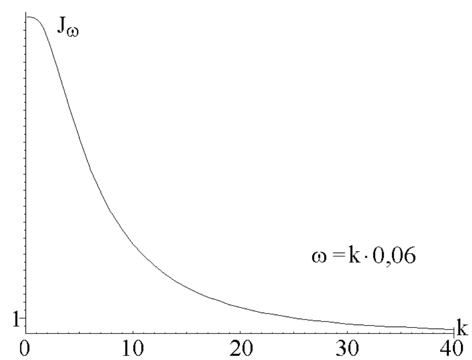


Рис. 202.8.

$$J_\omega(0) = 19,8, \quad J_\omega(92) \approx 0.015. \tag{2}$$

5. Результат численного вычисления $\mathcal{E}_S, \mathcal{E}_r$ и α_0. [09.02.2011]. Подинтегральное выражение для двойных интегралов $R1, R2$ – быстро осциллирующая несинусоидальная функция двух переменных, поэтому для неё тем более эффективно интегрирование методом Монте-Карло. Получены следующие значения интегралов

$$R2 = 9,804, \tag{1}$$

$$R1 = 5,008, \tag{2}$$

откуда совершённая энергия радиации в единицах $q^2\beta$:

$$c_S = \mathcal{E}_S/q^2\beta = \frac{R2}{\pi} = 3,1207. \tag{3}$$

Результат меньше значения (в тех же единицах)

$$\mathcal{E}_m/q^2\beta = 3,345571305\ldots \tag{4}$$

на величину

$$\mathcal{E}_r/q^2\beta = 0,225, \tag{5}$$

Средняя частота в единицах β

$$\bar{\omega}/\beta = \frac{R1}{R2} = 0,511. \tag{6}$$

Безразмерная константа радиации:

$$\alpha_0 = 0,164. \tag{7}$$

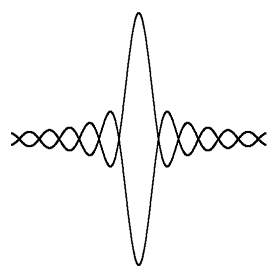
Калькуляция дисперсии интегрирования даёт оценку относительной погрешности около 3 процентов.

Распределение статистического веса частоты имеет максимум на частоте

$$\omega_{max}/\beta = 0,378. \tag{8}$$

⋆ ⋆ ⋆

Потрёпанная книга скорее всего – хорошая книга.



Глава 3. КВАНТОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОТИСТОНА

Мировая линия протистона состоит из кривых элементов (шагов) определённой формы, гладко стыкованных друг с другом с возможностью взаимного поворота, не детерменированного соседними элементами.

§1. Массовая функция протистона.

1. Возможность инверсии радиации протистона вне сгона. В этой главе мы покажем, что протистон не всё время движется по одной и той же автоиде, а лишь по конечному её отрезку в достаточно большой окрестности сгона. Дело в том, что решая массовое уравнение мы пренебрегали микропульсациями заряда протистона, влияние которых в окрестности сгона автоиды ничтожно, но оно возрастает по мере приближения автоиды к своим асимптотам, что в конце концов приводит к возмущению, достаточному для потери устойчивости и инверсии направления развития автоиды, то есть к переходу к новой автоиде, теперь уже удаляющейся от асимптоты в направлении к новому сгону и так до бесконечности в оба конца. Устойчивый отрезок автоиды будем называть **шагом протистона**.

Ещё раз поясним сказанное другими словами. Протистон в окрестности сгона детерминированно движется по плоской кривой, концы которой имеют прямолинейные асимптоты. Ниже мы покажем, что знак указателя радиации протистона тем более неустойчив, чем дальше от сгона. При этом становятся существенными те космологически малые пульсации заряда протистона, которыми до этого можно было пренебречь. Учёт этих пульсаций как малых возмущений уравнения для массы протистона показывает, что по достижении определённого интервала от сгона происходит ещё одна инверсия знака указателя радиации (**внесгоновый переход радиации**) и развитие кривой продолжается в обратном

направлении, то есть к новому сгону, а от него – к новому переходу радиации и так далее. В результате мировая линия протистона превращается в составную, каждый **элемент** которой детерменирован, а в целом, за счёт **лабильности** (2.2.*) сочленений, эта линия имеет (**дискретно стохастический**) характер. Теперь попробуем найти конкретные условия для внесгонового перехода радиации.

2. Применение метода последовательных приближений Пикара. Принимая $c_m = i_r = \pm 1$, уравнение для массы протистона (**массовое уравнение**)

$$m\frac{dm}{ds} = \frac{i_r}{3}\ q^2\ \frac{d^2m}{ds^2} \tag{1}$$

запишем в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dm}{ds} = y = f_m(s,y,m) \\ \frac{dy}{ds} = 3i_r\frac{1}{q^2}\ m\ y = f_y(s,y,m) \end{cases}. \tag{2}$$

В первом приближении примем $q \approx \text{const}$ и имеем приближённое решение:

$$m^{[0]} = -b\ \text{th}(\beta(s-s_m))$$

$$y^{[0]} = \frac{-b\beta}{\text{ch}^2(\beta(s-s_m))},$$

где

$$\beta = i_r\ \frac{3b}{2q^2} = \text{const (в космологическом смысле)}.$$

Так как масса по определению пропорциональна квадрату заряда и b величина с тем же смыслом, что и масса, то константой (при микропульсациях заряда) следует считать β (не зависящее от q), а не b.

Используем это решение в качестве нулевого приближения для случая возмущённого q при его космологически малых микропульсациях δq (I.10.1.3.8) (учитывая, что $T = u^0 s$)

$$q = q_0 + \delta q = D(T + \frac{3}{2|k|}\ \sin 2|k|u^0 s), \tag{3}$$

где $D = \varepsilon_q k_q / T^4$ – космологически постоянный множитель,
$q_0 = \langle q \rangle$,
$\delta q = D\frac{3}{2|k|}\sin 2|k|u^0 s$.
Для определённости считаем заряд положительным. Для отрицательного заряда результат аналогичен.

Заметим, что заряд является космологически постоянным, так как космологически постоянно T, а δq космологически мало по сравнению с q.

Выбрав начальное условие

$$y_{|s=s_m} = y_0 = -b\beta, \qquad m_{|s=s_m} = m_0 = 0, \tag{4}$$

применим **метод последовательных приближений Пикара** ([Корн, с. 270]). При этом первое приближение имеет вид

$$\begin{cases} m^{[1]}(s) = m_0 + \int\limits_{s_m}^{s} f_m(s, y^{[0]}(s), m^{[0]}(s))\ ds \\ y^{[1]}(s) = y_0 + \int\limits_{s_m}^{s} f_y(s, y^{[0]}(s), m^{[0]}(s))\ ds \end{cases}.$$

Нас интересует сейчас лишь $y^{[1]}(s)$, для которого имеем

$$y^{[1]} = -b\beta + \int\limits_{s_m}^{s} 3i_r\ \frac{1}{q^2}\ m^{[0]}\ y^{[0]}\ ds$$

или

$$y^{[1]} = -b\beta + 3i_r \int\limits_{s_m}^{s} \frac{b^2\beta\ \mathrm{sh}(\beta(s-s_m))}{q^2\ \mathrm{ch}^3(\beta(s-s_m))}\ ds. \tag{5}$$

Важно, что процесс последовательных приближений сходится для случая ограниченных производных, то есть и для данного случая [Корн, с. 270, 267], следовательно первое приближение является более точным, чем нулевое. Поэтому хотя бы в первом приближении мы можем выяснить влияние возмущения заряда на поведение производной dm/ds. Если она может изменять знак под действием возмущения, то, следовательно, возможен переход радиации протистона.

Поскольку возмущение заряда является космологически малым по сравнению с его невозмущённым значением, то даже первое приближение является хорошим с космологической точностью.

3. Вычисление $y^{[1]}$. Раскрывая b^2, имеем

$$y^{[1]} = -b\beta + i_r\frac{4}{3}\beta^3 J, \tag{1}$$

где

$$J = \int\limits_{s_m}^{s} q^2 \frac{\mathrm{sh}(\beta(s-s_m))}{\mathrm{ch}^3(\beta(s-s_m))}\ ds. \tag{2}$$

Так как $q = q_0 + \delta q$, где $|\delta q| << |q_0|$, то

$$q^2 = (q_0 + \delta q)^2 \approx (q_0)^2 + 2q_0\ \delta q. \tag{3}$$

Таким образом

$$J = q_0^2 J_1 + 2q_0\ J_2, \tag{4}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{s_m}^{s} \frac{\mathrm{sh}(\beta(s-s_m))}{\mathrm{ch}^3(\beta(s-s_m))}\ ds, \tag{5}$$

$$J_2 = \int\limits_{s_m}^{s} \delta q \; \frac{\operatorname{sh}(\beta(s-s_m))}{\operatorname{ch}^3(\beta(s-s_m))} \; ds. \tag{6}$$

Заменим переменную в J_1

$$\beta(s-s_m) = x, \quad ds = \frac{1}{\beta}\, dx, \quad x_{|s=s_m} = 0, \qquad x_{|s=s} = \beta(s-s_m) = x.$$

Тогда

$$J_1 = \frac{1}{\beta} \int\limits_{0}^{\beta(s-s_m)} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}\, dx.$$

Согласно [Прудников 1.4.4.24, с. 145]

$$J_1 = \frac{1}{\beta}\, \frac{1}{2}\, \operatorname{th}^2 x|_0^{\beta(s-s_m)} = \frac{1}{2\beta}\, \operatorname{th}^2(\beta(s-s_m)). \tag{7}$$

Тогда, раскрывая b и подставляя (3), имеем

$$y^{[1]} = -b\beta + \frac{4}{3} i_r \beta^3 q_0^2 \frac{1}{2\beta}\, \operatorname{th}^2(\beta(s-s_m)) + \frac{4i_r}{3}\beta^3 2q_0 J_2 \approx$$

$$\approx -\frac{2}{3} i_r \beta^2 q_0^2 - \frac{4}{3} i_r \beta^2 q_0\, \delta q + \frac{2}{3} i_r \beta^2 q_0^2\, \operatorname{th}^2(\beta(s-s_m)) + \frac{8i_r}{3}\beta^3 2q_0 J_2 =$$

$$= -\frac{2}{3} i_r \beta^2 q_0^2 (1 - \operatorname{th}^2(\beta(s-s_m))) + \frac{8i_r}{3}\beta^3 q_0\; J_2 - \frac{4}{3} i_r \beta^2 q_0\; \delta q =$$

$$= \frac{-\frac{2}{3} i_r \beta^2 q_0^2}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))} + \frac{8i_r}{3}\beta^3 q_0\; J_2 - \frac{4}{3} i_r \beta^2 q_0\; \delta q. \tag{8}$$

Не трудно видеть, что здесь первый член есть скорость изменения массы в отсутствие возмущения, следовательно 2-й и 3-й члены есть возмущение скорости изменения массы.

4. Условие перехода радиациии под действием микропульсаций заряда. Это условие можно записать в виде

$$\frac{dm^{[1]}}{ds} = y^{[1]} = 0. \tag{1}$$

Однако, оно трудновычислимо, поэтому найдём другое эквивалентное условие. Из (2.1) следует, что

$$\frac{d(m^{[1]})^2}{ds} = 2m^{[1]}\, \frac{dm^{[1]}}{ds} = \frac{2i_r}{3}\; q^2\; \frac{dy^{[1]}}{ds},$$

тогда условие равенства нулю величины $dm^{[1]}/ds$ при $m \neq 0$ эквивалентно условию равенства нулю величины $dy^{[1]}/ds$, то есть может быть записано в виде

$$\frac{dy^{[1]}}{ds} = \frac{\frac{4}{3} i_r \beta^3 q_0^2\; \operatorname{sh}\, \beta(s-s_m)}{\operatorname{ch}^3 \beta(s-s_m)} +$$

$$+\frac{8i_r}{3}\beta^3 q_0\ \delta q\ \frac{\operatorname{sh}\beta(s-s_m)}{\operatorname{ch}^3\beta(s-s_m)} - \frac{4}{3}i_r\beta^2 q_0\ \frac{d}{ds}\delta q = 0$$

или

$$\beta\ \frac{\operatorname{sh}\beta(s-s_m)}{\operatorname{ch}^3\beta(s-s_m)}(q_0+2\delta q) - \frac{d}{ds}\delta q = 0.$$

Или, пренебрегая космологически малым $2\delta q$ по сравнению с q_0, имеем:

$$\beta q_0\ \frac{\operatorname{sh}\beta(s-s_m)}{\operatorname{ch}^3\beta(s-s_m)} = \frac{d}{ds}\delta q.$$

Так как δq синусоидальная функция, то отсюда видно, что при $s \to \pm\infty$ левая часть стремится к нулю и равенство выполняется периодически с двойной частотой осцилляций функции δq.

Преобразовав выражение к виду

$$\beta\ q_0\ \frac{\operatorname{sh}\beta(s-s_m)}{\operatorname{ch}^3\beta(s-s_m)}\ ds = d\ \delta q$$

и учитывая, что космологическая постоянная $q_0 = |D|^2 T$ не зависит от s, проинтегрируем обе части; в результате получим:

$$\frac{1}{2}q_0\ \operatorname{th}^2(\beta(s-s_m)) + c = \delta q.$$

Для того, чтобы это равенство, как и до интегрирования, выполнялось при $s \to \pm\infty$ с двойной частотой осцилляций функции δq, левая часть должна стремиться к 0 при $s \to \pm\infty$, для чего необходимо взять постоянную интегрирования в виде

$$c = -\frac{1}{2}q_0.$$

Тогда

$$\frac{q_0}{\operatorname{ch}^2\beta(s-s_m)} = -2\ \delta q.$$

Так как $q_0 = DT$, $\delta q = D(3/(2|k|)\sin 2|k|u^0 s$, то

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\beta(s-s_m)} = \frac{-3\sin 2|k|u^0 s}{|k|T}. \qquad (2)$$

С ростом $|s-s_m|$ (при удалении от сгона s_m в любую сторону), по мере уменьшения левой части этого условия, оно впервые выполняется в точке s_t вблизи одного из пиков осциляций возмущения, то есть при

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\beta(s_t-s_m)} < \frac{3}{|k|T}, \qquad (3)$$

где s_t - искомый момент перехода радиации. Из рисунка понятно, что это неравенство близко к равенству.

Заметим, что u^0 величина не постоянная, поэтому форма функции $m(s)$ в инерциальной системе отсчёта вообще говоря не симметрична относительно точки s_m.

Переход радиации означает, что после него левая часть снова начинает расти и следующий переход становится возможен лишь после очередного сгона, когда левая часть вновь начнёт убывать.

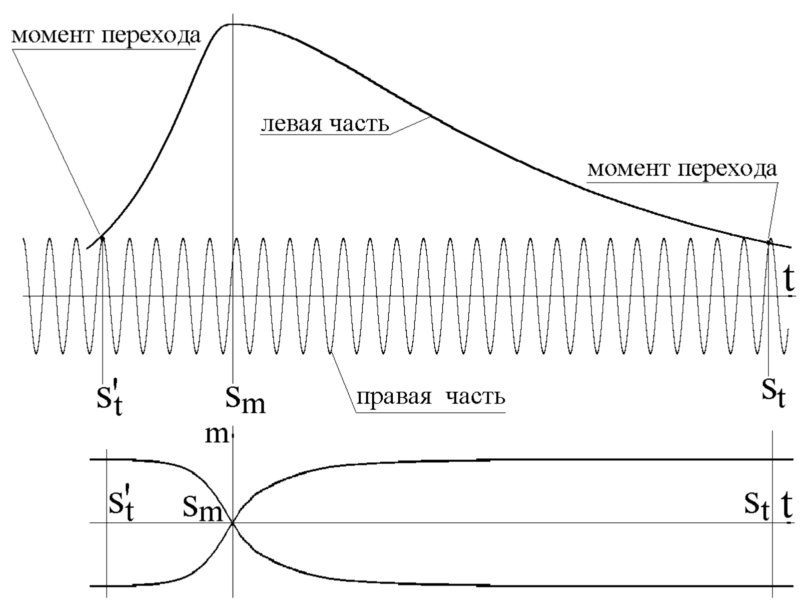


Рис. 203.1. Разница вида кривой до и после точки S_m зависит от выбора системы отсчёта

5. Массовая функция протистона. Зависимость массы m протистона от интервала s на мировой линии протистона будем называть **массовой функцией** $m(s)$ **протистона**. Интервал (s_t', s_t) и соответствующую ему часть масовой функции назовём **шагом мировой линии протистона** и **шагом его массовой функции**. Очевидно, шаг массовой функции является решением массового уравнения на отрезке (s_t', s_t). Также решением массового уравнения является и аналогичный **шаг, инвертированный по знаку массы (антишаг)**. У всех таких шагов начало и конец имеют нулевую производную массы (4.1). Это позволяет, соединяя друг за другом поочерёдно шаги и антишаги получить **непрерывную массовую функцию протистона**. Таким образом **стыки** шагов синхронизируются с пиками микропульсаций через некоторое их число. То есть **длительность шагов кратна периоду микропульсаций (в изначальной системе координат)**.

Шаг делится точкой s_m на два **полушага** (**первый** и **второй** для шага и **антипервый** и **антивторой** для антишага). Пару соседних полушагов, взятых от соседних шагов, будем называть **звеном** мировой линии протистона (или

его массовой функции). Ниже мы покажем, что все шаги имеют одинаковую (Г-образную) 4-пространственную форму, соединяются друг с другом гладко на стыках, но имеют друг относительно друга произвольную ориентацию. Поэтому, в отличие от периода шагов, период полушагов и звеньев, вообще говоря, не кратен периоду микропульсаций. Зато полушаги звена симметричны друг другу, а полушаги шага, вообще говоря, не симметричны. Симметрия полушагов звена требует **синхронности точек перехода s'_t, s_t с пиками микропульсаций**, что позволяет заменить неравенство (4.3) на равенство

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2\beta(s_t - s_m)} = \frac{3}{|k|T_t}, \tag{1}$$

где $T_t = T(s_t)$ – **возраст шага**, определяемый значением T в конце шага, то есть на стыке шагов.

Очевидно, самый короткий шаг имеет в изначальной системе интервал времени, равный периоду микропульсаций (I.10.1.3.9)

$$(T(s_t) - T(s'_t))_{\min} = 2(T(s_t) - T(s_m))_{\min} = \pi/|k|. \tag{2}$$

Таким образом на переходе s_t имеем

$$\mathrm{ch}\ \beta(s_t - s_m) = \sqrt{|k|T_t/3} \tag{3}$$

или

$$|s_t - s_m| = \frac{1}{\beta}\ \mathrm{arch}\sqrt{|k|T_t/3}, \tag{4}$$

или [Корн, с. 729]

$$|s_t - s_m| = \frac{1}{\beta}\ \ln(\sqrt{|k|T_t/3} + \sqrt{|k|T_t/3 - 1}) \approx \frac{1}{\beta}\ \ln 2\sqrt{|k|T_t/3} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\ \ln\sqrt{4|k|T_t/3} = \frac{1}{2\beta}(\ln(4|k|/3) + \ln T_t). \tag{5}$$

На пике осцилляции происходит переход, после чего левая часть снова начинает расти и следующий переход становится возможен лишь после очередного сгона, когда левая часть вновь начнёт убывать.

Рассмотренный переход радиации будем называть **внесгоновым** (в отличие от **сгонового перехода** на сгоне). Соответствующую точку на мировой линии будем называть **стыком**. **стыки синхронизированы микропульсациями заряда** с периодом $\pi/|k|$.

Так как масса протистона определяется произведением $\beta|s_t - s_m|$, то из (5) следует, что она может изменяться только космологически медленно, за счёт тоже космологически малых изменений массы на стыках, допускаемых возмущениями от микропульсаций заряда. Отсюда следует необходимость **почти-периодичности массовой функции протистона**, допускающая лишь **космологически малую**

степень свободы массовой функции. Вместе с космологически малой степенью свободы массовой функции возникает и **космологически малая степень свободы мировой линии**.

При малом возрасте Вселенной, то есть вблизи её изотропного конуса микропульсации заряда относительно велики и здесь происходит формирование частоты массовой функции. Понять это формирование можно с точки зрения общих свойств автоколебательных систем как **захват частоты** такой системы (протистона) частотой возмущающего воздействия в виде микропульсаций заряда (I.10.1.3.9) [Гоноровский, с.505]. То есть период стыков должен быть равен периоду микропульсаций заряда. Поэтому условие (2) необходимо для всех шагов, то есть оно обобщается в виде

$$\Delta T = 2(T(s_t) - T(s_m)) = 2(T_t - T(s_m)) = \pi/|k|. \tag{6}$$

ΔT имеет смысл **длительности шага протистона в изначальной системе отсчёта.** Шаги разбивают величину T на последовательность равных отрезков, длину ΔT которых можно рассматривать как естественный эталон измерения **дискретного возраста Вселенной** T_t. Используя (6), ниже будет найден интервал полушага $|s_t - s_m|$. Тогда из (5) определится и величина β

$$\beta = \frac{\ln(4|k|/3) + \ln T_t}{2|s_t - s_m|} = \frac{\ln(4|k|T_t/3)}{2|s_t - s_m|}. \tag{7}$$

Таким образом стыки шагов мировой линии происходят на каждой **пиковой гиперповерхности волн микропульсаций заряда**. При большом возрасте Вселенной эти гиперповерхности локально вырождаются в параллельные друг другу **пиковые гиперплоскости**, следующие друг за другом с периодом $\Delta T = \pi/|k|$ **в изначальной системе отсчёта**, иначе говоря стыки мировой линии протистона должны удовлетворять **условию периодичности по времени**

$$\Delta T = \pi/|k|. \tag{8}$$

То есть все стыки синхронизированы в абсолютном времени **стыковыми гиперсферами**. Все шаги имеют одинаковую Г-образную плоскую форму с космологически медленно изменяющимся параметром β, поэтому условие периодичности выполняется лишь при определённой их взаимной ориентации (не обязательно в одной плоскости). Механика требует непрерывность стыков шагов, то есть **существует общая касательная стыкуемых шагов в точке стыка**. (9)

§2. Мировая линия протистона, её элементы и соответствующая радиация.

1. Возможные способы соединения шагов. Простейший способ соединения шагов – **плоский двухшаговый зигзаг** (Рис.203.2а). Здесь стыки расположены

периодически на одной **осевой линии**. Другим простым способом является **плоский 4-х-шаговый зигзаг** (Рис.203.2в). Здесь стыки 3-х видов (A,C,B) расположены на 3-х параллельных линиях, лежащих в одной **зигзаговой** плоскости, из которых линию C будем называть **осевой**.

Условие периодичности очевидно можно выполнить, если зигзаговая плоскость лежит в плоскости рисунка или наклонена к ней так, что мы видим проекцию зигзага на плоскость рисунка. Если наклонена, то это означает, что осевая мировая линия протистона движется в изначальной системе со скоростью $\mathbf{u}$, а мировая линия протистона совершает **поперечные колебания** по линии пересечения плоскостей c-c и s-s, изображённых на (Рис.203.2c). Однако, это пересечение является не линией, а двумерной плоскостью, так как c-c и s-s являются гиперплоскостями, то есть 3-х-мерными пространствами, каждая пара точек, взятых от каждого из которых имеет 6 координат, а при совпадении этих точек на пересечении этих пространств их вполне определяют 3 координаты, а при заданном времени t достаточно двух координат.

На (Рис.203.2c) изображена гиперплоскость c-c, в которой лежит плоский 4-х-шаговый зигзаг, стыки которого обозначены буквами A,C,B. Каждое сечение этой гиперплоскости 3-пространством s-s в момент t выглядит на рисунке как точка, которая в полном 4-пространстве разворачивается в двумерную плоскость. Проекция мировой линии протистона на эту плоскость представляет собой отрезок прямой, ориентация которого соответствует ориентации плоскости зигзага. Отсюда очевидна возможность такой модификации плоского зигзага, при которой любой 4-х-шаговый отрезок мировой линии можно повернуть на любой угол вокруг осей AA или BB. В частности мировую линию можно превратить в **4-спираль**, проекция которой на плоскость s-s является замкнутой траекторией. Если эта траектория не замкнута, то возможно постепенное накопление отклонения темпа от исходного за счёт не идеально прямой формы стыков. Эти модификации возможны только для случая b), так как он допускает взаимное вращение соседних шагов относительно их стыков, сохраняющее параметр β шагов. Для случая a) это не возможно.

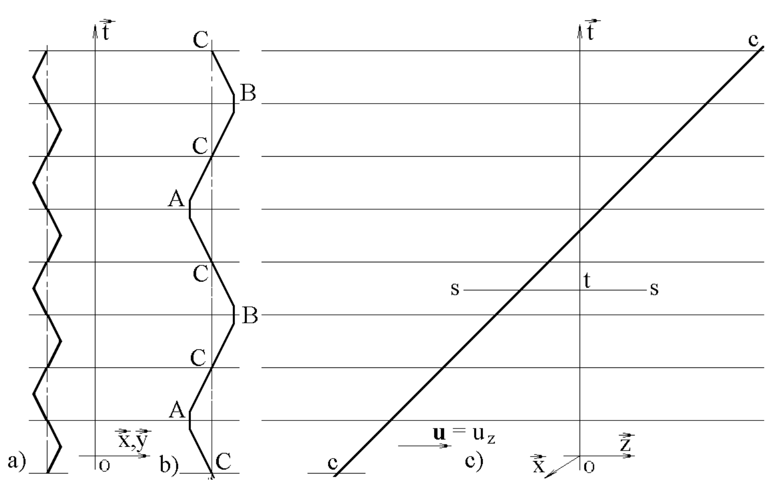


Рис. 203.2.

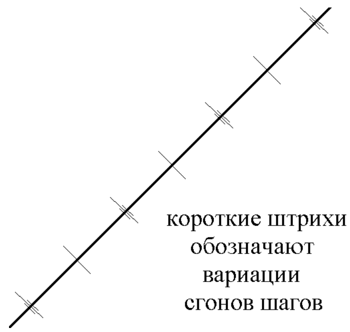


Рис. 203.3.

Таким образом существуют разные регулярные структуры мировых линий протистонов. Конечные отрезки таких структур могут соединяться друг с другом при соблюдении необходимых законов сохранения, допуская определённые нерегулярности мировых линий.

В ультрарелятивистском случае (Рис.203.3) временна́я компонента 4-скорости второго полушага относительно первого изменяется (возрастает или убывает) на $\operatorname{sh}\pi$, что в ультрарелятивистском случае составляет лишь небольшую долю скорости оьносительно системы отсчёта. Поэтому почти прямая линия, изображающая мировую линию ультрарелятивистского протистона, состоит из почти равных чередующихся отрезков (полушагов).

2. Лабильность стыков мировой линии протистона. Итак отрезок мировой линии между двумя ближайшими стыками мы называем **шагом** мировой линии протистона, а отрезок между ближайшими сгоном и стыком - её **полушагом**. Величину интервала, соответствующую шагу или полушагу мы также называем **шагом** или **полушагом**.

Как показало решение уравнения детерменированного движения протистона, в пределах шага, мировая линия вполне определённая. Она имеет один параметр (например, β или b). При этом она плоская (по крайней мере в пределах шага).

Точку внесгонового перехода радиаци (стык) можно охарактеризовать условием

$$\frac{dm}{ds} = 0, \tag{1}$$

а так как

$$\frac{dm}{ds} = i_r \frac{2}{3} q^2 \; w_\mu w^\mu, \tag{2}$$

то и условием

$$w_\mu w^\mu = 0. \tag{3}$$

Поскольку масса на этом переходе конечна, то, согласно определению массы

$$m = i_r \frac{1}{3} q^2 \frac{d w_\mu w^\mu / ds}{w_\nu w^\nu}, \tag{4}$$

необходимо, чтобы

$$\frac{d \; w_\mu w^\mu}{ds} = 0, \tag{5}$$

иначе выражение (4) будет бесконечно.

Таким образом, два соседних шага мировой линии протистона стыкуются в точке внесгонового перехода радиации с сохранением непрерывности всех величин, входящих в уравнение движения, независимо от взаимной ориентации плоскостей этих шагов. То есть уравнение допускает повороты соседних шагов относительно их общего стыка на любой угол, то есть не детерминирует этот угол. Поэтому такой поворот является подвижным соединением с одной степенью свободы, относительно которого можно поворачивать две части мировой линии, сохраняя её гладкость. Автономно детерменированы лишь части мировой линии, соответствующие её шагам. То есть траектория протистона вполне определена начальными условиями только до момента стыка. Далее для её определения нужно дополнительное условие, задающее один параметр. Таким условием является космологически постоянное значение β совместно с рассмотренным выше условием синхронности стыков шагов и микропульсаций зарядов. Но это условие, вообще говоря, выполняется неоднозначно.

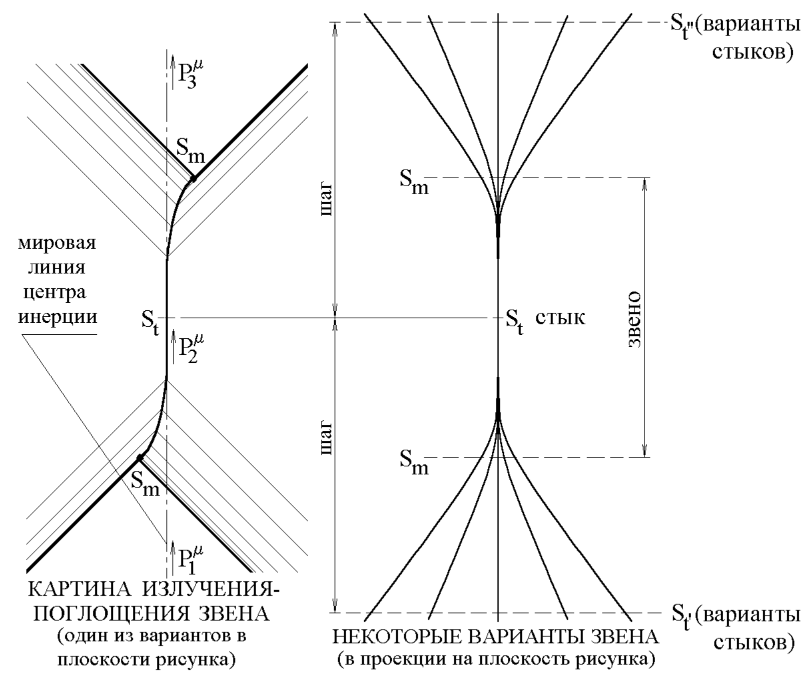


Рис. 203.4.

Иначе говоря, стык является не фиксированным (**лабильным**) относительно 4-поворотов плоскостей двух соседних полушагов друг относительно друга.

Таким образом, одно лишь уравнение движения протистона не несёт всей информации о его движении. Вся информация содержится лишь в полном едином поле, особенности которого и определяют протистоны. На (рис. 203.4) окрестность стыка двух шагов изображёна в системе отсчёта, где протистон покоится в момент стыка s_t. Точки s_m изображают сгоны.

3. Элементы мировой линии протистона и его радиации. Каждый полушаг имеет два конца – **сгоновый** и **стыковый**. У полушагов одного шага

сгоновые концы соединяются друг с другом, а стыковые – с другим шагом. То есть сгоны и стыки являются соответственно **сгоновыми** и **стыковыми соединениями** соседних полушагов. В соответствие с радиационной активностью, один из полушагов шага (первый по времени) является **излучающим**, а второй – **поглощающим**. Сгоновые соединения являются жёсткими, объединяя два соседних полушага в жёсткую Г-образную фигуру – шаг (рис. 203.5).

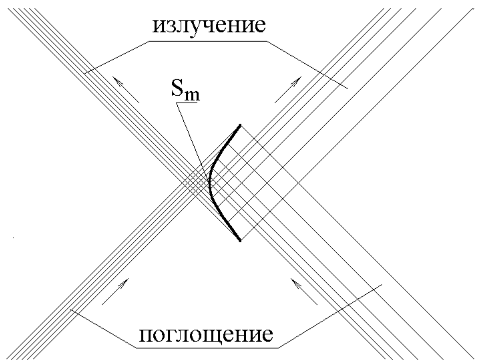


Рис. 203.5.

Бóльшей густоте линий на рисунке отвечает бóльшая интенсивность радиации. Шаги соединяются друг с другом лабильными стыковыми соединениями, образуя бесконечную одномерную цепь – мировую линию протистона. **Непрерывность** этой цепи является следствием сохранения заряда протистона. На (рис. 203.5) изображена картина излучения шага.

Благодаря лабильности стыковых соединений, каждое из которых имеет дискретную вращательную степень свободы, мировая линия в целом не жёсткая. В **макромасштабе**, когда допустимо считать малыми элементы длины мировой линии, содержащие большое число шагов (N_T), мировая линия может иметь практически произвольную форму, лишь с ограничением на кривизну, которое снимается при $N_T \to \infty$. Каждый полушаг характеризуется значением массы $m_{max} = m_m = b$.

4. Параметры протистона на концах шага. Очевидно, что при космологически большом T, концы полушагов с космологической точностью имеют постоянный 4-импульс P^μ (и, следовательно, постоянные $m, u^\mu, \mathcal{E}, \mathbf{P}$), то есть эти параметры протистона на концах шага космологически мало отличаются от параметров протистона на бесконечно удалённых концах соответствующей автоиды. Следовательно значения этих параметров, полученные для концов автоиды, можно рассматривать как их значения на концах шага. Вблизи же сгонов эти параметры изменяются быстро.

5. Обмен энергией-импульсом. Инерцион. Мировая линия протистона вместе со своим полем радиации образует замкнутую механическую систему. Однако, энергия поля радиации, соответствующая всей бесконечной длине мировой линии, бесконечна, поэтому практического интереса не представляет. Более важно то, что эта механическая система может быть разложена в счётное множество

замкнутых подсистем с конечной энергией. Действительно, рассмотрим отрезок мировой линии, состоящий из двух соседних полушагов, соединённых стыком (а не сгоном, как у шага). Мы называем его **звеном**. Концы звена являются сгонами, поэтому на своих концах звено имеет нулевую массу (а значит и нулевой 4-импульс) протистона. Следовательно звено получает и отдаёт свой 4-импульс только через поле собственной радиации. Звено вместе с его полем радиации, образует замкнутую механическую систему **инерцион**. Он не имеет начала, то есть его поле поглощения приходит из бесконечности, имея **конечный** сохраняющийся 4-импульс P_1^μ (рис. 203.4), затем начинается полушаг звена поглощающий это поле. Некоторое время радиация практически отсутствует (при этом 4-импульс и центр инерции всей системы определяется 4-импульсом P_2^μ и центром инерции протистона), а затем начинается излучение следующим излучающим полушагом, которое резко обрывается на его конце и дальше поле бесконечно распространяется при конечном сохраняющемся 4-импульсе P_3^μ. Так как 4-импульс радиации сохраняется то

$$P_1^\mu = P_2^\mu = P_3^\mu. \tag{1}$$

Таким образом, все звенья мировой линии протистона вместе с их радиациями (инерционы) механически самостоятельны (замкнуты), однако они связаны между собой в единую цепь необходимостью сохранения заряда протистона. Иначе говоря, каждый инерцион механически замкнут, но не замкнут электрически, так как заряд инерциона не сохраняется. Объединяясь в мировую линию протистона, инерционы образуют систему, замкнутую как механически так и электрически. Однако, нельзя говорить, что мировые линии протистонов друг от друга не зависят, так как, в силу интерференции, 4-импульс множества протистонов отличается от суммы 4-импульсов этих протистонов, взятых в отдельности.

Кроме параметра m_{max}, звенья характеризуются углом ϑ взаимного поворота плоскостей двух стыкуемых полушагов звена вокруг общей оси

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

Назовём ϑ **углом переполяризации звена**.

Собственное время инерциона будем измерять вдоль его линии центра инерции.

Инерцион непрерывно изменяется во времени. Сначала это только сходящаяся электромагнитная почти сферическая волна, затем в него скачком входит поглощающий полушаг, который переходит в излучающий, а затем исчезает, оставляя после себя расходящееся почти сферическое электромагнитное поле. С электрической точки зрения инерцион разрывен, так как его заряд скачком изменяется, то есть не сохраняется. Другими словами, инерцион проявляет **зарядовый метаболизм** (**обмен**). С механической же точки зрения инерцион – замкнутая механическая система с определённым 4-импульсом. Поглощаемое звеном поле будем называть **электромагнитным квантом поглощения** (**квапом**), а

излучаемое – **электромагнитным квантом излучения** (**квизом**). Их общее название – **квант радиации** или **радион**.

Заряд инерциона не сохраняется, то есть он обменивается зарядом с внешней средой, иначе говоря, проявляет **зарядовый метаболизм**. Являясь замкнутой механической системой, инерцион сохраняет 4-импульс, но между его частями происходит обмен 4-импульсом (между звеном протистона и его полем радиации), то есть инерцион испытывает **внутренний электромагнитный метаболизм**. Со статистической точки зрения, собственное поле радиации протистона обобщается с внешним полем, так как отдельные радионы в статистическом подходе не идентифицируются (характеризуясь только своими средними величинами). Поэтому при статистическом подходе можно говорить просто об **электромагнитном метаболизме протистона**.

Протистоны в нашей теории могут взаимодействовать только с электромагнитным полем и только путём радиации (чередующихся излучения и поглощения). Каждое звено протистона **сопряжено** со своим **радионом**, так что их общий центр инерции (**центр инерции инерциона**) движется прямолинейно. Форма мировых линий центров инерции звена и радиона по отдельности не может быть прямой, так как между ними происходит обмен 4-импульсом, не нарушающий 4-импульса инерциона.

6. Преобразование электромагнитного поля звеном. 4-импульс излучённого звеном поля (квиза) не отличается от 4-импульса поглощённого им поля (квапа), однако, при переходе от квапа к квизу, поле из сходящейся почти сферической волны превращается в расхрдящуюся почти сферическую волну. Различные спектральные компоненты падающей волны переизлучаются протистоном с различной задержкой. Как сходящиеся так и расходящиеся волны не осесимметричны, то есть имеют выделенное направление, определяемое плоскостью соответствующего полушага, а так как полушаги звена взаимно ориентированы по-разному для разных звеньев, то разные звенья по-разному изменяют спектральный состав метаболирующего поля. Каждый квант радиации (**радион**) имеет определённую поляризацию электромагнитного поля, вектор $\mathbf{E}$ которого согласно выражению

$$\mathbf{E} = \frac{q}{(R - \mathbf{Rv})^3}[\mathbf{R}[(\mathbf{R} - R\mathbf{v})\mathbf{a}]] =$$
$$= \frac{q}{(R - \mathbf{Rv})^3}((\mathbf{R} - R\mathbf{v})(\mathbf{Ra}) - \mathbf{a}(\mathbf{R}(\mathbf{R} - R\mathbf{v}))), \tag{1}$$

ортогонален радиус-вектору $\mathbf{R}$ и лежит в плоскости, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R} - R\mathbf{v}$. В мгновенно сопутствующей системе координат $v = 0$ и эта плоскость определяется векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}$ (рис. 203.6), при этом

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^3}[\mathbf{R}[(\mathbf{Ra}]] = \frac{q}{R^3}(\mathbf{R}(\mathbf{Ra}) - \mathbf{a}R^2). \tag{2}$$

Так как для каждого полушага существует система координат (1.2.3.5), в которой траектория движения протистона прямолинейна (**система прямого хода**), то в

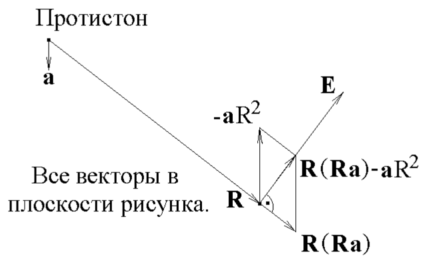


Рис. 203.6.

этой системе $\mathbf{v}||\mathbf{a}$ и

$$\mathbf{E} = \frac{q}{(R - \mathbf{R}\mathbf{v})^3}[\mathbf{R}[(\mathbf{R}\mathbf{a}]]. \tag{3}$$

Этот случай, аналогично случаю (2), иллюстрируется на (рис. 203.6).

Полушаги звена лежат, вообще говоря, в разных плоскостях и разные звенья по-разному изменяют поляризацию квантов радиации, что определяется **углом переполяризации** ϑ. Поэтому разные **звенья специфически преобразуют электромагнитное поле**.

7. Полушаговое действие протистона. Действие протистона на интервале $(s_m,\ s_t)$, то есть между сгоном и ближайшим стыком, назовём **полушаговым действием протистона**:

$$S_p = -\int\limits_{s_m}^{s_t} m\ ds = -b\int\limits_{s_m}^{s_t} \mathrm{th}(|\beta|(s - s_m))\ ds, \tag{1}$$

$$(b > 0).$$

Сделаем замену

$$\beta(s - s_m) = x, \quad \beta\ ds = dx, \quad x_{|s=s_m} = 0, \quad x_{|s=s_t} = \beta(s_t - s_m),$$

$$S_p = -\frac{b}{\beta}\int\limits_0^{\beta(s_t - s_m)} \mathrm{th}x\ dx = \quad \text{[Прудников, 1.4.6.5, с. 147]}$$

$$= -\frac{b}{\beta}\ \ln\mathrm{ch}\ x\Big|_0^{\beta(s_t - s_m)} = -\frac{b}{\beta}\ \ln\mathrm{ch}(\beta(s_t - s_m)) =$$

$$= -\frac{2}{3}q^2\ \ln\mathrm{ch}(\beta(s_t - s_m)), \tag{2}$$

где $b = 2q^2\beta/3 > 0$ (1.5.4.5). Или так как (1.5.5)

$$\beta|s_t - s_m| \approx \ln 2\sqrt{|k|T_t/3} = \ln\sqrt{4|k|T_t/3}, \tag{3}$$

имеем с космологической точностью

$$S_p = -\frac{2}{3}q^2\ln\mathrm{ch}(\ln 2\sqrt{|k|T_t/3}) \approx -\frac{2}{3}q^2\ln(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln 2\sqrt{|k|T_t/3}}) =$$

$$= -\frac{2}{3}q^2 \ln \sqrt{|k|T_t/3} = -\frac{1}{3}q^2 \ln(|k|T_t/3). \qquad (4)$$

Таким образом, полушаговое действие протистона в определённом смысле дискретно (**квантуется**).

Попробуем предположить равенство S_p и постоянной Планка

$$\hbar = \frac{q^2}{\alpha} = 137,03599...q^2,$$

которая в некотором смысле тоже квант действия. Для этого необходимо, чтобы

$$\ln(|k|T_t/3) = 3 \cdot 137,03599... = 411,10797...,$$

или

$$|k|T_t/3 = \mathrm{e}^{411,10797...} = 10^{178,5419228...} = 3,482754... \cdot 10^{178}$$

или

$$T_t = \frac{1,0448262...}{|k|} \cdot 10^{179}.$$

Таким образом, мы вычислили в сделанном предположении современный возраст Вселенной в натуральных единицах, исходя из известного значения постоянной тонкой структуры α.

Заметим, однако, что **сделанное предположение нельзя считать обоснованным. Это лишь информация к размышлению.** Понятие постоянной Планка определено иначе (гл.6).

Обратим внимание, что шаговое действие (как и вообще действие) инвариантно в преобразованиях Лоренца.

8. Средняя полушаговая масса и плотность действия протистона. Рассматривая формулу для полушагового действия, легко видеть, что **средняя на полушаговом интервале масса протистона**:

$$m_\Pi = \frac{\int\limits_{s_t}^{s_m} m\; ds}{s_t - s_m} \qquad (1)$$

инвариантна и просто связана с полушаговым действием формулой

$$m_\Pi = \frac{-S_p}{s_t - s_m}. \qquad (2)$$

Откуда, учитывая (7.4),(7.3), получим

$$m_\Pi = \frac{\frac{2}{3}q^2 \ln \sqrt{|k|T_t/3}}{\frac{1}{\beta}\ln 2\sqrt{|k|T_t/3}} = \frac{2}{3}\beta q^2 L, \qquad (3)$$

где

$$L = \frac{\ln\sqrt{|k|T_t/3}}{\ln 2\sqrt{|k|T_t/3}} = \frac{\ln\sqrt{|k|T_t/3}}{\ln 2 + \ln\sqrt{|k|T_t/3}} = \frac{\ln(|k|T_t/3)}{\ln 4 + \ln(|k|T_t/3)}. \tag{4}$$

Выражая β, имеем

$$\beta = \frac{3m_\Pi}{2q^2 L}. \tag{5}$$

Тогда

$$b = m_{max} = \frac{2}{3}q^2\beta = \frac{m_\Pi}{L}. \tag{6}$$

Средняя полушаговая плотность действия протистона:

$$\Lambda_p = \frac{S_p}{s_t - s_m} = -m_\Pi. \tag{7}$$

9. Среднеквадратичная полушаговая масса протистона. Так как

$$m = b\ \mathrm{th}\,(\beta(s - s_m)), \quad b > 0, \tag{1}$$

то

$$\langle m^2\rangle = \frac{b^2 J_1}{s_t - s_m}, \tag{2}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{s_m}^{s_t} \mathrm{th}^2\,(\beta(s - s_m))\,ds.$$

Сделаем замену

$$\beta(s - s_m) = x, \quad \beta\ ds = dx, \quad x_{|s=s_m} = 0, \quad x_{|s=s_t} = \beta(s_t - s_m),$$

тогда

$$J_1 = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{\beta(s_t - s_m)} \mathrm{th}^2 x\,dx = \quad [\text{Прудников, 1.4.6.6, с. 147}]$$

$$= \frac{1}{\beta}(x - \mathrm{th}\,x)\Big|_0^{\beta(s_t - s_m)} = (s_t - s_m) - \frac{1}{\beta}\mathrm{th}(\beta(s_t - s_m)),$$

$$\langle m^2\rangle = b^2\left(1 - \frac{\mathrm{th}(\beta(s_t - s_m))}{\beta(s_t - s_m)}\right)$$

или с космологически большой точностью

$$\langle m^2\rangle = b^2\left(1 - \frac{1}{\beta(s_t - s_m)}\right) = b^2\left(1 - \frac{1}{\ln\sqrt{4|k|T_t/3}}\right), \tag{3}$$

$$\sqrt{\langle m^2\rangle} = b\sqrt{1 - \frac{1}{\ln(4|k|T_t/3)}}. \tag{4}$$

§3. Псевдо-геометрия шага.

1. Геометрические элементы шага. Если s – интервал, отсчитываемый вдоль мировой линии, от некоторой начальной точки (например, от сгона), то значение s на точках $a, b, \ldots$ этой линии будем обозначать $s_a, s_b, \ldots$. Тогда интервал между двумя произвольными точками a, b, измеренный вдоль мировой линии (**кривой интервал**) будем обозначать разностью $s_a - s_b$ или $\Delta_{ab}s$. Интервал же, измеренный по прямой (по хорде), соединяющей точки a и b (**прямой интервал**), будем обозначать s_{ab}. Интервалы являются инвариантными величинами. Соответствующие же промежутки времени зависят от выбора системы координат. Поэтому для их обозначения будем применять вместо двух – три индекса, первый из которых указывает точку мировой линии, которая покоится в данной системе отсчёта, а два других указывают точки, между которыми измеряется промежуток времени, например $t_{mab} = t_{mba}$ обозначает промежуток времени между точками a и b, измеренный в системе координат, где покоится точка m. Обозначение $\Delta_{mab}t$ для кривых промежутков времени практически нам не понадобится. Аналогично можно обозначать пространственные расстояния, например $r_{mab} = r_{mba}$.

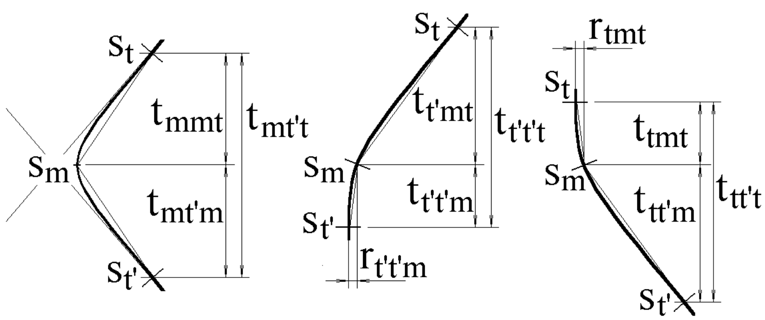


Рис. 203.7.

Интервал между концами шага протистона, измеряемый не вдоль мировой линии, а по соединяющей их прямой, будем называть **прямым шаговым интервалом**.

Систему покоя сгона будем также называть **собственной системой координат шага**. В собственной системе длительность шага $t_{mt't}$ равна прямому шаговому интервалу $s_{t't}$.

2. Прямой интервал шага. Прямой интервал шага равен его длительности в системе покоя его сгона. В силу симметрии шага в этой системе, достаточно вычислить длительность полушага. На мировой линии $dt = u^0\,ds$. Тогда, используя (1.5.4.6), длительность первого полушага в системе покоя сгона s_m:

$$t_{mmt} = t_{mtm} = \int\limits_{t(s'_t)}^{t(s_m)} dt = \int\limits_{s_m-\delta s}^{s_m} u^0\,ds = \int\limits_{s_m-\delta s}^{s_m} \mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} - \gamma)ds, \qquad (1)$$

где $\delta s = s_t - s_m > 0$. В этой системе $u^0 = 1$ в точке $s = s_m$, чему соответствует

$$\gamma = \pi/2. \tag{2}$$

Сделаем замену

$$\beta(s - s_m) = x, \tag{3}$$

откуда

$$\beta\, ds = dx,$$

тогда новые пределы интегрирования

$$x_1 = x_{\big|s=s_m-\delta s} = -\beta\delta s = -\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3}, \quad x_2 = x_{\big|s=s_m} = 0,$$

здесь с учётом $\beta > 0$ (1.1.3.3), использована формула (1.1.3):

$$\beta\delta s = \beta|s_t - s_m| = \operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T_t/3}$$

и возраст Вселенной отсчитывается на стыках шагов

$$T = T_t. \tag{4}$$

Тогда

$$t_{mmt} = t_{mtm} = \frac{1}{\beta} J_{\gamma t}, \tag{5}$$

где обозначено

$$S_J/2 = J_{\gamma t} = \int\limits_{-\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3}}^{0} \operatorname{ch}(2\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^x - \pi/2)\, dx, \tag{6}$$

где согласно (1.5.5)

$$\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3} = \ln(\sqrt{|k|T/3} + \sqrt{|k|T/3 - 1}).$$

В силу симметрии шага длительность шага $s_{t't}$ (она же – **прямой интервал шага**) равна удвоенной длительности полушага в системе покоя сгона, то есть

$$s_{t't} = 2t_{mmt} = 2t_{mtm} = S_J/\beta. \tag{7}$$

В зависимости от возраста Вселенной T **длительность шага имеет логарифмический характер роста**, так как в пределах интегрирования подинтегральная функция ограничена значением $\operatorname{ch}(\pi/2)$, а нижний предел интегрирования $-\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3} \approx -\ln 2\sqrt{|k|T/3}$ (1.5.5). (8)

3. Длина полушага в системе покоя его сгона. Аналогично длительности, можно вычислить длину полушага r_{mmt} в системе покоя его сгона. Для этого в

выражении (2.1) для t_{mmt} достаточно заменить u^0 на $|\mathbf{u}|$, то есть функцию ch(x) на sh(x). При этом (2.5)

$$r_{mmt} = r_{mtm} = \frac{1}{\beta} J_{\gamma x}, \tag{1}$$

где аналогично (2.6)

$$J_{\gamma x} = \int\limits_{-\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3}}^{0} \operatorname{sh}(2\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^x - \pi/2)\, dx. \tag{2}$$

4. Прямой интервал полушага. Прямой интервал полушага можно найти, используя (2.6),(3.2):

$$s_{mt}(T) = \sqrt{t_{ttm}^2 - r_{ttm}^2} = \frac{1}{\beta}\sqrt{J_{\gamma t}^2 - J_{\gamma x}^2}. \tag{1}$$

Интервал (по определению) не зависит от выбора системы координат. Интегралы $J_{\gamma_t}, J_{\gamma_x}$ не табличные.

5. Вариации шага. Форма автоиды не зависит от возраста Вселенной T. От T может зависисеть лишь величина β, влияющая только на масштаб автоиды. Интервал полушага имеет величину (1.5.5)

$$s_t - s_m \approx \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{4|k|T/3}. \tag{1}$$

Так как T – космологическая постоянная, то космологически постоянно произведение $\beta(s_t - s_m)$. Множители в этом произведении могут варьировать лишь обратно-пропорциональны друг другу, оставаясь в среднем космологически постоянными

$$\delta(s_t - s_m) \sim \delta\frac{1}{\beta} \sim -\frac{1}{\beta^2}\delta\beta. \tag{2}$$

Интервал сгона обратнопропорционален величине β (как коэффициент при $s - s_m$), то есть пропорционален величине $1/\beta$, поэтому отношение интервала полушага к интервалу сгона пропорционально величине $\ln\sqrt{4kT/3}$, что означает стремление формы шага в пределе $T \to \infty$ к ломаной линии, состоящей из двух прямых отрезков, совпадающих с асимптотами автоиды. На рисунке показаны всевозможные формы шага, приведённые к одной длительности шага при покоящимся сгоне в одной и той же системе отсчёта. Штриховые линии изображают **стыковые гиперсферы** (1.5.*).

На (рис. 203.7) и (рис. 203.8) видно, что при $T \to \infty$ автоида в окрестности сгона стремится прижиматься к асимптотам, при этом к асимптотам приближаются и стыки соответствующего шага. Поэтому в пределе $T \to \infty$ справедливо соотношение

$$u_+^0 = \frac{t_{mmt}}{s_{mt}}, \tag{3}$$

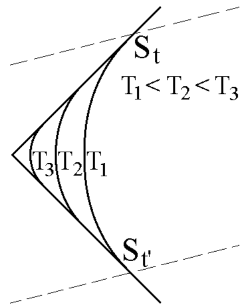


Рис. 203.8.

где u^0_+ – темп мировой линии асимптоты в системе покоя точки сгона.

Таким образом вариации шага имеют один параметр β, зависящий главным образом от T, но может испытывать и статистические флуктуации вместе с темпом u^0. Взаимная ориентация соседних шагов тоже может варьировать.

6. Связь величин β, u^0. Прямой отрезок $s'_t s_t = S_J/\beta$ (инвариант) (2.7) имеет в изначальной системе длительность

$$\Delta_0 t = u^0 S_J/\beta, \tag{1}$$

которая, по условию (1.5.8) синхронности периодов стыков и периодов глобальной волны, должна равняться

$$u^0 S_J/\beta = \Delta T = \pi/|k|,$$

то есть

$$S_J/\beta = \pi/|k|u^0.$$

В этом выражении u^0, β относятся к конкретному шагу протистона. Поэтому это выражение имеет ограниченное применение. Но его можно обобщить в осреднённом виде

$$S_J/\beta = \pi/|k|\breve{u}^0, \tag{2}$$

(где осреднение понимается в смысле (I.8.5.2.7)) то есть глобальный темп в изначальной системе равен величине

$$\breve{u}^0 = \frac{\pi\beta}{|k|S_J} \tag{3}$$

или, с учётом (I.8.5.2.3)

$$\breve{u}^{02} = \frac{\pi^2\beta^2}{k^2 S_J^2} = \frac{T}{2^4 3\pi^4 k^2 k_q}, \tag{4}$$

откуда

$$\beta^2 = \frac{S_J^2 T}{2^4 3\pi^6 k_q}, \tag{5}$$

из (3)

$$\frac{\beta}{\breve{u}^0} = \frac{|k|S_J}{\pi}, \tag{6}$$

а, с учётом (I.8.5.5.2):

$$k_q = \frac{1}{2^7 \pi^5},$$

имеем

$$\beta = \frac{S_J}{4\pi^3}\sqrt{\frac{T}{3k_q}} = \frac{2S_J}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi T}{3}}. \quad (7)$$

Из (3) и (5)

$$\beta \check{u}^0 = \frac{\pi\beta^2}{|k|S_J} = \frac{\pi \cdot 8S_J^2 \pi T}{|k|S_J \cdot \pi^2 3} = \frac{8S_J T}{3|k|}. \quad (8)$$

Так как весь шаг лежит в одной плоскости и симметричен относительно сгона, то нетрудно видеть, что 4-скорость прямого отрезка s'_t, s_t является средней скоростью начала и конца шага (и вместе с тем – всего шага). (9)

Заметим, что связь значений β и $\check{u}^0$ статистическая, то есть допускает независимые флуктуации этих величин, причём величина β более консервативна, так как пропорциональна энергии покоя (массе) простона (2.8.5), которая не может быстро изменяться на мировой линии одного протистона, хотя может быть разной для разных протистонов. (10)

Ориентируясь на контекст, акцент глобальности ˇ будем обычно опускать.

§4. Обменная активность протистона.

1. Монотонность полушагового обмена. На одном из концов полушага масса протистона равна нулю. Этот конец будем называть **пустым**, а другой конец – **полным**. Пустой конец может быть как первым по времени так и вторым. Равенство нулю массы пустого конца означает также и равенство нулю его энергии. Масса протистона в пределах полушага изменяется монотонно. Поэтому изменение массы на полушаге

$$\Delta m = \int\limits_{s_m}^{s_t} \frac{dm}{ds}\, ds = m|_{s_m}^{s_t} = m_{max}. \quad (1)$$

где $m_{max} = b$ – масса протистона на полном конце полушага.

Кроме того, монотонно изменяется и компонента u^0 4-скорости протистона, так как её ускорение w^0 имеет знак, совпадающий со знаком радиационной активности i_r (I.12.4.3.2). Поэтому **энергия** Е **протистона изменяется на полушаге монотонно**. Тогда полушаговый обмен энергией равен

$$\Delta\mathcal{E} = m_{max}\, u^0_{max} = \frac{m_{max}}{\sqrt{1 - v^2_{max}}}, \quad (2)$$

где

u^0_{max} – нулевая компонента 4-скорости на полном конце полушага,

v_{max} – скорость протистона на этом конце.

Поскольку $dm/ds = -I_e$ (I.11.4.2.4), то Δm можно вычислить также, интегрируя интенсивность излучения (I.11.1.2.4)

$$I_e = \frac{2}{3}q^2 w_\nu w^\nu = -\frac{2}{3}q^2 \frac{\beta^2}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))}. \tag{3}$$

Действительно

$$\Delta m = -\int\limits_{s_m}^{s_t} I\,ds = \frac{2}{3}q^2\beta^2 \int\limits_{s_m}^{s_t} \frac{ds}{\operatorname{ch}^2(\beta(s-s_m))}. \tag{4}$$

Сделаем замену

$$\beta(s-s_m) = x,\ ds = \frac{dx}{\beta},\ x_{|s=s_m} = 0,\ x_{|s=s_t} = \beta(s_t - s_m). \tag{5}$$

Тогда

$$\Delta m = \frac{2}{3}q^2\beta \int\limits_0^{\beta(s_t-s_m)} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \text{ [Прудников, 1.4.3.13, с. 142]}$$

$$= \frac{2}{3}q^2\beta \operatorname{th} x|_0^{\beta(s_t-s_m)} = \frac{2}{3}q^2\beta \operatorname{th}\beta(s_t-s_m).$$

С космологической точностью $\operatorname{th}\beta(s_t - s_m) = 1$. Тогда

$$\Delta m = \frac{2}{3}q^2\beta = b = m_{max}. \tag{6}$$

2. Полушаговая интенсивность радиации протистона. Рассмотрим шаг протистона в системе покоя сгона

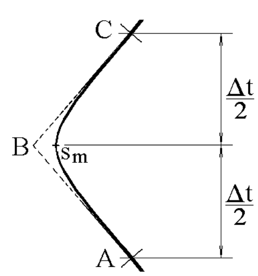


Рис. 203.9.

Изменение энергии от сгона s_m до конца шага C равно величине

$$\Delta\mathcal{E} = m_{max}\, u_c^0, \tag{1}$$

где u_c^0 – нулевая компонента 4-скорости в точке C. Выше найдено, что с космологической точностью

$$u_c^0 = u_+^0 = \operatorname{ch}\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Пусть линии AB и BC являются касательными к шагу в точках A и C. Так как шаг является плоской фигурой, то эти линии пересекаются в точке B, которая при этом является инвариантным элементом геометрии шага.

Если Δt рассматривать как промежуток времени между событиями s_m и C (или A и s_m), то отношение

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{m_{max}\, u_+^0}{\Delta t} \tag{3}$$

не является инвариантным. Зато оно является инвариантным, если Δt считать промежутком времени между точками B и C (или A и B). Действительно, в этом случае Δt можно представить в виде

$$\Delta t = \Delta s_{BC} \cdot u_+^0. \tag{4}$$

При этом (3) приобретает инвариантный вид:

$$I = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{m_{max}}{\Delta s_{BC}} = \frac{\Delta m}{\Delta s_{BC}}, \tag{5}$$

где Δm – изменение массы на полушаге.

Инвариантную величину I будем называть **полушаговой интенсивностью радиации**.

Фигуру ABC, однозначно связанную с формой шага, назовём **квази-эквивалентом шага**. Важно, что квази-эквивалент шага не нарушает неразрывности шага и всей мировой линии протистона при замене им всех шагов, поэтому I может рассматриваться как инвариантное полушаговое усреднение интенсивности радиации.

Так как $u_+^0 = \Delta t / \Delta s_{BC}$ и $\Delta t = s_{t't}/2$, то величину Δs_{BC} можно представить в виде

$$\Delta s_{BC} = \frac{\Delta t}{u_+^0} = \frac{s_{t't}}{2u_+^0}, \tag{6}$$

тогда

$$I = \frac{2m_{max}\, u_+^0}{s_{t't}} = \frac{2m_{max} \cdot \operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}{s_{t't}}. \tag{7}$$

Очевидно, интенсивность поглощения отличается от интенсивности излучения только знаком, который, однако, мы будем в обоих случаях понимать положительным.

Интенсивность радиации протистона не зависит от конфигурации мировой линии, а зависит лишь от параметра m_{max} её шагов. Однако, от конфигурации мировой линии зависит угловое распределение радиации.

Принимая во внимание формулы (3.5.26)

$$\Delta t = s_{t't} = \frac{S_J}{\beta}$$

и (2.7.6)

$$\beta = \frac{3}{2q^2} m_{max},$$

$$m_{max} = \frac{m_\Pi}{L},$$

можно формулу (7) переписать в виде

$$I = \frac{2\beta m_{max} u_+^0}{S_J} = \frac{3m_{max}^2 u_+^0}{q^2 S_J} = \frac{3m_\Pi^2 u_+^0}{q^2 L^2 S_J}. \tag{8}$$

3. Полушаговое изменение энергии протистона.

(Рис. 203.10) изображает шаг в двух состояниях относительно системы координат: в состоянии покоя в момент стыка s_t (или, что практически то же самое – в квазистационарном состоянии) и в состоянии покоя в момент сгона s_m. (ось времени на рисунке предполагается вертикальной).

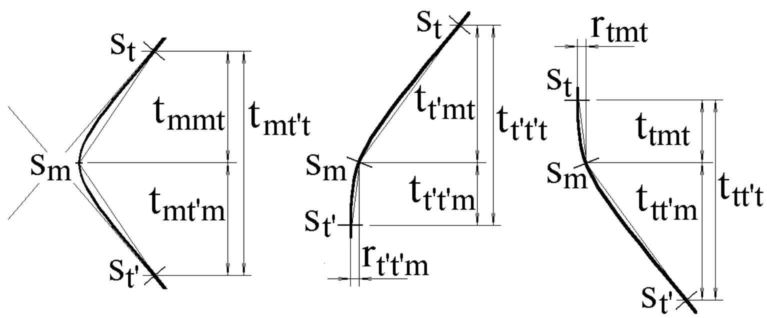


Рис. 203.10

На данном шаге для протистона, находящегося в состоянии излучения, а затем – поглощения, полушаговое изменение энергии можно записать в виде

$$\Delta_+\mathcal{E} = \int\limits_{t(s_t)}^{t(s_m)} \frac{d\mathcal{E}}{dt}\, dt \tag{1}$$

или

$$\Delta_-\mathcal{E} = \int\limits_{t(s_m)}^{t(s_t)} \frac{d\mathcal{E}}{dt}\, dt. \tag{2}$$

Значения изменения энергии на соседних полушагах, вообще говоря, не равны друг другу, что зависит от выбора системы координат

$$|\Delta_+\mathcal{E}| \neq |\Delta_-\mathcal{E}|. \tag{3}$$

Поэтому вычислим изменение энергии отдельно на каждом из смежных полушагов.

В произвольной инерциальной системе координат скорость изменения энергии протистона $d\mathcal{E}/dt$ можно записать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{dmu^0}{dt} = u^0\frac{dm}{dt} + m\frac{du^0}{dt} = \frac{dm}{ds} + \frac{m}{u^0}\frac{du^0}{ds}. \tag{4}$$

Тогда

$$\Delta_+\mathcal{E} = \int\limits_{t(s_t)}^{t(s_m)} \frac{d\mathcal{E}}{dt}\,dt = \int\limits_{s_t}^{s_m} \frac{d\mathcal{E}}{dt}u^0\,ds = \int\limits_{s_t}^{s_m} \frac{d\mathcal{E}}{ds}\,ds =$$

$$= \int\limits_{s_t}^{s_m} \left(\frac{dm}{ds} + \frac{m}{u^0}\frac{du^0}{ds}\right) u^0\,ds = J_1 + J_2, \tag{5}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{s_t}^{s_m} \frac{dm}{ds}u^0\,ds, \tag{6}$$

$$J_2 = \int\limits_{s_t}^{s_m} m\frac{du^0}{ds}\,ds. \tag{7}$$

Согласно (I.12.1.2.7), (I.12.4.3.1), (I.12.4.3.2), рассматривая массу положительно определённой, имеем

$$m = b|\mathrm{th}(\beta(s - s_m))|, \tag{8}$$

$$u^0 = \mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} + \gamma), \tag{9}$$

$$\frac{du^0}{ds} = \frac{\beta|\mathbf{u}|}{\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))}, \tag{10}$$

$$|\mathbf{u}| = \mathrm{sh}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} + \gamma). \tag{11}$$

Дифференцируя (8), имеем (Прудников 1.1.2.23)

$$\frac{dm}{ds} = \frac{-b\beta}{\mathrm{ch}^2(\beta(s - s_m))}. \tag{12}$$

При $\beta > 0$ масса убывает, как и должно быть.

Сделаем замену переменных

$$2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} + \gamma = x, \;\; \frac{2\beta\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}}{1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}ds = dx, \tag{13}$$

$$ds = \frac{1}{2\beta}\frac{1 + \mathrm{e}^{2\beta(s-s_m)}}{\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}}dx = \frac{1}{\beta}\mathrm{ch}(\beta(s - s_m))\,dx, \tag{14}$$

$$x_{|s=s_t} = x_1 = 2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s_t-s_m)} + \gamma_{|s_t\ll s_m} = \gamma \;\; \left(\begin{matrix}\text{космологи-}\\ \text{чески точно}\end{matrix}\right), \tag{15}$$

$$x_{|s=s_m} = x_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma, \tag{16}$$

$$\mathrm{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\gamma}{2}) = \mathrm{e}^{\beta(s-s_m)}, \tag{17}$$

$$\mathrm{ch}(\beta(s-s_m)) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\gamma}{2}) + \mathrm{ctg}(\frac{x}{2} - \frac{\gamma}{2})\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2} - \frac{\gamma}{2})\cos(\frac{x}{2} - \frac{\gamma}{2})} = \frac{1}{\sin(x-\gamma)}. \tag{18}$$

Тогда имеем, учитывая, что $s_m > s_t$

$$J_1 = -\int_{s_t}^{s_m} b\,\mathrm{ch}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} + \gamma)\frac{ds}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))} =$$

$$= -b\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{ch}\,x\ \sin(x-\gamma)dx = [\text{Прудников 1.5.52.2, с. 236}]$$

$$= -\frac{b}{2}(\mathrm{sh}\,x\cdot\sin(x-\gamma) - \mathrm{ch}\,x\cdot\cos(x-\gamma))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= -\frac{b}{2}(\mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma) - 0 - 0 + \mathrm{ch}\,\gamma) = -\frac{b}{2}(\mathrm{ch}\,\gamma + \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)), \tag{19}$$

$$J_2 =$$

$$= b\int_{x_1}^{x_2} |\mathrm{th}(\beta(s-s_m))|\frac{\mathrm{sh}(2\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{e}^{\beta(s-s_m)} + \gamma)}{\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))}\mathrm{ch}(\beta(s-s_m))\,dx =$$

$$= b\int_{x_1}^{x_2} \left|\frac{\mathrm{tg}(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2}) - \mathrm{ctg}(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{tg}(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2}) + \mathrm{ctg}(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2})}\right| \mathrm{sh}\,x\,dx =$$

$$= b\int_{x_1}^{x_2} \left|\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\gamma}{2})\right|\ \mathrm{sh}\,x\,dx =$$

$$= b\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{sh}\,x\cdot|\cos(x-\gamma)|\,dx =$$

(в интервале (x_1, x_2) $\cos(x-\gamma) > 0$)

$$= b\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{sh}\,x\cdot\cos(x-\gamma)\,dx = [\text{Прудников 1.5.52.1, с. 235}]$$

$$= \frac{b}{2}(\operatorname{ch} x \cdot \cos(x-\gamma) + \operatorname{sh} x \cdot \sin(x-\gamma)\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\frac{b}{2}(0 + \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma) - \operatorname{ch}\gamma - 0) =$$

$$= \frac{b}{2}(\operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma) - \operatorname{ch}\gamma). \tag{20}$$

Тогда

$$\Delta_+\mathcal{E} = J_1 + J_2 = -b\operatorname{ch}\gamma. \tag{21}$$

Аналогично находится $\Delta_-\mathcal{E}$ с той лишь разницей, что

$$x_1 = x_{|s=s_m} = \frac{\pi}{2} + \gamma, \tag{22}$$

$$x_2 = x_{|s=s_t} = 2\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^{\beta(s_t-s_m)} + \gamma_{|s_t \gg s_m} = \pi + \gamma \ \left(\begin{array}{c}\text{космологи-}\\ \text{чески точно}\end{array}\right), \tag{23}$$

тогда, учитывая, что на интервале (x_1, x_2) $\cos(x-\gamma) < 0$, имеем

$$J_1 = -\frac{b}{2}(\operatorname{sh} x \cdot \sin(x-\gamma) - \operatorname{ch} x \cdot \cos(x-\gamma))\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$-\frac{b}{2}(0 - \operatorname{ch}(\pi+\gamma)(-1) - \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma) - 0) =$$

$$= \frac{b}{2}(\operatorname{ch}(\pi+\gamma) + \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)). \tag{24}$$

$$J_2 = -\frac{b}{2}(\operatorname{ch} x \cdot \cos(x-\gamma) + \operatorname{sh} x \cdot \sin(x-\gamma)\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= -\frac{b}{2}(\operatorname{ch}(\pi+\gamma)(-1) + 0 - 0 + \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)) =$$

$$= \frac{b}{2}(\operatorname{ch}(\pi+\gamma) - \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)). \tag{25}$$

Тогда

$$\Delta_-\mathcal{E} = J_1 + J_2 = b\operatorname{ch}(\pi+\gamma). \tag{26}$$

4. Шаговый обмен энергией. Так как полушаговое изменение энергии вычислено для полушагов одного шага в одной и той же системе координат, (общая формула для u^0), то **шаговое изменение энергии** $\Delta\mathcal{E}$ просто равно сумме изменения энергии на двух смежных полушагах

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta_+\mathcal{E} + \Delta_-\mathcal{E} = -b\operatorname{ch}\gamma + b\operatorname{ch}(\pi+\gamma) =$$

$$= m_{max}(\operatorname{ch}(\pi+\gamma) - \operatorname{ch}\gamma) = 2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma). \tag{1}$$

Очевидно, что при $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ изменение энергии на обоих полушагах шага одинаково по абсолютной величине и противоположно по знаку, так что на всём шаге $\Delta\mathcal{E} = 0$.

При этом шаг ориентирован так, что протистон покоится в момент s_m (то есть он находится в координатной **системе покоя сгона**).

$$|\Delta_+\mathcal{E}|_{|\gamma=-\pi/2} = |\Delta_-\mathcal{E}| = m_{max}\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Это согласуется с тем, что в системе покоя сгона $u^0_\pm = \mathrm{ch}\frac{\pi}{2}$ (I.12.4.1.2).

Так как полушаговое изменение энергии происходит монотонно, то здесь модуль изменения энергии равен изменению модуля энергии, то есть на полушагах

$$\Delta_+|\mathcal{E}| = |\Delta_+\mathcal{E}|, \tag{3}$$

$$\Delta_-|\mathcal{E}| = |\Delta_-\mathcal{E}|. \tag{4}$$

Однако

$$\Delta|\mathcal{E}| \neq |\Delta\mathcal{E}|. \tag{5}$$

Очевидно

$$\Delta|\mathcal{E}| \neq \Delta_+|\mathcal{E}| + \Delta_-|\mathcal{E}| = |\Delta_+\mathcal{E}| + |\Delta_-\mathcal{E}|. \tag{6}$$

Величину

$$\Delta|\mathcal{E}| = m_{max}(\mathrm{ch}\,\gamma + \mathrm{ch}(\pi+\gamma)) = 2m_{max}\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{ch}(\frac{\pi}{2}+\gamma) \tag{7}$$

будем называть **шаговым обменом энергии протистона**.

Излучение и поглощение энергии протистоном происходит порциями $|\Delta_+\mathcal{E}|, |\Delta_-\mathcal{E}|$, чередующимися друг с другом.

Заметим, что при учёте только интенсивности радиации, шаговое изменение энергии получается вдвое меньше. Это легко видеть, принимая во внимание при вычислении $\Delta_+\mathcal{E}, \Delta_-\mathcal{E}$ только интегралы J_1 и опуская J_2. Тогда

$$\Delta_+\mathcal{E} = -\frac{b}{2}(\mathrm{ch}\,\gamma + \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)),$$

$$\Delta_-\mathcal{E} = \frac{b}{2}(\mathrm{ch}(\pi+\gamma) + \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}+\gamma)),$$

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta_+\mathcal{E} + \Delta_-\mathcal{E} = \frac{m_{max}}{2}(\mathrm{ch}(\pi+\gamma) - \mathrm{ch}\,\gamma),$$

то есть вдвое меньше, чем (1).

Шаговое изменение энергии радиации так же как и шаговое изменение массы протистона определяется интегрированием производной dm/ds. Для сохранения баланса энергии необходимо, чтобы шаговая масса радиации была равна массе протистона.

5. Ультрарелятивистская инертность мировой линии протистона.
Мировую линию протистона, рассматриваемую в системе отсчёта, где её скорость ультрарелятивистская, будем называть **ультрарелятивистской**.

Приращение скорости протистона на кривом конце полушага относительно прямого конца будем называть **полушаговым разгоном** $\Delta\mathbf{u}$. Мы нашли, что

$$|\Delta\mathbf{u}| = \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Поскольку в изначальной системе отсчёта протистон обычно имеет сугубо ультрарелятивистскую скорость

$$|\mathbf{u}| \gg |\Delta\mathbf{u}|, \tag{2}$$

то, хотя композиция приращённой и уже набранной в релятивистской системе отсчёта скорости не аддитивна, полушаговый разгон почти не изменяет скорости $\mathbf{u}$, так что мировая линия ультрарелятивистского протистона практически остаётся прямой линией. Поэтому мировую линию протистона будем называть **ультрарелятивистски инертной**. То есть скорость $\mathbf{v}$ остаётся почти равной 1 и почти не изменяет направления.

6. Квантовая интенсивность радиации. В изначальной системе изменение энергии протистона на полушаге $\Delta\mathcal{E}$ происходит от 0 до $\mathcal{E}_S u^0$, то есть (2.5.5.3)

$$\Delta\mathcal{E} = c_S q^2 \beta u^0, \tag{1}$$

где

$$c_S = 3,1207. \tag{2}$$

Интенсивность излучения по определению

$$I = \frac{dm}{ds}. \tag{3}$$

Средняя по полушагу интенсивность в изначальной системе координат можно записать в виде

$$I = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta T} = \frac{c_S q^2 u^0 \beta}{2|k|} = \frac{c_s k_q^2 u^0 \beta}{2|k| T^6}. \tag{4}$$

Так как (3.6.8)

$$u^0\beta = \frac{8 S_J T}{3|k|}, \tag{5}$$

то с учётом $k_q = 1/(2^7\pi^5)$, получим

$$I = \frac{4 c_S k_q^2 S_J}{3k^2 T^5} = \frac{c_S S_J}{2^{12} 3 k^2 \pi^{10} T^5}. \tag{6}$$

7. Структура кванта радиации.

Обратим внимание, что длинному шагу при большой скорости может соответствовать большая частота излучения в направлении движения

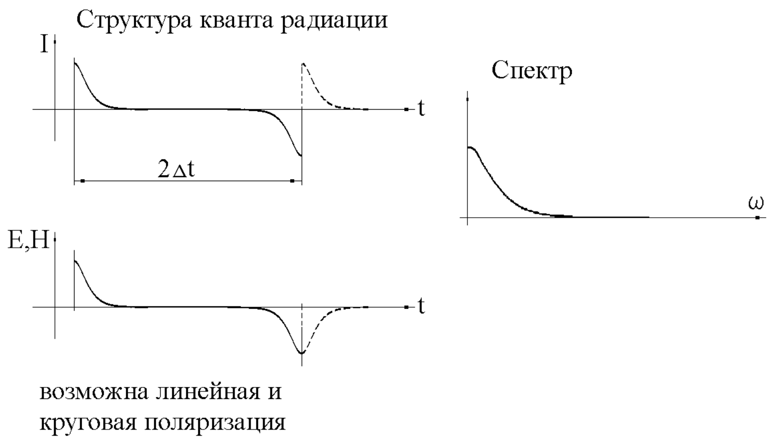


Рис. 203.12.

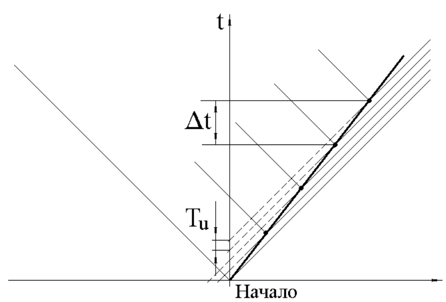


Рис. 203.13.

Чтобы сделать отсчёт расстояния или времени в той или иной системе координат, надо правильно спроектировать интервал на соответствующие оси координат, которые выглядят по-разному в разных системах координат.

8. Обратимость процессов радиации и их квантование. Уравнения электродинамики обратимы (симметричны) во времени. Поэтому процесс поглощения должен существовать наравне с процессом излучения. В классической электродинамике процесс поглощения рассматривается несимметрично процессу излучения с помощью понятия силы Лоренца, работа которой может соответствовать как излучению так и поглощению. Но в очень малых масштабах понятие силы Лоренца несостоятельно. Необходимо симметричное рассмотрение обоих процессов радиации. **Процесс радиации точечного заряда является объективным только при изменении массы этого заряда**, как единственной его энергетической характеристики, не зависящей от выбора системы отсчёта. Если изменяется только кинетическая энергия (без изменения массы), то это изменение не объективно, так как зависит от выбора системы отсчёта и может идти как в сторону увеличения энергии так и в сторону её уменьшения при одной лишь замене инерциальной системы отсчёта. Например, выбор системы отсчёта может изменить торможение на ускорение. Но, при постоянстве массы, торможение означает уменьшение энергии частицы, а ускорение – её увеличение. Изменение массы в макроскопических полях обычно столь незначительно, что на него в классической нерелятивистской электродинамике редко обращают внимание. В

микроскопических же полях процессы излучения и поглощения уравновешивают друг друга (вакуумные, или виртуальные взаимодействия). Объективно **радиация обязательно изменяет массу (энергию покоя) точечного заряда**. При этом направление радиации (излучение или поглощение) определяется направлением изменения массы (соответственно убывание или увеличение).

Но так как масса точечного заряда не может одновременно убывать и увеличиваться, то **процессы излучения и поглощения не совместимы во времени, то есть обязаны чередоваться**.

Чередование процессов радиации (излучения и поглощения) мы называем **квантованием радиации** (в самом широком смысле). Порцию излучения между соседними поглощениями называем **квизом (квантом излучения)**, а порцию поглощения между соседними излучениями называем **квапом (квантом поглощения)**.

Излучённый протистоном квиз уносит от протистона порцию энергии покоя (массы) m_m, но через некоторое собственное время Δs эта потерянная порция массы восполняется соседним по времени квапом. Порции m_m, вообще говоря, не одинаковы, но изменяются космологически медленно.

Расстояние

$$\Delta R = \frac{1}{2}\Delta s \cdot u^0, \tag{1}$$

на которое успевает улететь квиз, пока его не заменит следующий квап, будем называть **радиусом электромагнитной шубы (кокона) протистона**. Однако радиус электромагнитного влияния протистона уходит в бесконечность.

⋆⋆⋆

– Что же это значит Ватсон? – мрачно спросил Холмс, откладывая бумагу.

– Каков смысл этого круга несчастий, насилия и ужаса? Должен же быть какой-то смысл, иначе получается, что нашим миром управляет случай, а это немыслимо. Так каков же смысл? Вот он вечный вопрос, на который человеческий разум до сих пор не может дать ответа.

Артур Конан Дойл.
“Картонная коробка”. (Последний абзац).

Глава 4. ФРАГМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Статистические методы чрезвычайно важны (и хорошо разработаны [Ландау 5, 9]) в макроскопической физике. Мы коснёмся здесь лишь некоторых статистических понятий.

§1. Немного о статистических методах.

1. Сущность статистического метода познания.

Статистика это один из способов абстрагирования, который использует свойства конкретных феноменов для изучения общих свойств большого **ансамбля** (множества) феноменов.

2. Термодинамическое равновесие.

Если некоторая функция разлагается в ряд Фурье так, что каждой плоской волне с волновым вектором K^μ в её разложении соответствует такая же по амплитуде плоская волна, но с противоположным волновым вектором $(-K^\mu)$, то такая функция вещественна и, следовательно её плотность 4-тока равна нулю. При этом спектр симметричен отосительно инверсии знака. Для **единого поля** такая симметрия существует лишь в среднем. Эту симметрию (в среднем) будем называть **статистическим равновесием спектра**.

Статистическое равновесие мирового спектра означает, что в среднем единое поле вещественно, то есть его плотность 4-тока в среднем равна 0. Мы будем также говорить. что **равенство средней плотности 4-тока нулю является признаком (свойством) термодинамического равновесия**, понимая под этим тот факт, что математическое ожидание плотности 4-тока, усреднённой по большой области, равно нулю. Мы будем говорить также, что **плотность 4-тока стремится к** 0, понимая

под этим, что, если мы наблюдаем некоторую флуктуацию в осреднённой плотности 4-тока, то наиболее вероятно, что в дальнейшем плотность 4-тока этой флуктуации будет уменьшаться.

Отсюда следует, что заряды стремятся взаимно нейтрализоваться. Все заряды взаимно нейтрализовались бы, если бы не существовала флуктуационная компонента единого поля. Благодаря ей возможно существование разделённых точечных зарядов.

Следствием нулевой усреднённой плотности 4-тока является нулевая плотность её энергии, но отлична от нуля плотность энергии флуктуаций 4-тока и отлична от нуля плотность энергии электромагнитного поля, связанного с этими флуктуациями (**мирового шума**). Электромагнитное поле неравновесного мирового шума быстро (со скоростью света) рассеивается, оставляя лишь стоячие флуктуации, в результате чего плотность его энергии стремится к плотности энергии этих стоячих флуктуаций, которая в среднем постоянна.

Поэтому можно сказать, что свойством (признаком) термодинамического равновесия является также стремление к постоянной величине плотности энергии мирового шума, то есть к её равномерному распределению.

Флуктуации существуют лишь постольку, посольку спектры положительных и отрицательных частот единого поля принципиально поточечно не совпадают, хотя одинаковы при усреднении по большим областям.

Родство нашего понимания статистического равновесия его общепринятому пониманию демонстрирует, например, следующая цитата [Ландау 5, с. 18]: “Если замкнутая макроскопическая система находится в таком состоянии, в котором для любой её части, являющейся самой по себе макроскопическим телом, макроскопические физические величины с большой относительной точностью равны своим средним значениям, то говорят, что система находится в состоянии *статистического равновесия* (о нём говорят также как о *термодинамическом* или *тепловом* равновесии).”

В рамках этой книги из всей термодинамики нам понадобится представление о тепловом (термодинамическом, статистическом) равновесии и некоторые формулы, связывающие среднюю энергию частиц идеального газа и фотонов с температурой. Для температуры идеального газа протистонов (**протогаза**) достаточно её молекулярно-кинетического смысла [Кириченко]. Температура же теплового излучения определяется для состояния его теплового равновесия с идеальным протогазом. Для систематического ознакомления с термодинамикой мы отсылаем читателя, например к книге [Ландау 5].

3. Особенности осреднения функций в псевдоэвклидовом пространстве. Обычно под **усреднением** поля мы будем понимать нахождение среднего по всей области определения, а под **осреднением** – нахождение скользящего среднего с помощью **осредняющего ядра**, то есть свёртки поля и этого ядра.

Осреднённые значения величин мы будем обозначать теми же символами, что и не осреднённые, понимая разницу между ними из контекста. Но значения этих

величин, усреднённые по всему абсолютному пространству возраста T, будем отличать акцентом “ˇ” (“check” или по-русски “чек”).

Поскольку элемент $d\Omega$ 4-объёма инвариантен в преобразованиях Лоренца, то операция осреднения по элементам 4-объёма инвариантна. Однако, необходимо учитывать, что элемент $d\Omega$, достаточно малый (в смысле его 4-диаметра) в данной системе координат, испытывает деформацию в преобразовании Лоренца. И, если скорость новой системы координат релятивистски велика, то условие достаточной малости (по временно́й координате) может нарушиться (4-диаметр элемента может выйти за допустимые пределы).

4. Объективное (инвариантное) осреднение. Таким осреднением будем называть осреднение, не зависящее от выбора системы отсчёта. При этом, очевидно, необходима инвариантность осредняющего ядра и его интегрируемость. В 4-х-мерном случае этому условию удовлетворяет только 4-х-мерная δ-функция вида [Рихтмайер, (2.5.8)]

$$\delta(R^2) = \delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{2r}[\delta(t-r) + \delta(t+r)], \tag{1}$$

причём только её половина, соответствующая изотропному конусу прошлого. Тогда интегрируемость обеспечивается ограничением ядра границей Вселенной.

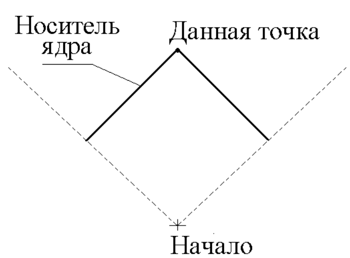


Рис. 204.1.

Интегрирование по элементу гиперплощади dV носителя 4-δ-функции равносильно интегрированию с весом $1/r$ по 3-шару радиуса T, то есть по очень большому объёму. Поэтому нвариантное осреднение в данной точке происходит по области космологически больших размеров, но благодаря весовому множителю $1/r$, оно отображает статистическое состояние поля в относительно малой пространственной окрестности этой точки.

Осреднение лишь по прошлому делает статистику неравноправной по отношению к прошлому и будущему, то есть появляется **статистическая стрела времени**.

§2. Осреднение энергии-импульса.

1. Статистическое условие наблюдаемости. Определим **статистическое понятие тензора плотности энергии-импульса** $\bar{T}^{\alpha\beta}$ как результат осреднения $T^{\alpha\beta}$ по малым (но не бесконечно малым – **микроскопическим**) элементам 4-объёма

$d\Omega$. Точный статистический смысл понятию осреднения по микроскопическим элементам 4-объёма придают **соотношения неопределённостей** квантовой механики. Пока же мы будем его применять абстрактно.

Под **статистической механикой**, мы понимаем новые закономерности механических систем, возникающие в результате осреднения тензора плотности энергии-импульса по микроскопическим элементам 4-объёма $d\Omega$. Такое осреднение будем называть **статистическим условием наблюдаемости** среды, описываемой этим тензором. Такое определение статистического условия наблюдаемости согласуется с практикой физических наблюдений, в которых всякое измерение физического поля относится не к одной точке 4-пространства, а к некоторой её окрестности.

Элемент 4-объёма $\Delta\Omega$ будем называть **макроскопическим**, если за время его существования находящуюся в нём механическую систему можно с достаточной (в условиях данной задачи) точностью считать замкнутой (**квазизамкнутость**).

2. Осреднение тензора плотности энергии-импульса.

Благодаря линейности операции осреднения, имеем осреднённый симметричный тензор (I.9.4.7.4)

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \bar{W} & \bar{S}_x & \bar{S}_y & \bar{S}_z \\ \bar{S}_x & \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{S}_y & \bar{\sigma}_{yx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{S}_z & \bar{\sigma}_{zx} & \bar{\sigma}_{zy} & \bar{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

А благодаря линейности операции дифференцирования, механические законы сохранения остаются справедливыми и для этого осреднённого тензора. То есть это также **тензор плотности энергии-импульса**, хотя и **осреднённый**. Благодаря симметричности этот тензор имеет не 16, а только 10 свободных параметров.

Равенство нулю среднего значения $\mathbf{S}$ в системе с подходящей скоростью движения в данной точке 4-пространства приводит компоненты тензора (1) к виду (I.9.4.8.1)

$$\bar{T}^{\alpha\beta}_{|s=0} = \begin{pmatrix} \bar{W}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{xz} \\ 0 & \bar{\sigma}_{yx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\sigma}_{yz} \\ 0 & \bar{\sigma}_{zx} & \bar{\sigma}_{zy} & \bar{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Теперь у него лишь 7 свободных параметров. Далее лишь 3-пространственной ориентацией системы координат можно симметричный тензор $\bar{T}^{\alpha\beta}$ привести к диагональному виду (I.9.4.8.2)

$$\bar{T}^{\alpha\beta}_{diag} = \begin{pmatrix} \bar{W}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

имеющему только 4 свободных параметра.

Здесь $\bar{W}_0$ - средняя на элементе dv плотность энергии в сопутствующей этому элементу системе, то есть это **плотность массы**. Будем её также обозначать e

$$e = \bar{W}. \tag{4}$$

3. Термодинамические понятия. **Термодинамические величины** характеризуют макроскопические состояния тел. [Ландау 5, §9].

При осреднении тензора $T^{\mu\nu}$ по микроскопическим элементам (**термодинамическое осреднение**), возникают новые (**термодинамические**) понятия, важнейшим из которых является **статистический вес** $\Delta\Gamma$ и связанные с ним понятия **энтропии**:

$$S = \ln \Delta\Gamma \tag{1}$$

и **температуры** T° [Ландау 5, с.59]:

$$T^\circ = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial S}\right)_V , \tag{2}$$

где $\mathcal{E}$ - энергия, а производная берётся при постоянном объёме.

Термодинамическое равновесие двух тел (в отсутствие гравитации) характеризует равенство их температур. Разница температур вызывает перетекание энергии (**тепловой**) от тела с большей температурой к другому.

Переход замкнутой системы из статистически неравновесного состояния в равновесное (**релаксация**) сопровождается возрастанием энтропии. За исключением ничтожных флуктуаций, все замкнутые системы стремятся к статистическому равновесию, то есть **энтропия по крайней мере не убывает**. В этом состоит **2-й закон термодинамики**. Согласно этому закону и вся Вселенная вечно находится в состоянии релаксации. Поэтому представления о статистическом равновесии применимы лишь в ограниченном смысле. Начало Вселенной в термодинамическом смысле является особой точкой.

Суть первого закона термодинамики исчерпывается законом сохранения энергии.

Макроскопическое состояние находящегося в равновесии неподвижного тела полностью определяется всего двумя величинвми, например объёмом и энергией. Все остальные термодинамические величины могут быть выражены как функции этих двух. Разумеется, в силу такой взаимной зависимости различных термодинамических величин в качестве независимых переменных можно пользоваться и любой другой их парой. [Ландау 5, §12].

Уравнение, связывающее давление, объём и температуру, называют **уравнением состояния** данного тела. [Ландау 5, §16]. (3)

4. Давление. В изотропном случае $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = p$

$$\bar{T}^{\alpha\beta}_{diag} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{1}$$

что выражает **закон Паскаля**, применимый к жидкостям, газам и часто к твёрдым телам, то есть, вообще говоря, – к **текучим телам** (I.9.4.8.3),[Ландау 5, (12,1)]. При этом 3-тензор $\bar{T}^{ij}_{diag}$ являющийся 3-мерной частью матрицы $\bar{T}^{\alpha\beta}$

$$\bar{T}^{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{2}$$

можно представить в виде

$$\bar{T}^{j}_{i} = p\,\delta^{j}_{i}. \tag{3}$$

Пусть рассматриваемая механическая система с тензором плотности энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$, хотя бы при осреднении его по малым элементам объёма dv, может считаться однородной и изотропной средой. При этом, очевидно, систему отсчёта надо выбирать сопутствующей импульсу элемента dv. Изотропность означает инвариантность 3-тензора σ_{ab} относительно вращений в 3-пространстве, то есть он должен иметь вид

$$\sigma_{ab} = p\,\delta_{ab}, \tag{4}$$

где p - скаляр, который называется **давлением**.

Как всякое напряжение, давление является результатом обмена 4-импульсом (**метаболизма**) между элементами объёма.

Заметим, что такое статистическое определение давления не вполне объективно (зависит от способа осреднения). Это проявляется во **флуктуациях** давления, которые можно сделать относительно достаточно малыми при увеличении осредняющих элементов dv.

Таким образом, в характерном для статистической физики изотропном случае в сопутствующей системе отсчёта тензор энергии-импульса для объёма dv должен иметь вид

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где e - плотность энергии в сопутствующей системе.

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса в любой системе отсчёта. Для этого введём 4-скорость u^{μ} **макроскопического движения элемента объёма среды**, то есть элемента объёма, через границы которого нет потока энергии. В локальной системе покоя её компоненты: $u^0 = 1$, $u^a = 0$. 4-х-мерное выражение для $\bar{T}^{\mu\nu}$, обращающееся в (5) при этих значениях u^{μ}, есть [Ландау 2, (35,2)]

$$\bar{T}^{\mu\nu} = (p+e)\,u^{\mu}u^{\nu} - p\,g^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Записав этот тензор в форме

$$\bar{T}^{\mu}_{\nu} = (p+e)\,u^{\mu}u_{\nu} - p\,\delta^{\mu}_{\nu} \tag{7}$$

и сворачивая его, получим инвариант

$$\bar{T}^{\mu}_{\mu} = (p+e) - 4p = e - 3p = Sp\,\bar{T}^{\mu\nu}. \tag{8}$$

5. Статистическое уравнение движения текучей среды.
Тензор $T^{\mu\nu}$ энергии-импульса электромагнитного поля нельзя привести к диагональному виду, так как скорость потока энергии электромагнитного поля равна релятивистскому пределу, недостижимому для систем отсчёта

$$v = \frac{|\mathbf{S}|}{W} = \frac{S}{S} = 1.$$

Но для осреднённого тензора $\bar{T}^{\mu\nu}$ это уже не так, поскольку

$$\langle|\mathbf{S}|\rangle \leqslant |\mathbf{S}|,$$

причём знак равенства возможен лишь для абсолютно плоских волн, чего практически не бывает. Плоские волны возникают лишь в разложениях реальных волн в интеграл по плоским волнам, где статистический вес каждой конкретной плоской волны бесконечно мал. Таким образом практически всегда тензор энергии-импульса текучей среды приводится к диагональному виду.

Осреднённый (как и не осреднённый) тензор плотности энергии-импульса удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\nabla_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

Наличие осреднения (которое практически всегда имеет место) будем подразумевать. Подставляя (4.6), имеем

$$\nabla_\mu((p+e)u^\mu u^\nu) - \nabla^\nu p = 0.$$

Применяя операцию ∇_ν, получим

$$\nabla_\mu \nabla_\nu((p+e)u^\mu u^\nu) - \Box\, p = 0. \tag{2}$$

То есть получили 4-х-мерную форму **статистического уравнения движения текучей среды**. Откуда при $e = -p$ имеем волновое уравнение со скоростью звука $v_a = 1$

$$\Box p = 0, \quad \Box e = 0, \quad e = -p, \quad v_a = 1. \tag{3}$$

6. Продольный звук. Попробуем рассмотреть то же уравнение неразрывности (5.1), отделяя временну́ю часть от пространственной. Тогда имеем (в произвольно выбраной инерциальной системе)

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0, \quad \nabla_\mu T^{\mu i} = 0. \tag{1}$$

Или, учитывая, что $\nabla_\mu = (\partial/\partial x^0,\, \nabla_i)$ [Ландау 2, с. 34], имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x^0} + \nabla_i S^i = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^0} + \nabla_j T^{ij} = 0. \tag{3}$$

Переписывая $\nabla_j T^{ij}$ **для 3-изотропной среды** (в той же инерциальной системе) в виде

$$\nabla_j T^{ij} = \nabla^j T^i_j = \nabla^j p\ \delta^i_j = \nabla^i p = \nabla p, \tag{4}$$

где p - давление, получим

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^0} + \nabla^i p = 0. \tag{5}$$

Применяя операцию ∇_i, получим, изменяя порядок дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\nabla_i S^i + \Delta p = 0. \tag{6}$$

Подставляя $\nabla_i S^i$ из (2), получим (в выбраной ограниченой нерелятивистской 3-области, учитывая, что в ней $W = W_0 = e$)

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^{02}} - \Delta p = 0, \tag{7}$$

что по переменным составляющим совпадает с [Ландау 6, (134,13)].

Уравнение (7) справедливо лишь для таких сред, для которых существует инерциальная система отсчёта, где среда 3-изотропна. Поэтому (7) будем называть **уравнением движения 3-изотропных сред**. Оно описывает любые движения, не нарушающие изотропность среды, в частности **продольный звук**, который определяется как достаточно слабое нарушение **однородности** среды.

Связь между e и p является **гидродинамическим уравнением состояния** [Ландау 6, с. 697],[Ландау 5, с. 68].

$$e = e(p). \tag{8}$$

Если $\partial e/\partial p$ практически постоянно, в то время как e и p имеют переменные части $e' = \partial e/\partial t$ и $p' = \partial p/\partial t$, то можно записать

$$e' = \partial e/\partial t = (\partial e/\partial p)\, p' \tag{9}$$

и тогда для переменной части из (7) имеем

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^{02}} - \frac{1}{(\partial e'/\partial p')}\Delta p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^{02}} - v_a^2 \Delta p' = 0, \tag{10}$$

где

$$v_a = 1/\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

То есть получили волновое уравнение со **скоростью звука** v_a.

Как видим, уравнения (5.3) и (6.7) не совпадают, причиной чего являются раздельные законы сохранения энергии и импульса (2) и (3). Общий же закон их сохранения (5.1) допускает волновое уравнение (5.3) с инвариантными величинами e и p, которые можно отнести только к **вакууму**, гравитационные возмущения которого можно характеризовать отклонением скорости v_a от 1, а также изменением её направления, то есть, вообще говоря, возмущения вакуума (в частности гравитация) характеризуются тензорными величинами (как и сама плотность энергии).(12)

§3. Вакуум.

1. Уравнение состояния 3-изотропного электромагнитного шума.

Тензор плотности энергии импульса электромагнитного поля имеет вид [Ландау 2, §33, с. 109,110]

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\times$$

$$\begin{pmatrix} 4\pi W & 4\pi S_x & 4\pi S_y & 4\pi S_z \\ 4\pi S_x & -E_x^2-H_x^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) & -E_xE_y-H_xH_y & -E_xE_z-H_xH_z \\ 4\pi S_y & -E_yE_x-H_yH_x & -E_y^2-H_y^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) & -E_yE_z-H_yH_z \\ 4\pi S_z & -E_zE_x-H_zH_x & -E_zE_y-H_zH_y & -E_z^2-H_z^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Под **3-изотропным стоячим электромагнитным шумом** будем понимать электромагнитное поле, для которого существует такая (**сопутствующая**) инерциальная система координат, в которой компоненты векторов $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ электромагнитного поля случайно и независимо осциллируют. При этом произведение любых таких двух разных компонент не содержит постоянной составляющей (**осциллирует**), то есть при осреднении стремится к нулю. В частности вектор плотности потока импульса $\mathbf{S}$ в стоячем электромагнитном шуме осциллирует (поэтому при осреднении обнуляется) . Он не может осциллировать только в плоских (или хотя бы в локально плоских) волнах.

Предполагая шумоподобное поле электромагнитных волн и игнорируя в этом выражении компоненты, не содержащие постоянной составляющей (исчезающие при осреднении), получим выражение для осреднённого тензора плотности энергии-импульса этого поля (в сопутствующей системе)

$$\dot{\bar{T}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\times$$

$$\begin{pmatrix} 4\pi\bar{W}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x^2-H_x^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_y^2-H_y^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_z^2-H_z^2+\frac{1}{2}(E^2+H^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Легко заметить, что след этого тензора равен нулю

$$\dot{T}_{\alpha}^{\alpha} = 0, \tag{3}$$

однако, благодаря осреднению, тензор приводится к диагональному виду (**чего нельзя сделать для не осреднённого тензора** ([Ландау 2, §33, сноска 1)]), поэтому в случае статистически 3-изотропных (то есть **стоячих**) шумовых электромагнитных волн имеем (обозначая $W_0 = e$)

$$\dot{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}e \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Откуда по определению давления получаем

$$p = \frac{1}{3}e. \tag{5}$$

Это **уравнение состояния 3-изотропного электромагнитного шума в сопутствующей системе координат**.

Таким образом, для плотности энергии 3-изотропного стоячего электромагнитного шума, имеем из (2.5.2) уравнение

$$4\nabla_\mu\nabla_\nu(e\,u^\mu u^\nu) - \Box e = 0. \tag{6}$$

2. Физический вакуум как 4-изотропный электромагнитный шум.
В силу статистической симметрии плотности мирового спектра относительно преобразований Лоренца, такую же симметрию имеет и единое и электромагнитное поле. При этом псевдоэвклидова метрика спектрального пространства порождает изотропный конус с вершиной в Начале, выделяющий в 4-пространстве расширяющийся шар Вселенной. Точечные заряды могут существовать только во Вселенной, поэтому их радиация при удалении от Вселенной стремится к нулю. Симметрия мирового спектра допускает существование статистически 4-однородной и 4-изотропной компоненты электромагнитного шума во всём 4-пространстве. Плотность энергии такой компоненты не равна нулю в силу существования статистически 4-изотропного прогаза заряженных излучающих частиц. Такой 4-однородный и 4-изотропный электромагнитный шум мы будем называть **вакуумом**. Из статистической 4-однородности и 4-изотропности вакуума следуют механические законы сохранения для находящихся в нём механических

систем (в том числе закон инерции), которые делают **вакуум ненаблюдаемым** в макроскопических масштабах. При этом микроскопические эффекты несохранения, связанные с флуктуациями вакуума, будем называть **виртуальными**. Заметим, что глобальная волна единого поля сама по себе никакого электромагнитного поля не создаёт, так как плотность заряда этой волны равна нулю. То есть электромагнитное поле происходит только от флуктуационной компоненты единого поля, хотя глобальная волна на него влияет.

Ненулевая плотность энергии вакуума при его 4-изотропности означает, что она должна быть скаляром. В том числе должна быть скаляром **плотность энергии** $d_\omega \bar{W}$ **электромагнитного шума в интервале частот** $d\omega$. Это особый случай, когда статистический тензор энергии-импульса инвариантен, то есть имеет вид

$$d_\omega \bar{T}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \, d_\omega \bar{W}. \tag{1}$$

Инвариантность тензора $d_\omega \bar{T}^\mu_\nu$ возможна только благодаря тому, что при переходе в другую систему отсчёта (с ненулевой скоростью относительно первой) частотные компоненты, вышедшие из-за эффекта Доплера из интервала $d\omega$, замещаются в полной мере частотными компонентами, вошедшими в этот интервал. Это особый (**метаболический**) случай инвариантности тензора плотности энергии-импульса (точнее - его пространственно **частотной плотности**).

Симметричность обмена частотными компонентами обеспечивает сохранение энергии электромагнитного вакуумного шума в каждом частотном интервале.

Инвариантность тензора (1) означает также, что **плотность импульса** $d_\omega \mathbf{S}$ электромагнитного поля в интервале частот $d\omega$ равна 0, а это означает, что интенсивности шумового потока через любую плоскую площадку в обоих направлениях равны (**уравновешены**). Иными словами, **вакуумный шум имеет равновесный (стоячий) характер**. Причём это не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта (**абсолютная равновесность**), хотя, например, равновесное тепловое излучение сохраняет свою равновесность (**относительную**) только в одной (сопутствующей ему) системе отсчёта. То есть любая инерциальная система отсчёта является сопутствующей абсолютному вакууму. Для ускоренных систем отсчёта это уже не вполне справедливо, так как в таких системах вакуум проявляет себя наблюдаемой **температурой Унру** (смотри ниже), хотя этот эффект обычно очень мал. Заметим, что такое проявление вакуума противоречит представлению об универсальности общего принципа относительности.

За вычетом **вакуумной (шумовой) компоненты единого электромагнитного поля**, остальную часть единого электромагнитного поля назовём **информативной компонентой единого электромагнитного поля**. Примем во внимание возможную неоднозначность такого разложения поля!

3. Глобальное решение уравнения для плотности энергии вакуума. Так как тензор плотности энергии-импульса вакуума мы определили как инвариантный, то он является текучей средой с уравнением состояния $e = -p$, подчиняющейся

волновому уравнению (2.5.3) в любом из двух видов:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \Delta e = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0. \qquad (e = -p) \tag{1}$$

Найдём глобальные решения этого уравнения в изначальной системе координат. Они зависят только от гипеосферических координат $T = S = Q$. Записывая (1) через оператор Даламбера в гиперсферических координатах (см. гл. 4), имеем:

$$\frac{1}{r^2 T}\frac{\partial}{\partial T}\left(r^2 T \frac{\partial e}{\partial T}\right) = 0, \tag{2}$$

где

$$r = \varepsilon(\sigma)\, T \operatorname{sh}\sigma,$$

откуда

$$\frac{\partial e}{\partial T} = \frac{c_1}{T^3},$$

$$e = \frac{-c_1}{2T^2} + c_2. \tag{3}$$

При достаточно большом возрасте Вселенной первое слагаемое пренебрежимо мало, но имеет градиент, чего нет у второго слагаемого, поэтому, как увидим ниже, первое слагаемое более важное в отношении гравитации. Компоненту вакуума, соответствующую первому слагаемому назовём **Δ-вакуумом**, а другую – **0-вакуумом**. Тогда **плотность энергии вакуума** можно записать в виде

$$e_V = e_\Delta + e_0, \tag{4}$$

где e_0 – положительная постоянная – **плотность энергии 0-вакуума**,

$$e_\Delta = \frac{c_\Delta}{T^2} > 0, \quad c_\Delta = -c_1/2 \tag{5}$$

– **плотность энергии Δ-вакуума**.

Эти плотности энергии являются инвариантами относительно преобразований Лоренца, поэтому могут рассматриваться как плотности энергии покоя (массы). Поскольку уравнение решалось в гиперсферических координатах, область значений которых ограничена внутренней полостью изотропного конуса Вселенной, то найденное решение можно рассматривать как ограниченное этим конусом, но также можно распространить его на всё пространство. Это не влияет на дальнейшее развитие теории, так как в обоих случаях влияние вакуума лишь виртуальное, то есть не нарушающее статистических законов сохранения **механических систем, погружённых в вакуум**. Детерминированные результаты можно получить только непосредственно вычисляя с неограниченной точностью какие-либо области единого поля. Таким образом **при статистическом подходе вакуум является средой, не имеющей собственных сохраняющихся механических величин, кроме**

скалярной плотности энергии, но это лишь в среднем за **макроскопические промежутки времени**, а в течении **микроскопических промежутков времени** вакуум может иметь эти величины в качестве случайных, осциллирующих около нулевого значения. Постоянная e_0 аналогична Λ-члену общей теории относительности.

Скалярность плотности энергии вакуума делает его термодинамически равновесным с телами любой температуры. В этом смысле **температура вакуума имеет неопределённое значение**. Вакуум, хотя и взаимодействует с протистонами, но это взаимодействие, в силу высокой статистической однородности и изотропности вакуума, имеет временный (**виртуальный**) характер, нарушающий законы сохранения только на микроскопическое время. Но и такое микроскопическое взаимодействие может иметь макроскопические следствия (например, квантовые переходы).

Плотность энергии в виде (4) является глобальной (средней по Вселенной), но кроме неё существует локальная инвариантная плотность энергии гравитации, которую мы рассмотрим ниже. Такие локальные отклонения нарушают однородность и изотропность среды, что делает её наблюдаемымой в виде гравитационного потенциала, который для устойчивых отклонений всегда отрицателен. Низкий гравитационный потенциал таких отклонений привлекает сюда протистоны и реликтовое излучение, которое здесь будет иметь бóльшую плотность энергии (температуру). Для таких локальных возмущений возможен **гравитационный коллапс**, максимально замыкающий такие системы. Однако он не может приводить к большей концентрации, чем это допускает интервал звена протистна, то есть **сингулярность плотности энергии не возможна, кроме как на изотропном конусе (границе) Вселенной**.

Рассмотренное здесь единое электромагнитное вакуумное поле очевидно отличается от рассмотренного в пункте 1 частного случая 3-изотропного электромагнитного поля.

4. Незамкнутость Вселенной относительно вакуума.

Протистоны существуют только внутри Вселенной. Протистон является источником как своего поля излучения, так и своего поля поглощения. Последнее в направлении в прошлое уходит за пределы Вселенной, то есть имеет место **незамкнутость Вселенной относительно радиации**, точнее - её поглощаемой компоненты. Поэтому **Вселенная не замкнута относительно вакуума**.

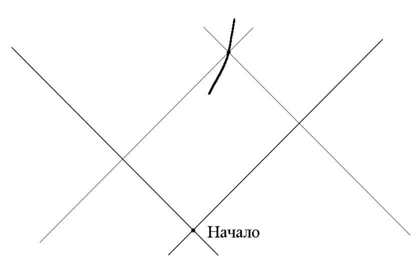


Рис. 204.2.

§4. Статистические основания космологического ускорения протистонов.

Согласно (I.8.5.5.3) темп протистона растёт пропорционально корню квадратному из возраста Вселенной. Этому есть наглядные статистические основания.

1. Вероятные скорости в релятивистски однородной и изотропной среде. Если в данной точке статистические характеристики среды не зависят от преобразования Лоренца (4-инвариантны), то такую среду в этой точке будем называть **релятивистски изотропной**. Если эти характеристики не зависят от 4-х-мерных трансляций, то среду будем называть **релятивистски однородной**. Эти свойства среда может иметь как вместе так и порознь.

В релятивистски однородной и изотропной среде все её точки и направления (в 4-х-мерном смысле) равноправны. Если полости изотропного конуса равномерно заполнить прямыми линиями, проходящими через его вершину, то в любом 4-пространственном угле с вершиной, совпадающей с вершиной конуса, окажется число линий пропорциональное этому углу. Но 4-пространственный угол внутри всего изотропного конуса бесконечно велик, поэтому для его заполнения потребуется бесконечно много линий. Причём для скоростей v этих линий значение $v = 1$ является точкой сгущения.

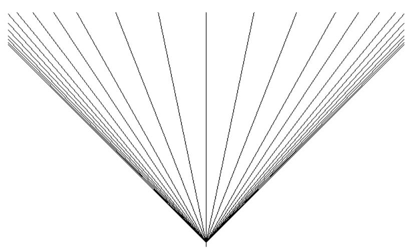


Рис. 204.3.

Иначе говоря, произвольно выбранная мировая линия в релятивистски однородной и изотропной среде имеет скорость бесконечно мало отличающуюся от 1. Вероятность того, что это не так, хотя и существует, но бесконечно мала. Хотя единое поле четырёхмерно однородной и изотропной средой не является, оно стремится к этому с возрастом Вселенной, чему соответствует ускорение протистонов.

2. Мультипликативность композиции однонаправленных ультрарелятивистских скоростей. Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x. Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости частицы в системе K, а $v'_x = dx'/dt'$ – компонента скорости той же частицы в системе K'.

4-скорость u^μ (скорости v_x) связана с 4-скоростью u'^μ (скорости v'_x) и с 4-скоростью U^μ (скорости V) групповым произведением (**композицией** скоростей)

$$u^\mu = U^\mu \otimes u'^\mu. \tag{1}$$

Согласно релятивистскому преобразованию скоростей (I.9.6.9.4), рассмотрим частный случае движения частицы параллельно оси x $v_x = v,\ v_y = v_z = 0$. Тогда

$v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причём (I.9.6.9.5)

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V}. \tag{2}$$

Выражая скорости v, v', V через их темпы u^0, u'^0, U^0 по общей формуле

$$1 - v^2 = 1/u^{02}, \tag{3}$$

представляя (2) в виде

$$1 - v^2 = 1 - \frac{v'^2 + V^2 + 2v'V}{1 + v'^2V^2 + 2v'V} = \frac{1 + v'^2V^2 - v'^2 - V^2}{1 + v'^2V^2 + 2v'V} = \frac{(1 - V^2)(1 - v'^2)}{(1 + v'V)^2},$$

получим

$$u^{02} = (1 + v'V)^2 U^{02} u'^{02}, \tag{4}$$

откуда имеем **мультипликативность композиции однонаправленных ультрарелятивистских скоростей**

$$u^0 = 2U^0 \cdot u'^0, \qquad v' \to 1,\ V \to 1. \tag{5}$$

При заданных условиях переход частицы из одной системы отсчёта в другую изменяет направление её движения на противоположное, тогда для **композиции противоположно направленных ультрарелятивистских скоростей**, после их переобозначения, получим

$$u^0 = 0,5U^0/u'^0, \qquad v' \to 1,\ V \to 1. \tag{6}$$

3. Релятивистское броуновское движение. Рассмотрим произвольную мировую линию. Пусть она разбита **контрольными точками** на i-тые отрезки такие, что пространственная компонента $\mathbf{u}$ 4-скорости конца каждого отрезка, взятая в системе отсчёта, где начало отрезка покоится, имеет недетерминированное самой линией направление. Как мы показали в пункте 1, нерелятивистское движение точки с такой мировой линией мало вероятно, то есть оно ультрарелятивистское. Движение точки, соответствующее такой мировой линии, будем называть **релятивистским броуновским движением**, а мировую линию - **броуновской мировой линией**. Названные отрезки броуновской мировой линии будем называть **броуновскими шагами**.

Пусть логарифм компоненты u^0 4-скорости испытывает на каждом таком шаге в среднем одинаковое по модулю приращение, но случайное изменение знака:

$$\ln u'^0 = \ln u^0 \pm \delta_L, \tag{1}$$

то есть приращения величины $\ln u^0$ на броуновских шагах мировой линии аддитивны и могут рассматриваться как **случайные блуждания** величины $\ln u^0$ с шагом δ_L,

равновероятным в обе стороны. Тогда для среднего квадрата величины $\ln u^0$ за N_T броуновских шагов имеем (см. , например, [Кириченко, с. 127]):

$$\langle \ln^2 u^0 \rangle = N_T \delta_L^2 \tag{2}$$

или

$$\sqrt{\langle \ln^2 u^0 \rangle} = \delta_L \sqrt{N_T}. \tag{3}$$

То есть компонента 4-скорости u^0 зависит от N_T экспоненциально, достигая при больших N_T гигантских значений.

4. Основное состояние движения протистона. Заметим что такого типа релятивистское броуновское движение **материальной** точки требует достаточно мощного притока энергии (в силу её сохранения), поэтому в пассивной однородной и изотропной среде осуществляться не может. Однако, если от материальной точки не требовать постоянства её массы, то возможно её самоускорение по реактивному принципу за счёт собственной энергии. Выше мы показали, что протистон космологически самоускоряется, но далеко не так быстро (экспоненциально), как в релятивистском броуновском движении, а по степенному закону, что соответствует сильной **корреляции в ориентации соседних шагов**, в отсутствие которой это ускорение должно быть экспоненциальным. Такая корреляция, вызванная стремлением к минимизации энергии протистона, должна приводить к почти цикличности движения, то есть к его почти замкнутости. Это проявлется в **инертности мировой линии протистона**. То есть последовательность шагов образует мировую линию протистона, осциллирующую около некоторой прямой мировой линии **центра инерции протистона**, при условии статистической однородности и изотропности среды. При этом в системе, сопутствующей инерцоиде, осреднённая энергия протистона минимальна. Это состояние движения протистона назовём **основным**.

5. Статистическое описание протистонов. Движение протистона можно определить не мировой линией, а лишь статистически 4-плотностью потока вероятности его местонахождения ϱ^μ. В этом случае к протистону (точнее - к его 4-плотности потока вероятности) применимо понятие силы Лоренца (которое мы разберём позже). По заданному внешнему полю можно пытаться найти функцию ϱ^μ и наоборот. Волновое уравнение, которое мы найдём для ϱ^μ, имеет различные решения, которые мы будем называть **состояниями протистона**.

Важно также понимать, что функция ϱ^μ не несёт всей информации о конкретном протистоне, то есть является абстрактным понятием и может даваться с большей или меньшей степенью информативности (точности). Кроме того, состояние протистона, описываемое функцией ϱ^μ, может быть описано свёрткой двух (и более) других аналогичных функций $\varrho_1^\mu, \varrho_2^\mu$, что можно рассматривать как движение иначе определённого состояния ϱ_1^μ протистона с другой 4-плотностью ϱ_2^μ потока вероятности местоположения этого состояния.

Важность статистических понятий для протистона обусловлена наличием в рамках электродинамики некоторой степени свободы мировой линии протистона на её стыках. Использование 4-плотности потока вероятности ϱ^μ порождает **понятия средних значений различных величин, относящихся к протистону**. Поскольку средние значения величин, вообще говоря, поддаются измерению, то их связь с полем ϱ^μ означает объективность этого поля. Связь средних значений с видом поля ϱ^μ изучается в квантовой механике.

Вообще говоря мировая линия протистона может быть **многопроходной**. К одному сгону могут сходиться и на нём обрываться две мировые линии – одна протистона, а другая – антипротистона. Такой сгон можно рассматривать как **поворот** мировой линии во времени. При этом следует различать вершины многопроходного пути типа аннигиляции (2) и рождения пар (1).

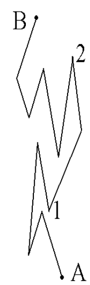


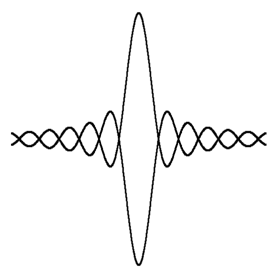
Рис. 204.4.

Отрезок мировой линии между двумя ближайшими поворотами в абсолютном времени будем называть **проходом** мировой линии. Проход может быть **прямым** или **обратным** во времени. Для квантово-механического описания газа протистонов его многопроходность, как будет видно ниже, существенного значения не имеет.

⋆⋆⋆

Господь создал всё из ничего, но материал всё время чувствуется.

Поль Валери.



Глава 5. СИЛА ЛОРЕНЦА

Определение силы Лоренца непротиворечиво только для заряженных материальных точек с постоянной массой. Но масса протистона не постоянна, поэтому понятие силы Лоренца можно применять только к протистону в представлении квазиточечным зарядом, что делает **силу Лоренца статистическим понятием**.

§1. Сила Лоренца требует постоянство массы.

1. Макроскопическая свобода мировой линии протистона. Итак, мировая линия протистона составлена из стандартных кривых отрезков (шагов), гладко соединённых друг с другом с возможностью вращения вокруг общей касательной в точке соединения (стыке). Такое вращение имеет 1 степень свободы. Движение протистона внутри шага строго определено уравнением движения, а параметры степеней свободы сочленений самой мировой линией не определяются. Поэтому при **сглаживании**, то есть игнорировании мелкими подробностями отрезка мировой линии, содержащего много шагов, форма мировой линии свободно определяется статистическими законами. Ограничена лишь кривизна этой сглаженной линии, в силу её шаговой структуры.

Эта **макроскопическая свобода мировой линии** позволяет поставить задачу нахождения уравнения движения протистона, рассматриваемого в этом случае как **квазиточечный заряд** с гладко изменяющейся (в силу сглаживания) практически постоянной массой. Эту задачу можно решить с помощью принципа наименьшего действия. Тогда возникает понятиие силы Лоренца, действующей на квазиточечный заряд в электромагнитном поле. При этом и электромагнитное поле само предполагается сглаженным, то есть высокочастотные компоненты поля, периоды волн которых много меньше длительности шагов протистонов, не существенны.

2. Сила Лоренца. (Сравни с [Савельев 1, с. 230], [Ландау 2, с. 85], [Логунов,

с. 68]). Для механической системы, состоящей из квази-точечного заряда q и электромагнитного поля A_μ, действие согласно лагранжиану (I.11.5.1.8) имеет вид

$$S = -\int_1^2 (m\ ds + q\ A_\mu\ dx^\mu) - \frac{1}{16\pi}\ \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\ d\Omega, \tag{1}$$

где m – масса заряда.

Для определения траектории заряда (мировой линии) при заданном поле нужно варьировать лишь саму эту мировую линию, не изменяя поле. Это можно сделать лишь в том случае, если под A_μ понимается внешнее поле, а самодействием заряда можно пренебречь, то есть если выполняются условия несамодействия.

При этом второй интеграл не варьируется, то есть его вариация равна нулю. Приравнивая вариацию действия к нулю, имеем:

$$\delta S = \delta \int_1^2 (-m\sqrt{dx_\mu dx^\mu} - q\ A_\mu\ dx^\mu) = 0. \tag{2}$$

В отличие от интеграла по 4-х-мерной области, который не варьируется, в этом криволинейном интеграле значения поля A_μ берутся на варьируемой траектории и поэтому варьируются.

Обратим внимание на то, что заряд мы здесь будем считать заданным и постоянным. Заряд в нашей теории действительно задан и с космологической точностью постоянен.

Здесь мы допускаем для общности, что масса зависит от траектории, поэтому её нужно варьировать, так как варьируется трактория.

Осуществляя варьирование, получим

$$\int_1^2 (-\delta m\ ds - m\ \frac{dx_\mu\ d\delta x^\mu}{ds} - q\ A_\mu\ d\delta x^\mu - q\ \delta A_\mu\ dx^\mu) = 0.$$

Во втором члене $dx_\mu / ds = u_\mu$ – 4-скорость. Второй и третий члены проинтегрируем по частям, а в первом произведём замену:

$$\delta m = \frac{\partial m}{\partial x^\mu}\, \delta x^\mu.$$

Тогда

$$\int_1^2 (-\frac{\partial m}{\partial x^\mu}\ \delta x^\mu\ ds + m\ du_\mu\ \delta x^\mu + q\ dA_\mu\ \delta x^\mu - q\ \delta A_\mu\ dx^\mu) -$$

$$-(m\ u_\mu + q\ A_\mu)\delta x^\mu \Big|_1^2 = 0.$$

Член вне интеграла равен нулю, так как на пределах вариация координат равна 0. Произведём замену:

$$dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ dx^\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ u^\nu\ ds,$$

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ \delta x^\nu, \quad dx^\mu = u^\mu\ ds.$$

В результате получим

$$\int_1^2 (-\frac{\partial m}{\partial x^\mu}\ \delta x^\mu\ ds + m\ \delta x^\mu\ \frac{du_\mu}{ds}\ ds + q\ \delta x^\mu\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ u^\nu\ ds -$$

$$-q\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ \delta x^\nu\ u^\mu\ ds) = 0.$$

В четвёртом члене поменяем местами индексы μ и ν, что возможно, так как по обоим индексам производится суммирование. Получим, вынося за скобки общие члены:

$$\int_1^2 (-\frac{\partial m}{\partial x^\mu} + m\ \frac{du_\mu}{ds} + q\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ u^\nu - q\ \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\ u^\nu)\ \delta x^\mu\ ds = 0.$$

Для того чтобы написанное условие выполнялось при произвольных δx^μ, необходимо:

$$-\frac{\partial m}{\partial x^\mu} + m\ \frac{du_\mu}{ds} + q\ (\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu})\ u^\nu = 0.$$

Это и есть уравнение движения квазиточечного заряда q в заданном электромагнитном поле A_μ. Так как

$$\frac{\partial m}{\partial x_\mu} = \frac{\partial m}{\partial x_\nu}\delta^\mu_\nu = \frac{\partial m}{\partial x_\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{dm\ dx^\mu}{(ds)^2} = \frac{dm}{ds}\ u^\mu$$

и

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu},$$

то уравнению движения можно придать вид

$$\frac{dP_\mu}{ds} = q\ F_{\mu\nu}\ u^\nu + 2\frac{dm}{ds}\ u_\mu,$$

где $F^{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля,
или

$$\frac{dP^\mu}{ds} = q\ F^{\mu\nu}\ u_\nu + 2\frac{dm}{ds}\ u^\mu \tag{3}$$

или

$$m\frac{du^\mu}{ds} = q\ F^{\mu\nu}\ u_\nu + \frac{dm}{ds}\ u^\mu.$$

Так как $u^\mu u_\mu = 1$ и $u_\mu \frac{du^\mu}{ds} = 0$, то домножая на u_μ и учитывая антисимметрию $F_{\mu\nu}$, получим

$$\frac{dm}{ds} = -qF^{\mu\nu}u_\nu u_\mu = qF^{\nu\mu}u_\mu u_\nu = qF^{\mu\nu}u_\nu u_\mu = 0. \tag{4}$$

Это условие постоянства массы заряда является следствием условия заданности (определённости) поля, которое не варьируется при варьировании действия. Поэтому масса постоянна в той мере, в какой мере неварьируемо поле. Если допустить космологически малые вариации поля, то станет возможным космологически медленное изменение массы. Для протистона, рассматриваемого как квазиточечный заряд, как мы увидим ниже, как раз характерно космологически медленное изменение массы (наряду с зарядом).

Из (3) и (4) получаем

$$F_l^\mu = \frac{dP^\mu}{ds} = q\ F^{\mu\nu}\ u_\nu, \tag{6}$$

где величина F_l^μ имеет смысл 4-силы, которую мы назовём **4-силой Лоренца**.

Из (4) следует, что **понятие силы Лоренца применимо (условно) лишь для квазиточечного заряда** (масса которого, по определению, почти постоянна). Для точечного же заряда оно вообще неприменимо, так как для него изменение массы является существенным. Такое **условие почти постоянства массы** является определяющим для квазиточечного заряда, к которому применимо понятие силы Лоренца.

В выражении для силы Лоренца полезно обратить внимание, что в инерциальной системе отсчёта, где $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$, компоненты 4-силы Лоренца можно записать в виде

$$F_l^\mu\ |_{\mathbf{u}=0} = \frac{dP^\mu}{ds}\Big|_{\mathbf{u}=0} = \left(\frac{dm}{dt},\ \frac{d\mathbf{P}}{dt}\right) = (0,\ q\mathbf{E})\,, \tag{7}$$

где электромагнитное поле входит только в пространственную компоненту. То есть **4-вектор силы Лоренца пространственноподобен**. Таким образом, в указанной системе отсчёта, 4-сила Лоренца определяет лишь пространственную компоненту скорости изменения 4-импульса

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}\Big|_{\mathbf{u}=0} = q\mathbf{E}, \tag{8}$$

а временна́я компонента равна нулю.

$$\frac{dP^0}{dt}\Big|_{\mathbf{u}=0} = 0. \tag{9}$$

При $m = \mathrm{const}$ выражение (6) совпадает с [Ландау 2, (23,4)], что в трёхмерном виде выражает **силу Лоренца** [Ландау 2, (17,5)]:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vH}]. \tag{10}$$

§2. Протистон, как квазиточечный заряд.

1. Масса протистона, как квазиточечного заряда. Понятие силы Лоренца, как было показано выше, приобретает смысл только для заряда с практически постоянной вдоль мировой линии массой. Поэтому сила Лоренца применима только для представления протистона как квазиточечного заряда (см. гл. 11).

Если при данной напряжённости поля и данной массе m, ускорение w^μ, даваемое формулой силы Лоренца, не превышает пределов, допускаемых степенью свободы в ориентации соседних шагов, то мировую линию можно считать абсолютно гибкой и законно применять принцип экстремального действия.

2. Препятствия к применению понятия силы Лоренца.
Варьируя действие системы протистон – электромагнитное поле в предыдущем пункте, мы считали электромагнитное поле заданным. Однако, собственное поле протистона при вариации его мировой линии не может оставаться неизменным, кроме того оно сингулярно на самом протистоне, поэтому полученный результат нельзя считать безусловно верным, то есть необходимо рассмотреть условия применимости понятия силы Лоренца.

Первое условие мы уже нашли. Это **условие постоянства массы квазиточечного заряда**. Речь идёт о квазиточечных зарядах, так как в нашей теории точечных зарядов с постоянной массой вообще не существует.

Чтобы избежать влияния собственного электромагнитного поля, представим поле в виде двух частей:

$$F_{\mu\nu} = \bar{F}_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu},$$

где $\bar{F}_{\mu\nu}$ – поле, создаваемое самим точечным зарядом – **собственное поле точечного заряда**.

$\tilde{F}_{\mu\nu}$ – **внешнее по отношению к точечному заряду поле**.

Собственное поле абсолютно точечного заряда стремится к ∞ при приближении к его мировой линии, то есть оно не определено на самой мировой линии. Отсюда опять следует, что **понятие силы Лоренца не применимо к точно локализованному протистону.** Взаимодействие точно локализованного протистона с электромагнитным полем исчерпывается реакцией радиации.

В более общем случае квазиточечного заряда, если его потенциал может быть представлен гладкой функцией с гладким максимумом в центре его массы, его собственное электромагнитное поле $\bar{F}_{\mu\nu}$ в этой точке обращается в нуль. Тогда в уравнении движения поле $F_{\mu\nu}$ можно заменить на $\tilde{F}_{\mu\nu}$.

При заданной постоянной массе m и заданном поле, определение силы Лоренца является уравнением движения квазиточечного заряда, которое можно записать в виде

$$\frac{dP^\mu}{ds} = q\ \tilde{F}^{\mu\nu}\ u_\nu,$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu}$ – тензор **внешнего** электромагнитного поля.

Непосредственно протистон не может быть объектом действия силы Лоренца, так как само определение силы Лоренца из принципа Гамильтона требует постоянства массы протистона, которая не постоянна по своему определению. Зато понятие силы Лоренца применимо для малых элементов 4-тока протистона, представленного статистически 4-током ϱ^μ плотности вероятности при осреднении массы.

3. Наблюдаемость, стрела времени и причинность.
Поскольку для протистона условия несамодействия не выполняются (хотя бы из-за непостоянства массы), то и **понятие силы Лоренца к протистону (в его точном смысле) не применимо**. Единственная сила, действующая на протистон со стороны электромагнитного поля и полностью объясняющая механизм обмена 4-импульсом с ним – это реакция радиации. То есть **единственная причина движения протистона – это самодействие**. Так как сила Лоренца тоже выражает взаимодействие заряда с полем, то она может происходить только от реакции излучения. Обмен же энергией с внешним полем при этом происходит только за счёт радиации.

Сила Лоренца становится применимой к протистону, рассматриваемому лишь статистически в виде частицы, включающей в себя массовый обмен с полем и имеющей поэтому космологически постоянную массу. Таким образом, в точном микроскопическом смысле все взаимодействия должны рассматриваться как радиационный обмен, что вполне в духе квантовой механики, основания которой мы рассчитываем в дальнейшем построить.

Макроскопическая практика физического эксперимента говорит о том, что обычно можно создать с разумной точностью любое электромагнитное поле и посмотреть как в нём движется частица. Однако, как мы видели, в микроскопическом масштабе движение точечного заряда определяется, главным образом, не внешним полем, а внутренними причинами и лишь в макроскопических масштабах основной причиной движения становится внешнее поле, так как мелкомасштабные движения сглаживаются. Можно сказать, что процесс радиации, детерминированный на протяжении шага, имеет на стыке шагов один свободный дискретный параметр, которым статистически управляет внешнее поле. При этом внешнее поле в виде равновесного шума не создаст какого-либо макроскопического ускорения. Для такого ускорения поле должно в течении достаточного времении быть неравновесным, действовать преимущественно в одном направлении. По этой причине для слишком высокочастотного поля понятие силы Лоренца не применимо.

Итак, 4-сила Лоренца управляет лишь макроскопическим движением протистона. Вызываемое силой Лоренца макроскопическое ускорение создаёт радиацию, которую мы будем называть **макроскопической радиацией**. Эта радиация, конечно же происходит от осреднения **микроскопической радиации** детерминированных шагов.

Таким образом, **электродинамика является статистической теорией**. Точную мировую линию протистона может дать лишь единое поле, которое определяется, однако, бесконечно большим числом параметров (координаты точек

мирового спектра). Хотя движение протистона и является детерменированным, практически доступно лишь статистическое его описание, так как **определяющие его параметры практически скрыты для наблюдения** (в силу бесконечного их числа). Здесь, однако, существуют некоторые возможности компьютерных вычислений единого поля по мировому спектру.

Проявления силы Лоренца связаны со статистической неравновесностью, которая является основой **наблюдаемости** явлений. Глобальная неравновесность Вселенной выражается в относительно малом преобладании излучения над поглощением, что задаёт направление всех процессов (**стрелу времени**) в сторону диссипации (рассеяния) энергии покоя (массы), в чём проявляется работа любой силы, в том числе силы Лоренца. Без такой направленности процессов сила Лоренца была бы **пассивной** (не могла бы совершать работы). Для макроскопического изменения состояния одной системы под действием другой (в чём заключается суть **наблюдаемости** процессов) необходима работа. В силу существования стрелы времени, сила Лоренца может совершать работу, обеспечивая **наблюдаемость** процессов.

Вместе с наблюдаемостью возникает и возможность расположения процессов в упорядоченной **причинно-следственной связи**, ярким примером чего служит сила Лоренца как причина нетривиальных движений квазиточечных зарядов, допускающая представление электромагнитного поля только запаздывающими (без опережающих) потенциалами.

4. Замечание об усреднении. Корректное определение усреднённой величины, относящейся к случайной мировой линии, требует знания плотности 4-тока вероятности её местонахождения ϱ^μ. Ниже мы найдём необходимые для ϱ^μ уравнения, которые в условиях статистического равновесия, требующих сохранения среднего 4-импульса и момента импульса, имеют вполне определённый набор решений.

5. О роли 4-потенциала. Итак для макроскопических полей и усреднённого движения протистона взаимодействие протистонов вполне описывается силой Лоренца, в которую входит лишь электромагнитное поле $F^{\mu\nu}$ и непосредственно не входит потенциал A^μ, калибровка которого для одного и того же $F^{\mu\nu}$ неоднозначна.

Однако, мы уже видели, что 4-потенциал играет и самостоятельную роль, так как от его величины зависит 4-импульс протистонов. Так как плотность энергии макроскопических полей обычно ничтожна по сравнению с плотностью энергии протистона, то влияние этих полей на энергию протистона пренебрежимо.

Но в микромасштабах плотность энергии флуктуаций полей растёт и становятся значимыми вклады энергии $A^\mu j_\mu$ от взаимодействия поля с током. И здесь не удаётся ограничиться одним лишь понятием силы Лоренца. **Вид калибровки потенциала в микромасштабах не безразличен**.

6. Направление реакции излучения ультрарелятивистского квазиточечного заряда. Для точечного заряда масса существенно не постоянна и его взаимодействие со средой исчерпывается актами излучения и

поглощения, принципиально не отличающимися друг от друга, кроме направления во времени.

Другое дело, если, отвлекаясь от микроскопических подробностей, рассматривать точечный заряд как квазиточечный, для которого игнорируются микроскопические внутренние движения и соответствующая им радиация. Оставшаяся же (**макроскопическая**) радиация, в силу космологического убывания массы протистона, является только излучением (без поглощения) и рассматривается как результат ускорения протистона под действием силы Лоренца и реакции космологической потери массы. Это возможно, так как на микроскопическом уровне и излучение и поглощение происходят однополярными (δ-подобными) импульсами (см. ниже), формирующими общее поле радиации, направление потока энергии которого соответствует макро-излучению, так как интенсивность микро-излучения в среднем преобладает над интенсивностью микро-поглощения. Такое излучение, не уравновешенное поглощением, будем называть **наблюдаемым**, так как только эта часть общей радиации может создавать статистически неравновесные (**наблюдаемые**) явления.

Цель этого пункта – показать, что реакция излучения квазиточечного протистона тормозит его, что не тривиально, так как не вполне ясно – относительно чего происходит торможение.

Используя подход [Ландау 2, с 270], выразим ускорение w^ν в формуле для силы реакции излучения квазиточечного заряда

$$F_Q^\mu = \frac{2}{3}q^2\left(\frac{dw^\mu}{ds} - u^\mu u^\nu \frac{dw_\nu}{ds}\right) \tag{1}$$

через силу Лоренца

$$F^\nu = qF^{\nu\alpha}u_\alpha. \tag{2}$$

Получим

$$w^\nu = \frac{F^\nu}{m} = \frac{q}{m}F^{\nu\alpha}u_\alpha, \tag{3}$$

$$\frac{dw^\nu}{ds} = \frac{q}{m}\frac{\partial F^{\nu\alpha}}{\partial x^\beta}u_\alpha u^\beta + \frac{q^2}{m^2}F^{\nu\alpha}F_{\alpha\beta}U^\beta. \tag{4}$$

Ограничимся актуальным в нашей теории случаем ультрарелятивистских скоростей, поэтому, подставляя w^μ в формулу (1), сохраним член, содержащий толко тройные произведения компонент скорости. Тогда, имея в виду, что произведение антисимметричного по индексам $\nu\alpha$ тензора $\partial F^{\nu\alpha}/\partial x^\beta$ на симметричный тензор $u^\nu u^\alpha$ даёт нуль, получим

$$F^\mu_{Q_{\big|_{v\to 1}}} = -\frac{2q^4}{3m^2}(F_{\nu\alpha}u^\nu)(F^{\alpha\beta}u_\beta)u^\mu =$$

$$= \frac{2q^4}{3m^2}(F_{\alpha\nu}u^\nu)(F^{\alpha\beta}u_\beta)u^\mu = \frac{2q^2}{3m^2}F_\alpha F^\alpha u^\mu = -\frac{2q^2}{3m^2}|F^\alpha|^2 u^\mu. \tag{5}$$

(То есть сила F_Q^μ направлена против скорости.) Откуда

$$\mathbf{F}_{Q}\Big|_{v\to 1} = \frac{2q^4}{3m^2}(F_{\alpha\nu}u^\nu)(F^{\alpha\beta}u_\beta)\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{v^2}}}. \tag{6}$$

В ультрарелятивистском случае $\mathbf{v}$ имеет смысл единичного вектора $\mathbf{n}$ в направлении скорости $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}\to\mathbf{n}. \tag{7}$$

Понимая под 3-силой $\mathbf{f}$ силу

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sqrt{1-v^2}\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \sqrt{1-v^2}\,\mathbf{F}, \tag{8}$$

можно записать

$$\mathbf{f}\Big|_{v\to 1} = \frac{2q^4}{3m^2}(F_{\alpha\nu}u^\nu)(F^{\alpha\beta}u_\beta)\mathbf{n}. \tag{9}$$

Хотя понятие силы (как вектора) не инвариантно, модуль 3-силы $\mathbf{f}$ 4-инвариантен. И, конечно, инвариантна 4-работа $F_Q^\mu u_\mu$. Для придания абсолютности понятию силы торможения F_Q^μ, её удобно рассматривать в системе координат, где импульс поля, через которое пролетает протистон, равен нулю, то есть **поле покоится**.

Выбирая направление скорости в качестве оси $\vec{x}$ и раскрывая четырёхмерные векторы, получим

$$f_{x}\Big|_{v\to 1} = -\frac{2q^4}{3m^2}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{1-v^2}, \tag{10}$$

то есть 3-сила реакции направлена против скорости (**торможение**).

§3. Точные силы, действующие на протистон.

1. Мгновенная сила, действующая на протистон в электромагнитном поле. Эта сила, при **осреднении самодвижения**, то есть при замене мировой линии центра инерции протистона мировой линией центра инерции простона, сводится к силе Лоренца. При учёте же всех подробностей движения эту силу по определению можно найти как полную производную 4-импульса i-того протистона:

$$F^\mu = (F^0, \mathbf{F}) = \frac{dP_i^\mu}{ds} = -q\frac{dA^\mu(x_i^\nu)}{ds}, \tag{1}$$

что отличается от силы Лоренца. В компонентах имеем

$$\mathbf{F} = -q\frac{d\mathbf{A}}{ds} = -qu^0\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -qu^0\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{A}\right), \tag{2}$$

$$F^0 = -q\frac{d\varphi}{ds} = -qu^0\frac{d\varphi}{dt} = -qu^0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi\right). \tag{3}$$

Тогда F^μ можно переписать также в виде

$$F^\mu = -qu^0 \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}) A^\mu \right), \tag{4}$$

откуда видно, что оператор $u^0(\partial/\partial t + \mathbf{v}\,\mathrm{grad})$ скалярный (лоренц-инвариантный). Его можно записать в 4-х-мерном виде

$$u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

То есть можно писать

$$F^\mu = -qu^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = -q \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\, u^\nu. \tag{5}$$

Эту силу удобно сравнивать с силой Лоренца, записанной в виде

$$F_l^\mu = qF^{\mu\nu}\, u_\nu = q \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu}\, u_\nu - q \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\, u^\nu. \tag{6}$$

Здесь явно видно различие этих сил. Кроме того для силы Лоренца величина A^μ не является 4-потенциалом центра протистона, а является 4-потенциалом на центре инерции квазиточечного заряда.

2. Всегда ли торможение означает замедление. **Силой торможения** называют силу, направленную против скорости. В отсутствии других сил такая сила обычно вызывает замедление, однако следует иметь в виду, что это не всегда так. Действительно, по определению силы

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt}, \tag{1}$$

Отсюда видно, что при постоянной массе, знак силы всегда совпадает со знаком ускорения, то есть скорость растёт в направлении силы и уменьшается в противоположном направлении. Но действие силы может быть связано с изменением массы (как, например, в реактивном движении ракеты). При этом, если второй член в правой части равенства (1) по модулю много больше первого, то направление силы уже не определяется направлением ускорения, а направлением скорости, причём эти оба направления совпадают при возрастании массы и противоположны при убывании. Такая независимость направления ускорения от силы создаёт возможность возрастания скорости при действии силы в направлении против скорости. Например, этот случай реализуется при космологическом ускорении протистона, который излучает в направлении ультрарелятивистской скорости и в этом же направлении ускоряется. Таким образом излучение, как реактивная струя своеобразно. Она может действовать как у обычной ракеты, а может и наоборот (последнее характерно для ультрарелятивистских скоростей). Переходный режим (инверсия направления реакции) возникает при примерном равенстве:

$$|m\frac{d\mathbf{v}}{dt}| \approx |\mathbf{v}\frac{dm}{dt}|. \tag{2}$$

Возможно даже ускорение без действия силы

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v}\frac{dm}{dt}. \tag{3}$$

Ниже мы найдём, что для ультрарелятивистского простона $m \sim 1/T^{11/2}$,$u^0 \sim T^{1/2}$, то есть это пример того, как импульс $|m\mathbf{u}| \approx mu^0 \sim 1/T^5$ убывает (торможение), а скорость при этом растёт.

§4. Простон и сила Лоренца.

1. Простон. [19.09.09] Бо́льшую часть шага мировой линии масса протистона имеет почти постоянное значение m_m. И лишь в относительно небольшой окрестности точки s_t шага, которую мы называем **сгоном**, масса монотонно снижается, при приближении к сгону, достигая на нём нулевого значения. В интервале почти постоянной массы мировая линия протистона почти прямая (что соответствует инерциальному движению протистона), а в окрестности сгона мировая линия испытывает сильное ускорение, обмениваясь массой (энергией покоя) с электромагнитным полем. В результате мировая линия состоит из Г-образных **шагов**, соответствующих периоду пульсации массы. Эти шаги гладко соединяются друг с другом на **стыках** шагов, где масса практически постоянна, а мировая линия прямая. В пределах одного шага мировая линия лежит в одной плоскости. Относительная ориентация соседних шагов детерминирована только единым полем, а в рамках электродинамики не детерминирована.

Отвлекаясь от обмена массой между протистоном и полем в окрестностях сгонов, то есть приписывая протистону (который в этом случае будем называть **простоном**) временно передаваемую им полю массу, надо считать его массу постоянной (равной m_m). Тогда звеном мировой линиии простона следует считать центр инерции протистона вместе с обмениваемой массой. При этом, в силу сохранения импульса, звенья мировой линии протистона спрямляются до прямых отрезков, так что мировая линия превращается в ломаную линию. Вершины этой линии представляют взаимодействие с полем как **столкновение**.

Номенклатуру элементов мировой линии протистонов перенесём и на простоны, заменяя представление гладкого Г-образного шага протистона на **ломаный Г-образный шаг**, вершина которого соответствует (но не совпадает) сгону автоиды, а прямые отрезки (звенья), соединяющие соседние вершины, являются асимптотами автоиды. Простон, являющийся звеном антипротистона, назовём **антипростоном**.

Смысл **звена простона** в том, что это отрезок AB (Рис.205.1) мировой линии центра инерции замкнутой системы, состоящей из протистона и соответствующей ему части электромагнитного поля.

Постоянство массы допускает использование для простонов только пространственно-подобной силы (в том числе силы Лоренца), рассматриваемой

статистически. При этом макроскопическое ускорение приводит только к излучению (без поглощения).

Так как такая мировая линия протистона ломаная, то на её сгонах производные имеют разрывы, а вне их имеют нулевые значения. Тогда корректное определение силы возможно только в том случае, если силу F^μ определить по эффекту, который она производит **не** на бесконечно малом интервале ds, как обычно, по формуле

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{ds}, \tag{1}$$

а на конечном **интервале осреднения** Δs, содержащем достаточно большое число звеньев, обеспечивающее допустимую неопределённость значения силы

$$F^\mu = \frac{\Delta P^\mu}{\Delta s}, \tag{2}$$

где ΔP^μ – изменение 4-импульса на интервале Δs. Масса простона, согласно (1.5.4.4),(3.3.6.6),(I.8.5.5.3) должна быть приравнена к значению

$$m_m = \frac{2}{3}q^2\beta = \frac{2kS_Jq^2u^0}{3\pi} = \frac{4S_Jq^2}{3}\sqrt{\frac{2T}{3\pi}}. \tag{3}$$

При этом протистон рассматриватся как квазиточечный заряд, для которого становится возможным применение понятие силы Лоренца. То есть для применимости понятия силы Лоренца необходимо **многозвенное условие**, придающее статистический смысл понятию силы Лоренца. Ясно, что говорить о **локализации квазиточечного заряда** можно лишь с точностью, не превышающей амплитуды шаговых колебаний мировой линии протистона.

Таким образом, простон является простейшей частицей, к которой применимо понятие силы Лоренца, которую, с учётом многозвенного условия, будем называть **квантовой силой Лоренца**.

2. Представление звеньев простонов инерционами. Каждое звено протистона, вместе с полем радиации этого звена, образует замкнутую (то есть **инерциальную**) механическую систему (инерцион) (3.2.5.*). В пределах звена центр инерции простона движется строго прямолинейно, а вся **мировая линия протистона в простонном представлении** является ломаной линией CBAC. Линия OO является общей касательной к концам стыкованных шагов. Существование такой касательной возможно благодаря непрерывности процесса перехода от одного из стыкуемых шагов к другому (3.1.5.9).

На рисунке центр инерции инерционов вне простонов изображён штриховой линией. Два изображения отличаются лишь взаимной ориентацией полушагов звена.

Будучи механически замкнутым, инерцион остаётся незамкнутым электрически, то есть заряд инерциона сохраняется лишь в пределах звена. Соединение звеньев в непрерывную линию обеспечивает сохранение заряда протистона на протяжении всей его мировой линии.

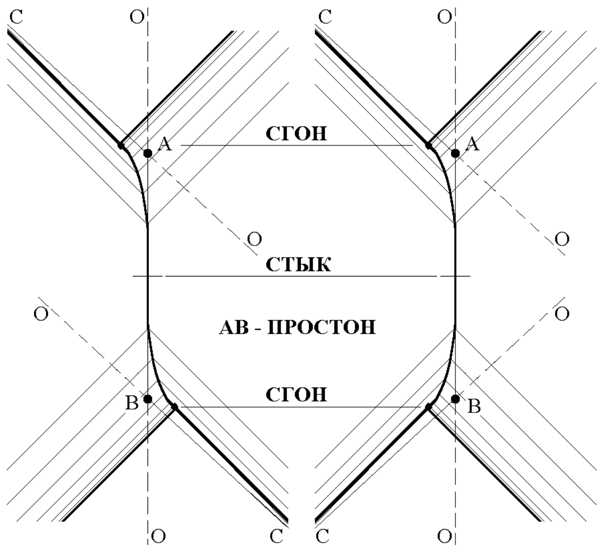


Рис. 205.1.

Любой инерцион (или конечное множество инерционов) демонстрирует существование полноценной инерциальной механической системы, приходящей из бесконечности в виде сходящейся на звене протистона волны и уходящей от него в бесконечность в виде расходящейся в бесконечность волны.

Взаимное расположение инерционов определяется сохранением заряда (необходимость их электрического соединения) и единым электромагнитным полем (посредством силы Лоренца). Всё это обусловлено единым полем.

3. Звено простона как свободная частица в квантовой механике. Согласно пункту 1 относительная ориентация соседних звеньев простона детерминирована только единым полем, а в рамках электродинамики определяется лишь статистически. Движение простона внутри звена прямолинейно, то есть с механической точки зрения **протистон на протяжении звена свободен**. Однако, **вне пределов одного звена непрерывный простон вовсе не свободен**. Звено простона представляет собой **короткоживущую свободную частицу**. Это классическое представление о звене простона мы сохраним и в квантовой теории, которую будем строить в следующей главе. Оно позволяет говорить как о **местоположении простона** так и о **мгновенном 4-импульсе простона**.

При этом понятие определённой мировой линии простона в квантовой теории не используется так как противоречит понятию метаболизма (обмена) простонами, важного для понятия элементарных частиц. В квантовой теории движение простонов определяется статистически с помощью волновых функций, подчинённых волновым уравнениям, вытекающим из уравнения единого поля. Здесь можно говорить лишь о разрывных мировых линиях, составленных звеньями простонов. При некоторых условиях такие линии определяют **свободные долгоживущие метаболирующие простоны**, если все их звенья параллельны. Подробно это будет рассмотрено ниже. Статистические уравнения квантовой механики локализуют

простоны с точностью порядка не выше длительности звеньев поэтому здесь нет смысла различать локализацию простонов от локализации соответствующих звеньев протистонов.

Описание взаимодействий свободных простонов в квантовой механике не могут не включать понятий **электромагнитного и гравитационного потенциалов**.

4. Протогаз. Протоплазма. Прогаз. Проплазма. Необходимость синхронизации стыков шагов с пиковыми гиперсферами делает периодическую зигзагообразную мировую линию протистона весьма консервативной, то есть среднее значение 4-импульса протистона может изменяться только космологически медленно, хотя направление ультрарелятивистской средней скорости каждого протистона не зависит от других, что означает почти независимость протистонов друг от друга. Каждый из них имеет свою собственную **поляризацию**, определяемую плоскостью зигзага и собственный знак электрического заряда. Поэтому протистоны образуют среду со свойствами ультрарелятивистского идеального газа, которую назовём **протогазом**, который при учёте малого влияния зарядов на движение протистонов можно рассматривать как плазму (**протоплазму**).

В ультрарелятивистском идеальном газе могут распространяться звуковые волны с определённой скоростью [Ландау 6, (134,14)], [Ландау 2, (35,8)]

$$v = 1/\sqrt{3}.$$

Откуда видно, что звук в протогазе имеет неинвариантную скорость. Это само по себе естественно, но делает теорию слишком конкретной и поэтому менее универсальной, чем это было бы при инвариантности уравнений всех дальнодействующих полей. В этом смысле лучше заменить понятия прогаза и проплазмы на связанные, но более абстрактные субстанции, состоящие не из бесконечно длинных во времени протистонов, а из ограниченных во времени простонов, поведение которых, как оказывается, удобно изучать статистически с помощью релятивистской квантовой механики.

Среду, статистическими элементами которой являются простоны будем называть **прогазом**, а с учётом взаимодействия зарядов – **проплазмой**. У неё, как выяснится, необычное инвариантное уравнение состояния $p = -e$, но обычное для её возмущений.

§5. Предварительное пояснение механизмов движения зарядов и поля.

1. Распространение излучения. [16.10.10]. Квизы, квапы будем называть **квантами радиации**. Квизы и квапы всех протистонов образуют общее электромагнитное поле, имеющее очень широкий спектр. Суммарные поля излучения (сумма квизов) и суммарные поля поглощения (сумма квапов) интерферируют друг с другом. Принцип наименьшего действия требует минимизации энергии и следовательно энергетически выгодна деструктивная

интерференция полей поглощения и полей излучения. Это означает их **корреляцию**. Она проявляется в том, что поле излучения макроскопического объекта, состоящее только из квизов нейтрализуется, насколько это возможно, полями поглощения всех остальных объектов и оно может быть наблюдаемо с помощью поглощаемых любым детектором квапов. Иными словами, спектральные характеристики излучаемых потоков квизов **наследуются** спектральными характеристиками сопутствующих поглощаемых потоков квапов. Каждый детектор излучает почти такой же по спектру поток квизов что и поглощает, Эффективным воздействием на детектор является лишь разность этих потоков.

В статистически однородной и изотропной среде потоки энергии-импульса электромагнитных полей простонов во всех направлениях практически уравновешены и поэтому наблюдаются только в статистически неравновесных ситуациях.

Кроме того в статистически однородной и изотропной среде, благодаря принципу наименьшего действия, то есть – законам сохранения, потоки поглощения статистически не отличаются от сопутствующих потоков излучения. Это происходит потому, что все простоны коллективно адаптированы друг к другу по принципу наименьшего действия, то есть посредством силы Лоренца, что минимизирует поля, по крайней мере ту часть их спектра, для которой применима сила Лоренца. Эту часть спектра будем называть **макрополем**, а остальную – **микрополем**. Но нарушения однородности среды вызывают соответствующие нарушения баланса электромагнитных потоков, то есть – нарушения распределения волнового 4-вектора и его комплексной амплитуды. Таким образом поток излучения, достигающий детектор в виде потока поглощения, несёт информацию не только об источнике, но и о среде его распространения.

Отсюда ясно, что отдельные локальные неоднородности среды, находящиеся на большом расстоянии от источника излучения, влияют на распространение излучения незначительно, создавая не далеко идущие **тени**. Крупномасштабные неоднородности могут как **рассеивать** излучение, **ослабляя** его, так и изменять направление волнового вектора **рефракция**, вплоть до противоположного **рефлексия**. Все эти влияния среды на распространение электромагнитных волн называются **оптическими** свойствами среды (её **оптикой**).

2. Гравитация. Оптический подход к гравитационным явлениям позволяет провести **геометризацию гравитации**, то есть свести гравитационные силы к искривлению метрики пространства. Это успешно сделано в общей теории относительности. Говорить об ошибочности этой теории не верно, но **ОТО является излишне общей**, так как для полной геометризации гравитации достаточно оставаться в рамках прямолинейной метрики 4-пространства, вводя криволинейную метрику как вторую вспомогательную метрику, аналогично коэффициенту преломления в оптике. Подобная геометризация гравитации проведена, например, в РТГ Логунова.

⋆⋆⋆

Если есть желание – найдётся тысяча возможностей,
если нет желания – найдётся тысяча препятствий.

Народная мудрость.

Глава 6. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЕДИНОГО ПОЛЯ

(Релятивистский квантовый анализ единого поля.)

Предлагаемая здесь релятивистская квантовая механика опирается на понятия существующей квантовой теории и не отменяет, а лишь расширяет их для релятивистских применений. Поэтому далее мы будем применять традиционные квантовые понятия, используя как правило [Ландау]. **Релятивизм теории** отражается в понятии локально-волнового уравнения.

Волновые свойства единого поля порождают волновую статистику его особенностей (протистонов). Существование **недоопределённости мировой линии протистона, в в рамках электродинамики, применяющей понятие силы Лоренца**, придаёт смысл статистическому понятию 4-плотности потока концентрации протистонов каждого знака $w^\mu_\pm = w_{0\pm}\, u^\mu_\pm$, где $w_{0\pm}$ – концентрация покоя этих протистонов, $u^\mu_\pm$ – 4-скорость этого потока. При этом единое поле имеет связь с $w_{0\pm}$ вида $u_\pm u^*_\pm = w_{0\pm}$, что позволяет применять к статистике протистонов эффективные методы функционального анализа.

§1. Локально-волновое уравнение.

1. Уравнение КГФ квантовых компонент единого поля.

Найдём **необходимое и достаточное условие неразрывности 4-тока скалярного поля.** Если заряд 4-тока с плотностью

$$j^\mu_u = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u) \tag{1}$$

(где u – любое скалярное поле) сохраняется, то есть

$$\nabla_\mu j^\mu_u = 0, \tag{2}$$

(что также означает неразрывность 4-тока) то поле u должно удовлетворять уравнению:

$$\Box u = -f^2 u, \tag{3}$$

где f^2 – вещественное скалярное поле (**не обязательно положительное**). Действительно, из (2) и (1) следует

$$\nabla_\mu u \, \nabla^\mu u^* + u\Box u^* - \nabla_\mu u^* \, \nabla^\mu u - u^*\Box u = u\Box u^* - u^*\Box u = 0 \tag{4}$$

откуда, обозначив $\Box u/u = -f^2$, получим

$$\frac{\Box u}{u} = \frac{\Box u^*}{u^*} = -f^2, \tag{5}$$

где

$$f^2 = f^{2*}, \tag{6}$$

что и требовалось доказать. Справедливо и обратное, так как, умножая (3) на u^* и вычитая комплексно сопряжённое выражение, получим выражение (4), которое с учётом определения 4-тока (1) и тождества

$$\nabla_\mu u \nabla^\mu u^* - \nabla_\mu u^* \nabla^\mu u \equiv 0,$$

само представляет (2) после умножения на $i/2$.

Так как единое поле U подчиняется уравнению вида (3) при

$$f^2 = k^2 = N, \quad u = U, \tag{7}$$

где N – индекс космоса (натуральное число), то **4-ток j_u^μ единого поля неразрывен (его заряд сохраняется)**.

Квантовым множеством назовём некоторое подмножество точечных зарядов единого поля (протистонов), не обязательно неразрывно связанных друг с другом, но 4-ток которых **статистически неразрывен**. В силу космологического сохранения точечных зарядов (I.10.2.7.1), квантовому множеству соответствует некоторое скалярное поле u (**квантовая компонента единого поля**), являющееся суперпозицией сопутных волн протистонов этого множества, удовлетворяющее уравнению КГФ

$$\Box u = -k^2 u, \tag{8}$$

где k – вещественная константа (корень космоса) (I.3.1.2.3).

Уравнения квантовых компонент линейны, но их 4-токи (1) не аддитивны (взаимодействуют).

2. Локально-волновой 4-вектор.

Рассмотрим **дифференциальное уравнение первого порядка** относительно искомой скалярной комплексной функции u (квантовой компоненты единого поля)

$$\nabla^\mu u = ik^\mu u, \tag{1}$$

где $k^\mu(x^\nu)$ – 4-векторная комплексная функция. При заданном поле u 4-вектор k^μ однозначно определяется из (1). Интересны условия на этот 4-вектор, при

которых уравнение (1) эквивалентно уравнению КГФ (1.8). Назовём их – **локально-волновые условия** и попробуем их найти. Применение оператора ∇_μ к (1) даёт

$$\Box u = ik^\mu \nabla_\mu u + iu\nabla_\mu k^\mu = -k^\mu k_\mu u + iu\nabla_\mu k^\mu, \tag{2}$$

что приобретает вид уравнения (1.8) с константой $k = \pm\sqrt{k^\mu k_\mu}$, если наложить на комплексную 4-векторную функцию k^μ **четыре локально волновых условия**:

$$\nabla_\mu k^\mu = 0, \quad (\textbf{механическое условие}), \tag{3}$$

(то есть $\nabla_\mu \mathrm{Re}\, k^\mu = 0, \quad \nabla_\mu \mathrm{Im}\, k^\mu = 0$) (2 условия)
и

$$k^\mu k_\mu = k^2, \quad \mathrm{Im}(k^\mu k_\mu) = 0, \quad (2\text{условия}), \tag{4}$$

где к 4-вектору k^μ применимы понятия времени-подобности или пространственно-подобности только относительно его вещественной и комплексной компоненты.

Условия (4) на комплексный 4-вектор

$$k^\mu = (k^0, \mathbf{k}) = k^\mu_R + ik^\mu_I = (k^0_R + ik^0_I, \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I), \quad A \tag{5}$$

в произвольной системе отсчёта A, можно записать в координатном виде (аналогично как сделано в (I.6.2.1.6)):

$$k^\mu k_\mu = k^2 = k^{02} - \mathbf{k}^2 = (k^0_R + ik^0_I)^2 - (\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I)^2 =$$

$$= k^{02}_R - \mathbf{k}^2_R - k^{02}_I + \mathbf{k}^2_I + 2i(k^0_R \cdot k^0_I - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{k}_I), \quad A$$

но в таком виде локально волновые условия произвольно зависят от выбора системы координат. Чтобы сделать их условно-инвариантными (I.8.2.1.*) и придать им позже механический смысл, **локально волновые условия определим в системе координат, сопутствующей 4-вектору** k^μ_R, при этом

$$\mathbf{k}_R = 0, \quad k^0_R = k_R, \tag{6}$$

то есть имеем ещё 3 независимых **локально волновых условия**. Тогда в **сопутствующих координатах** получаем

$$k^\mu k_\mu = k^2 = k^{02} - \mathbf{k}^2 = (k^0_R + ik^0_I)^2 + \mathbf{k}^2_I =$$

$$= k^{02}_R - k^{02}_I + \mathbf{k}^2_I + 2ik^0_R \cdot k^0_I,$$

что можно записать парой вещественных условий (эквивалентных (4)):

$$\begin{cases} k^\mu k_\mu = k^2 = k^{02}_R - k^{02}_I + \mathbf{k}^2_I > 0 \\ k^0_R \cdot k^0_I = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

где индексы R, I помечают соответственно вещественные и мнимые компоненты локального волнового вектора в сопутствующих координатах. Найдём при этих условиях $k^\mu k^*_\mu$

$$k^\mu k^*_\mu = k^0 k^{0*} - \mathbf{k}\mathbf{k}^* = (k^0_R + ik^0_I)(k^0_R - ik^0_I) - (\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I)(\mathbf{k}_R - i\mathbf{k}_I) =$$

$$= k_R^{02} + k_I^{02} - \mathbf{k}_I^2 = k_R^{02} + k_I^\mu k_{I\mu} = k^2,$$

где последнее равенство примем в качестве недостающего 8-го условия. Тогда имеем **восьмое локально волновое условие**, доопределяющее 4-вектор k^μ:

$$k^\mu k_\mu^* = k^2, \tag{8}$$

которое используется при выводе важного уравнения (4.9).

Таким образом из 8-ми свободных параметров (компонент) локального волнового 4-вектора не осталось ни одного свободного параметра, то есть они все связаны между собой локально-волновыми условиями. Но среди этих условий есть пара условий (3), заданных дифференциальным уравнением $\nabla_\mu \mu^\mu = 0$, которое решается неоднозначно. Поэтому **любую пару параметров можно задавать произвольно**, получая остальные через решение этого дифференциального уравнения.

Тогда **8 локально-волновых условий** оставляют много возможностей для **комплексного волнового 4-вектора** k^μ.

Существенно, что знак k может быть любой

$$k = \pm |k|. \tag{9}$$

4-вектор k^μ при выполнении локально-волновых условий будем называть **локальным волновым 4-вектором**, который в системе, сопутствующей 4-вектору k_R^μ, имеет вид

$$k^\mu = (k_R^0 + ik_I^0,\ \mathbf{k}_I). \tag{10}$$

3. Локально-волновые уравнения.

Уравнения (2.1) и ему комплексно сопряжённое:

$$\nabla^\mu u = ik^\mu u, \quad L, \tag{1}$$

$$\nabla^\mu u^* = -ik_\mu^* u^*, \quad L, \tag{2}$$

при локально-волновых условиях L, будем называть **локально-волновыми уравнениями**. Для них условия L обычно будут подразумеваться.

Уравнение КГФ (1.8) **при локально волновых условиях** эквивалентно каждому из уравнений (1),(2).

Умножая **4-векторное уравнение** (1) на k_μ, получаем выражение

$$k_\mu \nabla^\mu u = ik_\mu k^\mu u = ik^2 u, \quad L, \tag{3}$$

которое, при заданном k^μ и локально волновых условиях, является **скалярным дифференциальным уравнением первого порядка**. Это уравнение эквивалентно другим локально-волновым уравнениям, которые позволяют из всевозможных решений уравнения КГФ находить решения, с заданным полем 4-вектора k^ν.

Уравнение КГФ (1.8) лоренц-инвариантно (4-скалярно). При этом умножение скаляра k на постоянное число M не изменяет самого уравнения, если произвести замену переменных $x^\nu \to x^\mu/M$. То есть M является **масштабным коэффициентом**, а тогда скаляр k имеет смысл **локального масштабного коэффициента**. Он постоянен при постоянной метрике пространства-времени, то есть в прямом псевдоэвклидовом пространстве. А его непостоянство говорит либо о локальных масштабных изменениях единиц измерения, либо об искривлении пространства. Локальные изменения единиц измерения могут быть следствием привязки этих единиц к концентрации прогаза, что мы сделали в (I.8.5.5.1).

Как известно, решением уравнения КГФ (1.8), при постоянном вещественном k, является плоская волна с **собственной частотой** k. Поэтому и при не постоянном, достаточно медленно изменяющемся в окрестностях данной точки значении k, это значение имеет смысл **локальной частоты** поля $k(x^\nu)$ в **плоско-волновом приближении**. То есть в данной точке это поле мало отличается от плоской волны с собственной частотой k. Гладкие изменения **локально-плоской** волны при переходе к другим точкам можно рассматривать как искажения одной и той же плоской волны, рассматриваемой в прямом 4-пространстве, при переходе в искривлённое 4-пространство.

Гравитационное поле определяется локальными вариациями темпа и концентрации прогаза (I.8.5.5.*), поэтому оно может описываться в исходном псевдоэвклидовом пространстве. Но метрику пространства можно связать с темпом и концентрацией прогаза так, что в этой метрике концентрация прогаза будет постоянной, а гравитационное поле геометризуется (определяется кривизной пространства).

То есть гравитационное поле в ДФ может описываться как в прямом пространстве полем темпа и концентрации прогаза, так и в римановом пространстве общей теории относительности (ОТО). Относительно ДФ работоспособна и ОТО, но является избыточно общей теорией, где допускается отклонение от интегральных законов сохранения. В этом смысле более адекватна РТГ Логунова.

Смысл применения локально волнового уравнения в том, что оно имеет первый порядок и поэтому его решение вполне определяется своим состоянием в начальный момент времени без задания его производных, что допускает простую механическую интерпретацию единого поля и его квантовых компонент.

4. Плотность заряда как функция квадрата модуля космического поля. Пользуясь выражениями (2.1) и сопряжённым ему, 4-ток любых квантовых компонент космического поля можно записать в виде

$$j_u^\mu = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u) = \frac{i}{2}(-ik^{\mu *}uu^* - ik^\mu uu^*) =$$
$$= uu^* \operatorname{Re} k^\mu = uu^* k_R^\mu, \tag{1}$$

а с другой стороны (1.8)

$$j_u^\mu = \varrho_0\, u^\mu, \tag{2}$$

откуда следует, что 4-вектор k_R^μ имеет то же направление, что и 4-скорость u^μ плотности 4-тока. Тогда, умножая (1) и (2) на u_μ, получим **плотность покоя заряда** в виде инварианта

$$\varrho_0 = k_R^\mu u_\mu \cdot uu^* = k_R\, uu^*, \tag{3}$$

где **модуль 4-вектора k_R^μ определён со знаком заряда**

$$k_R = \varepsilon_q \sqrt{k_R^\mu k_{R\mu}} = k_R^\mu u_\mu. \tag{4}$$

Вещественную инвариантную величину k_R можно выразить через uu^*. Действительно, так как комплексный 4-вектор можно представить в виде

$$k^\mu = k_R^\mu + ik_I^\mu,$$

то с учётом (2.8)

$$k^\mu k_\mu^* = (k_R^\mu + ik_I^\mu)(k_R^\mu - ik_I^\mu) = k_R^\mu k_{R\mu} + k_I^\mu k_{I\mu} = k^2, \tag{5}$$

откуда, используя (2.1), имеем

$$k_R^\mu k_{R\mu} = k^2 - k_I^\mu k_{I\mu} = k^2 - \operatorname{Im} k^\mu \cdot \operatorname{Im} k_\mu =$$
$$= k^2 - \frac{1}{2}\left(-i\frac{\nabla^\mu u}{u} - i\frac{\nabla^\mu u^*}{u^*}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-i\frac{\nabla_\mu u^*}{u^*} - i\frac{\nabla_\mu u}{u}\right) =$$
$$= k^2 + \frac{(u^*\nabla^\mu u + u\nabla^\mu u^*)(u^*\nabla_\mu u + u\nabla_\mu u^*)}{4(uu^*)^2} = k^2 + \frac{\nabla^\mu uu^* \cdot \nabla_\mu uu^*}{4(uu^*)^2}. \tag{6}$$

Тогда

$$k_R = \varepsilon_q \sqrt{k^2 + \frac{\nabla^\mu uu^* \cdot \nabla_\mu uu^*}{4(uu^*)^2}}. \tag{7}$$

Так как

$$\Box \ln y = \nabla^\mu \nabla_\mu \ln y = \nabla^\mu (\frac{1}{y}\nabla_\mu y) = \frac{1}{y}\Box y - \frac{1}{y^2}\nabla^\mu y \cdot \nabla_\mu y,$$

то функцию k_R можно записать также в виде

$$k_R = \varepsilon_q \sqrt{k^2 + \frac{\Box (uu^*)}{4uu^*} - \frac{1}{4}\Box \ln uu^*}.$$

Из (5) и (2.1)

$$k^2 = k^\mu k_\mu^* = \frac{\nabla^\mu u \cdot \nabla_\mu u^*}{uu^*}, \tag{8}$$

тогда с учётом (1.8)

$$\Box (uu^*) = \nabla_\mu \nabla^\mu (uu^*) = \nabla_\mu (u\nabla^\mu u^* + u^*\nabla^\mu u) =$$

$$= u\Box u^* + u^*\Box u + 2\nabla_\mu u \cdot \nabla^\mu u^* = -2k^2 uu^* + 2\nabla_\mu u \cdot \nabla^\mu u^* = 0,$$

то есть для квантовых множеств имеем общее **волновое уравнение для квадрата модуля компонент космического поля** (скобки (uu^*) подразумеваются)

$$\Box uu^* = 0, \tag{9}$$

в том числе для всего единого поля

$$\Box UU^* = 0. \tag{10}$$

Теперь выражение для k_R можно переписать в виде

$$k_R = \varepsilon_q \sqrt{k_R^\mu k_{R\mu}} = \varepsilon_q \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}\Box \ln uu^*}. \tag{11}$$

§2. 4-мерное статистическое описание единого поля.

1. Дискретность 4-тока единого поля. При корпускулярной калибровке можно игнорировать сплошные токи протистонов в силу нейтрализации их энергии. Кроме того сплошные компоненты 4-тока имеют ничтожную плотность и разный знак около разных точечных зарядов, взаимно нейтрализуясь при суммировании. Поэтому **4-ток единого поля дискретен** (с космологической точностью образован лишь точечными зарядами).

Используя понятие **плотности покоя** (I.7.1.1.6) **вероятности статистического распределения точечных зарядов одного знака** w_0, 4-ток зарядов одного знака можно записать в виде

$$j_u^\mu = q\ w_0\ u^\mu, \tag{1}$$

где (I.7.1.2.6)

$$w_0 = w/u^0, \tag{2}$$

w – **плотность вероятности статистического распределения точечных зарядов одного знака**,
u^μ – статистическая 4-скорость потока протистонов одного знака.

2. Условие нормальной гравитации. Условие

$$k_R^\mu \to k^\mu, \quad G \tag{1}$$

назовём **условием нормальной гравитации**, где G обозначает его. Это условие означает достаточное преобладание вещественной компоненты комплексного волнового 4-вектора над его мнимой компонентой. Из этого условия необходимо следует

$$k_R \to k, \quad G. \tag{2}$$

Напомним, что оба модуля k_R, k определены со знаком электрического заряда. Из (1.4.11):

$$k_R = \varepsilon\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}\Box \ln uu^*} \tag{3}$$

следует, что для выполнения условия нормальной гравитации необходимо

$$uu^* \to \breve{u}\breve{u}^*, \tag{4}$$

где $\breve{u}\breve{u}^*$ – среднее по абсолютному пространству значение uu^*. В этом случае

$$\Box \ln uu^* = \Box(\ln uu^* - \ln \breve{u}\breve{u}^*) = \Box \ln\left(\frac{uu^*}{\breve{u}\breve{u}^*}\right) \to \Box \ln 1 = 0. \tag{5}$$

Условие нормальной гравитации означает относительную малость отклонения концентрации протистонов от своего среднего значения, что согласно (3) отражается в отклонении значения k_R от значения k.

Полный учёт **особых гравитационных полей** (интерпретируемых как состояния **гравитационного коллапса** или **чёрные дыры**) требует использования величины k_R в полном виде (3). А в **нормальных гравитационных полях** разность $k_R - k$ относительно очень мала, но существенна в областях особых гравитационных полей и при интегрировании гравитационных ускорений на астрономически больших интервалах.

Квантовые частицы, в условиях нормальной гравитации (4), **назовём нормальными квантовыми частицами**.

3. Единое поле в гравитационно нормальных областях.

Области пространства-времени, где для данной практической задачи достаточно хорошо выполняются условия нормальной гравитации

$$k_R^\mu \to k^\mu, \quad uu^* \to \breve{u}\breve{u}^*, \quad G, \tag{1}$$

где G – обозначает это условие, будем называть **гравитационно нормальными областями**. В таких областях можно пользоваться приближением (2.2)

$$k_R = k, \quad G. \tag{2}$$

Тогда uu^* просто выражается через плотность покоя электрического заряда (1.4.3),(2)

$$uu^* = \frac{\varrho_0}{k_R} = \frac{\varrho_0}{k}, \quad G. \tag{3}$$

Отношении ϱ_0/k положительно в силу одинакового смысла знаков при k и ϱ_0 (I.6.1.2.3),(I.8.3.2.2)

$$\frac{\omega}{|\omega|} = \varepsilon_k = \frac{k}{|k|} = \varepsilon_q = \frac{q}{|q|}. \tag{4}$$

Единое поле U представляется двумя космическими компонентами

$$u = u_\pm = \begin{cases} u_+ \\ u_- \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{u_+u_+^*}\mathrm{e}^{-if_+} \\ \sqrt{u_-u_-^*}\mathrm{e}^{+if_-} \end{cases}, \quad U = u_+ + u_-, \tag{5}$$

где использовано представление $u_\pm$ в показательной форме, которое демонстрирует различие зарядовых компонент,

$$f_+ = \arg u_+, \quad f_- = \arg u_-, \tag{6}$$

$$\arg u_\pm = -\arg u_\pm^* \quad -\pi < \arg u_\pm \leqslant \pi \quad [\text{Корн, 1.3-2}]. \tag{7}$$

Напомним, что знак индекса космического поля определяется знаком его заряда (I.7.4.4.2).

Согласно (1.4.10) справедливо уравнение

$$\Box UU^* = 0. \tag{8}$$

Как выяснится в дальнейшем, условие нормальной гравитации выполняется почти всегда, а его нарушение является **космологической экзотикой**.

Для U справедливо такое же по форме **локально-волновое** дифференциальное уравнение первого порядка как и для u (1.2.1),(1.2.6),(1.2.8):

$$\nabla^\mu U = ik^\mu U, \quad k^\mu k_\mu^* = k^\mu k_\mu = k^2, \quad L. \tag{9}$$

Кроме того в статистическом смысле

$$UU^* = u_+u_+^* + u_-u_-^*, \quad S, \tag{10}$$

так как произведения $u_+u_-^*$ и ему сопряжённое являются чрезвачайно быстро осциллирующими функциями, которыми при статистическом сглаживании можно пренебречь. Символ S обозначает **условие статистичаского сглаживания**.

Так как регулярную компоненту космического поля в изначальной системе отсчёта можно записать в виде (I.6.3.7.5)

$$\tilde{u} = \tilde{u}_\pm \sim \mathrm{e}^{-ikT}, \tag{11}$$

то в этой системе величина $f_\pm$ статистически стремится к значению $\pm kT$

$$f_\pm \to \pm kT, \tag{12}$$

что согласуется с выбором знаков в экспонентах (5).

4. Смысл квадрата модуля единого поля. В силу точечности зарядов, **плотности 4-тока положительных и отрицательных точечных зарядов** j_+^μ, j_-^μ можно рассматривать независимо друг от друга и пренебрегая космологически

малыми сплошными 4-токами. При этом для единого поля (несмотря на (I.3.1.6.5)) в силу точечности зарядов

$$j_U^\mu = j_{u+}^\mu + j_{u-}^\mu = j_+^\mu + j_-^\mu, \tag{1}$$

$$\varrho_{0U} = \varrho_{0+} + \varrho_{0-}. \tag{2}$$

Любую из этих плотностей покоя будем обозначать общим символом ϱ_0

$$\varrho_0 = \varrho_{0\pm} = \begin{cases} \varrho_{0+} & \geqslant 0 \\ \varrho_{0-} & \leqslant 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Раздельная плотность покоя зарядов разного знака позволяет представить её в виде

$$\varrho_0 = qw_0 = qw_{0\pm}, \tag{4}$$

где с учётом (3.3)

$$w_0 = w_{0\pm} = \begin{cases} w_{0+} \\ w_{0-} \end{cases} = \varrho_{0\pm}/q = \frac{k}{q} \begin{cases} u_+u_+^* \\ u_-u_-^* \end{cases} \geqslant 0 \tag{5}$$

– **концентрация покоя протистонов космического поля** соответствующего знака заряда. Очевидно концентрация покоя протистонов единого поля (то есть обоих знаков), с учётом (3.10) и (5):

$$w_{0U} = w_{0+} + w_{0-} = \frac{k}{q}(u_+u_+^* + u_-u_-^*) = \frac{k}{q}UU^*, \quad S, G, \tag{6}$$

то есть с точностью до постоянного коэффициента q/k **квадрат модуля единого поля имеет смысл концентрации покоя протистонов обоих знаков**, при условии статистического сглаживания и нормальной гравитации. Согласно (1.2) имеем плотность заряда (в системе, сопутствующей 4-току (1.4.1))

$$w = u^0 w_0. \tag{7}$$

Двузначность единого поля и его квантовых компонент обеспечивает полноту его описания как в гравитационном так и в электромагнитном смысле. (8)

Отметим соотношения

$$\begin{cases} a)\ j_\pm^\mu u_{\mu\pm} = \varrho_{0\pm} = qw_{0\pm}, \\ b)\ w_{0\pm} = \frac{j_\pm^\mu u_{\mu\pm}}{q} = w_\pm^\mu u_{\mu\pm}, \\ c)\ j_\pm^\mu j_{\mu\pm} = q^2 w_{0\pm}^2 = \varrho_\pm^2 - \mathbf{j}_\pm^2, \\ d)\ |j_\pm^\mu| = |q|\sqrt{w_{0\pm}^2} = |q| w_{0\pm}, \\ e)\ w_{0\pm} = \frac{|j_\pm^\mu|}{|q|} = \frac{\varrho_{0\pm}}{q}, \\ f)\ w = u^0 w_0. \end{cases} \tag{9}$$

5. Гравитационные и электромагнитные волны. Волновое уравнение (3.8)

$$\Box UU^* = 0 \tag{1}$$

справедливо независимо от условий нормальной гравитации G и статистического сглаживания S, но от этих условий зависит интерпретация самого поля uu^*. Если оно не слишком отклоняется от своего среднего значения $\check{UU}^*$, то оно с точностью до постоянного множителя q/k имеет смысл (4.5) концентрации покоя $2c_q/\check{u}^0$ точечных зарядов любого знака, а значит – **концентрации покоя протистонов**. При этом из уравнения (1) следует уравнение

$$\Box c_q = 0, \quad G, S, \tag{2}$$

но достаточно большие локальные отклонения концентрации в сторону уменьшения ограничиваются средним значением концентрации, то есть нарушают линейность уравнения. Для малых отклонений

$$\delta c_q = c_q - \check{c}_q \tag{3}$$

концентрации протистонов (любого знака) от своего среднего значения $\check{c}_q$, уравнение (2) можно записать в виде

$$\Box \delta c_q = 0. \tag{4}$$

Назовём его **уравнением гравитационных волн**, которые можно рассматривать как **космический звук**, особенностью которого (в силу **инвариантности уравнения состояния вакуума**) (4.3.3.1) является скорость распространения, равная релятивистскому пределу

$$v = 1. \tag{5}$$

Гравитационные волны скалярные. Однако их можно рассматривать как метрические волны, учитывая возможность выбора единицы измерения интервала, связанной с концентрацией прогаза и соотношения компонент метрического тензора, подходящего к осреднённому темпу. Тогда согласно ОТО они допускают тензорное описание, но сводящееся к скалярному (1), так как можно обходиться плоским пространством основной метрики.

Так как в прогазе (проплазме) существуют электрические токи, то разность концентраций положительных и отрицательных зарядов стремиться к нулю, хотя может быть не нулём в виде электромагнитных волн тока смещения или волн плотности заряда (заряженных частиц).

Постоянство осреднённых значений $uu^* = \bar{u}\bar{u}^*$, $u^0 = \bar{u}^0$ означает постоянство концентрации и темпов простонов, а следовательно – отсутствие гравитации, то есть **постоянство $\bar{u}\bar{u}^*$, $\bar{u}^0$ является признаком пространства, свободного от гравитации, то есть абсолютного вакуума**.

Кроме волн концентрации простонов могут существовать волны, не нарушающие средний темп и концентрацию простонов обоих знаков, но нарушающие их в

противоположных фазах для протистонов противоположных знаков. Это вызывает волны **электрических токов смещения** (I.11.2.2.4), то есть **электромагнитные волны**.

6. 4-плотность вероятности положения простона. Для простонов как самых простых стационарных состояний движения протистона существенно **время жизни простона** в реликтовой системе, являющееся универсальной для всех простонов величиной (3.1.5.6)

$$\Delta T = \pi/k = T_2 - T_1. \tag{1}$$

При этом можно ввести понятие 4-плотности вероятности простонов w_4, используя ΔT как временную компоненту dt элемента 4-объёма $d\Omega = dv \cdot dt$. Тогда согласно (I.7.1.1.7)

$$w_4 = w_0. \tag{2}$$

Благодаря такой интерпретации плотности вероятности простонов квантовая теория становится **релятивисткой**, так как роль волновой функции играет единое поле u, квадрат модуля которой – 4-скаляр, а не классическая волновая функция, квадрат модуля которой – 3-плотность, то есть не 4-скалярная величина $w = u^0 w_0$.

7. Звеноме́р. Согласно (3.1.5.*), стыки звеньев всех протистонов синхронны в реликтовой системе координат. Это означает, что в 4-пространстве существует счётное множество 4-концентрических гиперсфер, 4-радиусы которых образуют бесконечную последовательность с постоянным шагом $T_2 - T_1$. То есть каждая такая **стыковая гиперсфера** расположена относительно двух ближайших к ней стыковых гиперсфер с шагом $T_2 - T_1$. Иначе говоря, стыковые гиперсферы разбивают всё 4-пространство на гиперслои с толщиной $T_2 - T_1$, каждый мз которых назовём **звеномером**. Так как временная плотность вероятности положения простона даёт единичную вероятность при интегрировании именно по шагу $T_2 - T_1$, то вычисление вероятности положения простона в 4-пространстве сводится к интегрированию w_4 по звеномеру. Если функция w_4 финитна в 3-пространстве, то гиперсферический слой звеномера в области существенной для интегрирования можно представить плоским слоем, если достаточно мала кривизна звеномера, то есть при достаточно большом возрасте Вселенной.

Теперь не трудно видеть, что использование понятия **простона** как коротко живущей (свободной за время жизни) частицы, позволяет применять к ней **инвариантное понятие плотности 4-вероятности положения**.

8. Единство и разнообразие единого поля. Единое поле в целом задано. Однако занимая весь бесконечный 4-объём Вселенной, оно является в произвольно выбранных конечных объёмах бесконечно разнообразным. Это является следствием **иррациональности координат спектральных точек**. Поэтому в конкретных задачах, рассматриваемых обычно в конечной окрестности некоторой системы координат, **единое поле может иметь бесконечно разнообразный вид, несмотря на свою единственность**. Отсюда следует **единство и разнообразие**

антропного мира, в котором мы живём. Необходимость использования статистического абстрагирования для универсального представления мира является следствием этого бесконечного разнообразия.

9. Метаболизм простонов. Проволны. Квадрат модуля космического поля (как двузначной величины) имеет смысл (4.5) концентрации покоя простонов этого поля (с точностью до постоянного коэффициента k/q). Концентрация – это среднее число dN_p протистонов в единице объёма dv, то есть величина dN_p/dv. При $dv \to 0$, вероятность попадания в него более одного протистона является величиной более высокого порядка малости, чем dN_p, поэтому **концентрация имеет также смысл вероятности попадания любого протистона в элемент объёма** dv.

Вероятностный смысл квадрата модуля космического поля и линейность уравнения (КГФ) единого поля, как и уравнения для его квадрата модуля, позволяют интерпретировать квадраты модулей всех компонент разложения единого поля по собственным функциям оператора КГФ как **концентрации протистонов соответствующих этим компонентам**. Тогда статистическое исследование (**статистический анализ**) единого поля превращается в функциональный анализ единого поля на основе дифференциональных уравнений его самого и его квадрата модуля.

Элементарным объектом статистики протистонов является простон. А удобным элементарным объектом функционального анализа является плоская волна. Общей величиной для их соответствия может служить **4-импульс простона** P^μ (важный для его механики) и волновой 4-вектор k_R^μ плоской волны, то есть они должны быть пропорциональны друг другу $P^\mu \sim k_R^\mu$.

4-импульс протистона подвержен регулярным шаговым колебаниям и флуктуациям, вызванным лабильностью стыков. Поэтому статистически протистонам в едином поле не могут соответствовать плоские волны, а могут – только группы плоских волн, которые, вообще говоря коррелируют между собой. Это не позволяет идентифицировать протистоны определённым волновым 4-вектором (то есть определённой плоской волной).

Но это можно сделать для коротких одинаково направленных элементов длины мировой линии любых простонов, выбрав их **случайно** от разных протистонов и составив из них непрерывную в собственном времени последовательность, которой в каждый момент времени принадлежит ровно один простон с определённым 4-импульсом и зарядом, а всей последовательности соответствует плоская волна с соответствующим волновым 4-вектором $k_R^\mu \sim P^\mu$. Такую последовательность в которой регулярно происходит обмен (сохраняющий 4-импульс) одного простона со средой, будем называть **метаболирующим протистоном (простоном)**, а соответствующую плоскую волну – **проволной**.

При соответствующей нормировке, проволну можно интерпретировать как плотность вероятности соответствующего ей простона. Но такая интерпретация должна ограничиваться 3-пространством Вселенной, хотя сама волна может считаться неограниченной. При этом **систему плоских проволн можно**

выбрать ортонормированной, так как вместе с возрастом Вселенной (при постоянной длине волны) скалярное произведение разных проволн стремится к нулю. Это является следствием того, что множество проволн соответствует конечному множеству простонов, а множество всевозможных плоских волн, согласно космическому спектру, бесконечно (счётно).

Глобальная концентрация протистонов постоянна, поэтому **статистическое распределение простонов в проволне постоянно**, что соответствует постоянному квадрату модуля проволны. (1)

Вероятностный смысл проволны не позволяет локализовать соответствующий ей простон в 3-пространстве, но зато локализует его в пространстве волнового 4-вектора. Метаболизм простона в такой волне позволяет ему мгновенно переходить из одной точки в другую с бесконечной скоростью. Это, однако не противоречит релятивистской механике, так как ниже будет ясно, что такие переходы не означают движение потока плотности энергии со скоростями выше релятивистского предела. Частицей, соответствующей проволне с определённым волновым 4-вектором, является **метаболирующий простон с определённым 4-импульсом и зарядом** q. (2)

По определению проволна удовлетворяет локально-волновым уравнениям (1.3.1), (1.1.8)

$$\nabla^\mu u = ik^\mu u, \quad k^\mu = \text{const}, \quad L, \tag{3}$$

$$\Box u = -k^2 u, \quad L, \tag{4}$$

где k^μ – комплексный волновой 4-вектор проволны, а $k = k^*$ – его модуль.

Корпускулярно-волновой дуализм квантовой механики основан на соответствии каждой проволне почти точечного простона,

10. Механическая форма локально-волнового уравнения. Из (1.4.1) следует, что направляющий 4-вектор вещественной части 4-вектора k^μ является ничем иным как 4-скоростью u^μ 4-тока

$$u^\mu = \operatorname{Re} k^\mu / |\operatorname{Re} k^\mu| = k_R^\mu / k_R, \tag{1}$$

где

$$k_R = \sqrt{k_R^\mu k_{R\mu}}. \tag{2}$$

В связи с этим представляет интерес форма локально-волнового уравнения, которую найдём следующим образом. Умножая (1.2.1) на ik_μ, имеем

$$ik_\mu \nabla^\mu u = -k^2 u, \tag{3}$$

умножая (1.2.1) на ik_μ^*, учитывая (1.2.8), имеем

$$ik_\mu^* \nabla^\mu u = -k^2 u, \tag{4}$$

складывая (3) и (4) и деля пополам, получим

$$ik_R^\mu \nabla_\mu u + k^2 u = 0, \tag{5}$$

где индекс R обозначает вещественную часть. Применяя операцию комплексного сопряжения, получим

$$ik^{\mu}_{R}\nabla_{\mu}u^* - k^2u^* = 0. \tag{6}$$

Две формы (5) и (6) одного и того же уравнения будем называть **механической формой локально-волнового уравнения**. Эта форма допускает лагранжиан с симметричным тензором плотности энергии-импульса (§5). При этом действуют все 11 законов сохранения.

§3. Волновые функции и квантовые частицы.

1. Волновые функции. Квантовые частицы Для единого поля U характерны волновые процессы, определяемые волновыми уравнениями

$$\Box U = 0, \tag{1}$$

$$\Box UU^* = 0. \tag{2}$$

Для его функционального анализа удобен линейный 4-х-мерный **оператор 4-импульса**

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla, \quad P^0 \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\hbar$ – пока не определённая константа, а энергия P^0 не уничтожима (I.12.4.8.*).

Из (2.4.5) для i-той плоской волны одного знака заряда следует

$$w_{0i} = \psi_i\psi_i^* = \frac{k}{q}u_iu_i^*, \tag{4}$$

где в случае простона одного знака **функция** ψ_i **имеет смысл проволны**. Согласно волновому уравнению КГФ (1.1.8), частота такой плоской волны в сопутствующей ей инерциальной системе отсчёта равна k, то есть плоская волна в этой системе имеет общий вид

$$u_i = A_i\mathrm{e}^{-ik^{\mu}x_{\mu}} = A_i\mathrm{e}^{-ikt}, \tag{5}$$

где знак показателя выбран согласно (2.3.11),
A_i – комплексная постоянная, а плотность заряда этой волны в сопутствующей ей системе

$$\varrho_i = j_i^0 = \frac{i}{2}\left(u_i\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - u_i^*\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) = A_iA_i^*\,k = u_iu_i^*\,k. \tag{6}$$

Интеграл от ϱ_i по 3-объёму всей Вселенной, сопутсвующему проволне, должен быть равен заряду простона q (I.8.5.5.9)

$$4\pi\int\limits_0^T \varrho_i r^2\,dr = 4\pi A_iA_i^*kT^3/3 = q = \frac{\varepsilon_q}{2^7\pi^5T^3},$$

где T – возраст Вселенной в центре инерции проволны (своём для каждой проволны). Тогда нормирующий множитель

$$A_iA_i^* = \frac{3q}{4\pi kT^3} = 2^5 3\pi^4\varepsilon_q q^2/k = u_iu_i^* = \frac{q}{k}\psi_i\psi_i^*. \tag{7}$$

При этом нормированную проволну можно записать в виде

$$\begin{cases} \psi_i = \sqrt{\frac{k}{q}}\ A_i\mathrm{e}^{-ik^\mu x_\mu} = \sqrt{\frac{k}{q}}\,u_i, \quad G \\ \psi_i\psi_i^* = \frac{k}{q}u_iu_i^* = \frac{k}{q}A_iA_i^* = \varepsilon_q 2^5 3\pi^4 q = 2^5 3\pi^4|q|, \quad G. \end{cases} \tag{8}$$

Это выражение нормирует плотность заряда проволны на заряд q, $\psi_i\psi_i^*$ – на 1, а $u_iu_i^*$ – на q/k. **Статистическая плотность простона проволны** $\psi_i\psi_i^*$ космологически постоянна в сопутствующем 3-пространстве. Но суперпозиция хотя бы двух проволн даёт уже не постоянную плотность, то есть возникает **интерференция проволн**. При этом возможны суперпозиции, интерференция которых образует **финитную суперпозицию** (группу проволн), в частности она может не иметь электрического заряда.

Если финитная суперпозиция **достаточно компактна**, то есть её характерный размер много меньше T, то нормирующий множитель AA^* становится общим для всей группы проволн суперпозиции и может рассматриваться как космологическая константа.

Произвольную финитную суперпозицию проволн, будем называть **волновой функцией простона**, если квадрат модуля такой суперпозиции нормирован на 1. В отличие от самих проволн такие суперпозиции, вообще говоря, не обладают свойством стационарности, которое тесно связано с понятием **наблюдаемости**.

В силу ортогональности проволн квадраты модулей любых волновых функций и их суперпозиций при соответствующей нормировке можно интерпретировать как плотности покоя вероятности местоположения простонов. При этом **волновые функции, в том числе сами проволны, удобно определить как двузнаковые скаляры**, (9)
то есть как двузначные функции, две ветви которых отличаются только знаком. Это расширяет область операторов, применимых для волновых функций.

Согласно (1.2.1),(1.4.9) и (8) для волновых функций и их квадратов модулей, соответствующих компонентам единого поля, следуют уравнения, такие же как для этих компонент единого поля, в частности

$$\nabla^\mu\psi = ik^\mu\psi, \quad \Box\psi\psi^* = 0, \quad G, \quad S, \tag{10}$$

где волновой 4-вектор k^μ может быть пространственно-подобным (1.2.4).

Произвольную волновую функцию ψ согласно (8) и (2.3.5) можно записать в виде разложения по проволнам ψ_i:

$$\psi = \sum_j C_j \cdot u_j, \quad G, \quad S, \tag{11}$$

где согласно вероятностному смыслу волновой функции нормирующий множитель должен удовлетворять условию

$$\sum_j C_j^2 = 1, \tag{12}$$

где суммы, вообще говоря, могут быть заменены на соответствующие интегралы, среди которых существуют **финитные стационарные волновые функции**.

Двузнаковость волновой функции допускает существование квантовых частиц с полуцелым спином.

Нормирование функции (в смысле квадрата модуля) на число N в координатном пространстве по теореме Парсеваля соответствует нормированию её (в том же смысле) на число N в спектральном пространстве.

Если волновой функции согласно лагранжеву формализму соответствуют определённые значения энергии покоя (массы) и спина, то такую волновую функцию будем называть **квантовой частицей**. Точные значения массы и спина соответствуют **свободной квантовой частице**, а степень неопределённости этих величин характеризует степень **виртуальности квантовой частицы**.

Определённость энергии покоя (массы) квантовой частицы означает её постоянство в инерциальной сопутствующей (или хотя бы в мгновенно сопутствующей мало ускоренной) системе отсчёта. То есть определение требует от квантовой частицы стационарности (или хотя бы достаточной степени стационарности). Для этого необходима определённость всех её квантовых чисел.

В заданных условиях (в частности в вакууме) квантовая частица соответствует не каждой волновой функции, а только такой, которая имеет определённые значения массы и спина. Для этого, как увидим ниже, она должна иметь **квантовое значение массы, спина и заряда**, то есть значение, принадлежащее **квантовому спектру** этих величин в заданных условиях.

В силу вакуумных флуктуаций, понятия свободной и виртуальной квантовой частицы абстрактны, то есть практический смысл имеют лишь статистические распределения механических величин квантовых частиц. При этом в статистически достаточно однородной и изотропной среде (например в вакууме) наблюдения могут допускать идентификацию отдельных квантовых частиц, особенно достаточно свободных.

Особая роль свободных частиц для их наблюдаемости приводит к развитию математического аппарата квантовой механики, основанного на линейном функциональном анализе, позволяющем разложение функций по собственным функциям линейных **операторов физических величин**. При этом операторы 4-импульса и момента импульса особенно существенны для свободных частиц, волновые функции которых являются собственными функциями этих операторов. Операторы физических величин обеспечивают **ортонормированность волновых функций**, необходимую для их вероятностной интерпретации.

Понятие метаболизма простонов в проволне (2.9.*) естественно обобщается на понятие **метаболизма простонов в квантовой частице**, если вместо

сопутствующей проволне инерциальной системы отсчёта рассматривать **системy, мгновенно сопутствующую 4-импульсу**, определяемому в центре инерции (если он существует) волновой функции квантовой частицы.

2. Нормоны. Простейшую квантовую частицу с **двузнаковой** волновой функцией, ветви которой являются проволной и инвертированной проволной вида

$$\psi_j = C_j \cdot u_j, \tag{1}$$

где согласно (1.8)

$$C_j = \pm\sqrt{k/q}, \tag{2}$$

$$\psi_i \psi_j^* = C_j^2 u_j u_j^*, \tag{3}$$

назовём **нормоном**. Волновая функция нормона является частным случаем функции (1.11). Ниже будет продемонстрирована нетривиальность спектра зарядов нормона.

Простоны, метаболирующие в одном нормоне по определению имеют одинаковые волновые 4-векторы и согласно (1.3) – одинаковые 4-импульсы P_m^μ. Нормон по определению имеет 4-импульс P_n^μ с тем же направлением, определяемым **волновым вектором** k^μ **волновой функции нормона**, но, вообще говоря, отличающийся по модулю, так как селекция простонов по 4-импульсу, означает их **обменное** взаимодействие (не учитываемое в 4-импульсе простона, определённом лишь на одном звене)

$$P_n^\mu = g_n P_m^\mu, \tag{4}$$

где коэффициент g_n определится позже. Он выражает **нормонный дефект массы простонов** в нормоне.

Ниже постепенно выяснится **квантовый спектр вакуумного (свободного) нормона**.

3. Физическая полнота смстемы проволн. Вероятность совпадения 4-импульсов разных проволн равна нулю (в силу конечности множества простонов и счётности космического спектра). Поэтому спектр 4-импульса проволн u_i представляет собой счётное подмножество **дискретных спектральных точек**, статистически равномерно распределённых в **непрерывном спектре** собственных функций оператора 4-импульса.

Квадрат модуля проволны в силу нормированности времени жизни простона приобретает смысл **4-плотности** w_4 **вероятности местоположения простона**, (1) которая численно равна 3-полотности покоя w_0 вероятности местоположения простона

$$w_0 = w_4, \tag{2}$$

имеющей другой смысл. То есть в ДФ плотность вероятности покоя (4-скалярная плотность вероятности) играет ту же роль, что и плотность вероятности в нерелятивистской квантовой механике. При этом ДФ релятивистская теория, но сохраняет простоту методов нерелятивистской теории. Простон в ДФ является

универсальной короткоживущей частицей. А проволна – статистическое волновое представление множества почти одинаковых простонов.

Постоянство 4-импульса плоской проволны простона с механической точки зрения означает замкнутость этой механической системы, то есть **инерциальное (свободное) движение проволны**. Но эта замкнутость не абсолютная, так как проволна представляет собой не вполне определённую **группу** плоских волн, хотя и с бесконечно близкими волновыми 4-векторами. Несмотря на слабо выраженную локальность, определяемую размером Вселенной данного возраста, такая группа имеет центр инерции, движение которого может случайным образом под действием неоднородности прогаза (то есть в гравитационном поле) отклоняться от прямолинейности, что можно рассматривать как геометризацию гравитационного поля. Таким образом проволна, хотя и очень размыто (согласно слабо локализованной амплитуде вероятности) всё же локализует местоположение своего метаболирующего простона в своём центре инерции (**собственном центре Вселенной**).

Понятие проволны приводит к понятию **корпускулярно-волнового дуализма**, отвечающего **фейнмановской интерпретации волновой функции**. То есть возникает возможность представления единого поля как множества точечных частиц (простонов) так и суперпозиции плоских проволн. Статистическая интерпретация проволн сводит эти представления друг к другу. Плоская проволна не позволяет локализовать соответствующий простон в координатном пространстве, но хорошо локализует его в пространстве 4-импульсов. Указав координаты метаболирующего простона плоской проволны в данный момент времени, ничего нельзя сказать о его 3-координатах в следующий момент времени, хотя сами протистоны имеют вполне определённые мировые линии.

Система проволн по определннию полна по отношению к разложению по ней единого поля, однако, она не может быть полна в точном математическом смысле, так как число её элементов, хотя и велико, но конечно для заданного возраста Вселенной. Поэтому систему прооволн будем называть не математически, а только **физически полной**. В этом смысле **система проволн по определению ортогональна и физически полна.**

Систему координат, в которой волновой 4-вектор проволны совпадает по направлению с осью времени, будем называть **сопутствующей (собственной)** относительно проволны.

4. Единая волновая функция. Согласно (1.11) всему единому полю можно поставить в соответствие функцию

$$\Psi \leftrightarrow U. \tag{1}$$

Функция $\Psi\Psi^*$ не может иметь смысл плотности вероятности местоположения простона (как функция $\psi_i\psi_i^*$), но имет смысл концентрации простонов во Вселенной. Функция Ψ является суперпозицией всех проволн, которые ортогональны друг другу, поэтому нормирована на число всех протистонов Вселенной. Функцию Ψ назовём **единой волновой функцией**.

Аналогично любой суперпозиции проволн, то есть любой **компоненте единого поля** u_j, ставится в соответствие **волновая функция**

$$\psi_j \leftrightarrow u_j. \tag{2}$$

Волновая функция нормирована на вес её проволн, то есть на сумму (интеграл) квадратов коэффициентов её разложения в суперпозицию проволн.

Физически полную систему проволн можно рассматривать в представлении физически полными системами собственных функций любых линейных операторов механических величин.

С механической точки зрения представляют интерес обменные стационарные финитные группы волн для которых существует инерциальная система отсчёта, в которой частоты всех волн группы равны и группа нормирована на один простон в 3-пространстве Вселенной. Такая группа представляет собой квазиточечную свободную материальную частицу, которую будем называть **свободной квантовой частицей**. (3)

В частности такая группа может быть плоской проволной, нормированной на δ-функцию согласно квантовой механике [Ландау 3, (5,4)].

Представление простонов волновыми функциями не обязательно. Простоны можно рассматривать как звенья протистонов, движущихся по вполне определённым мировым линиям. Однако, более аналитична задача наблюдения их как волновых функций, хотя не следует забывать о существовании протистонов (**как о скрытых параметрах**).

5. Супер-симметрия стационарных 4-волновых функций нормонов.

Заметим, что квадрат модуля $C_j^2 u_j u_j^*$ **скалярной волновой функции нормона** (2.3)

$$\psi_j = C_j \cdot u_j \tag{1}$$

не изменится, если её представить в 4-векторном виде

$$\psi_j^\mu = \frac{k^\mu}{\sqrt{k^\mu k_\mu}} C_j \cdot u_j, \tag{2}$$

где k^μ – волновой 4-вектор проволн нормона. Действительно

$$\psi_j^\mu \psi_{j\mu}^* = C_j^2 \, u_j u_j^*. \tag{3}$$

В таком представлении проволны и их суперпозиции (**4-векторные волновые функции**) по-прежнему удовлетворют тем же (что и скалярные) дифференциальным уравнениям, хотя изменяются квадраты модулей функций. В декартовых координатах 4-векторную волновую функцию можно записать в виде

$$\psi_j^\mu = \psi_{j0}\, e^0 + \psi_{j1}\, e^1 + \psi_{j2}\, e^2 + \psi_{j3}\, e^3. \tag{4}$$

Для **стационарной волновой функции нормона** существует **сопутствующая система координат**, в которой

$$\psi_j^\mu = \psi_{j0} e^0, \quad \psi_j^0 || e^0, \tag{5}$$

что означает **эквивалентность** 4-векторной и скалярной волновых функций нормона в стационарном случае, то есть **в сопутствующей системе координат 4-векторная стационарная 4-волновая функция нормона эквивалентна скалярной 4-волновой функции**

$$\psi_j^\mu \leftrightarrow \psi_j, \quad \psi_j^0 || e^0, \tag{6}$$

различие возникает только при нарушении условия стационарности 4-волновой функции нормона.

Таким образом стационарный (свободный) нормон имеет два эквивалентных представления волновой функцией, либо скалярной, либо 4-векторной. Это свойство **свободного нормона** назовём его **суперсимметрией**.

6. Спектр зарядов нормона. Волновая функция нормона допускает её представление произведением трёх ортогональных компонент, возможные значения зарядов каждой из которых имеют спектр $0, \pm 1/3$. Действительно. В едином поле 4-ток нормона вычисляется исходя из соответствующей компоненты (5.1) единого поля по формуле (I.7.2.1.1), то есть получим следующее **выражение плотности 4-тока нормона**:

$$j^\mu = \frac{i}{2}(u_j \nabla u_j^* - u_j^* \nabla u_j) = \frac{iC_j^2}{2}(\psi_j \nabla^\mu \psi_j^* - \psi_j^* \nabla^\mu \psi_j) = \frac{C_j^2}{2} j_{\psi_j}^\mu. \tag{1}$$

Так как 4-ток, выраженный через волновую функцию отличается от 4-тока, выраженного через компоненту единого поля на постоянный коэффициент (C_j^2), то свойства этих 4-токов, рассмотренные в (I.7.2.*.*) аналогичны. Напомним, что 4-ток суперпозиции полей вовсе не равен суперпозиции их 4-токов.

Волновую функцию нормона ψ_j можно разложить на 4 **4-координатных** или 3 равновероятных **3-координатных множителя** в виде

$$\psi_j = C_j \mathrm{e}^{-ik^\mu x_\mu} = C_j \mathrm{e}^{-ik^0 x_0} \mathrm{e}^{ik^1 x_1} \mathrm{e}^{ik^2 x_2} \mathrm{e}^{ik^3 x_3} = C_j \psi_x \psi_y \psi_z, \tag{2}$$

где в сопутствующей системе координат $k^0 \to \pm k$.

Каждый из множителей ψ_x, ψ_y, ψ_z, **не нарушая 4-импульса**, можно разложить на два равновероятных **зарядовых** множителя:

$$\psi_x = \psi_{+x}\psi_{-x}, \ \psi_y = \psi_{+y}\psi_{-y}, \ \psi_z = \psi_{+z}\psi_{-z}, \tag{3}$$

где (при общем паразаряде $q_p = \mathrm{const}(\mu)$)

$$\begin{aligned}
\psi_{+x} &= \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_+^1 x_1)}, \ \psi_{-x} = \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_-^1 x_1)}, \\
\psi_{+y} &= \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_+^2 x_2)}, \ \psi_{-y} = \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_-^2 x_2)}, \\
\psi_{+z} &= \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_+^3 x_3)}, \ \psi_{-z} = \mathrm{e}^{-i(k^0 x_0/6 - k_-^3 x_3)},
\end{aligned}$$

$k^1_+, k^2_+, k^3_+ \geqslant 0,\ k^1_-, k^2_-, k^3_- \leqslant 0,$
$k^0 \to \pm k, \quad k^1 = k^1_+ + k^1_-,\ k^2 = k^2_+ + k^2_-,\ k^3 = k^3_+ + k^3_-,$
то есть получим представление 6-ю равновероятными множителями

$$\psi_j = C_j \psi_x \psi_y \psi_z = C_j \psi_{+x} \psi_{-x} \psi_{+y} \psi_{-y} \psi_{+z} \psi_{-z}, \tag{4}$$

Тогда согласно (I.7.2.7.2)

$$j^0_\psi = C_j C^*_j (\psi_x \psi^*_x\ \psi_y \psi^*_y\ j^0_z + \psi_x \psi^*_x\ \psi_z \psi^*_z\ j^0_y + \psi_z \psi^*_z\ \psi_y \psi^*_y\ j^0_x),$$

где

$$\begin{aligned} j^0_x &= \psi_{-x} \psi^*_{-x} j^0_{+x} + \psi_{+x} \psi^*_{+x} j^0_{-x}, \\ j^0_y &= \psi_{-y} \psi^*_{-y} j^0_{+y} + \psi_{+y} \psi^*_{+y} j^0_{-y}, \\ j^0_z &= \psi_{-z} \psi^*_{-z} j^0_{+z} + \psi_{+z} \psi^*_{+z} j^0_{-z}, \end{aligned} \tag{5}$$

где согласно (I.7.2.6.2),(I.7.2.1.1) в сопутствующей системе

$$\begin{aligned} j^0_{+x} &= j^0_{\psi_{+x}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \\ j^0_{+y} &= j^0_{\psi_{+y}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \\ j^0_{+z} &= j^0_{\psi_{+z}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \\ j^0_{-x} &= j^0_{\psi_{-x}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \\ j^0_{-y} &= j^0_{\psi_{-y}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \\ j^0_{-z} &= j^0_{\psi_{-z}} = k^0/6 = \pm\varrho/6, \end{aligned}$$

где $\pm\varrho/6$ – постоянные в среднем плотности заряда каждого из шести зарядовых множителей, одинаковые по амплитуде, но вообще говоря разные по знаку, так как знак заряда нормона определяется знаком заряда метаболирующего простона, а он может как совпадать так и не совпадать со знаком k^0. То есть принципиальное значение имеет **положительная определённость энергии простона** (I.12.4.8.*), (1.3). Тогда интегрирование постоянных плотностей зарядов (5) даёт возможные значения **координатного** заряда каждой из 3-х пространственных компонент:

$$q_x = 0, \pm q/3, \quad q_y = 0, \pm q/3, \quad q_z = 0, \pm q/3,$$

сумма которых даёт спектр возможных значений заряда нормона в виде

$$q_n = -|q|, -\frac{2}{3}|q|, -\frac{1}{3}|q|,\ 0,\ \frac{1}{3}|q|,\ \frac{2}{3}|q|,\ |q|, \quad \text{паразаряд } q_p = \text{const}. \tag{6}$$

3-координатные множители можно рассматривать как независимые зарядовые стационарные состояния метаболирующего простона.

Очевидно, равенство трёх координатных зарядов нормона соответствует его изотропии, но неравенство этих зарядов нарушает эту **изотропию нормона**, создавая некоторую **мгновенную анизотропию нормона**, не связанную с плотностью его 4-импульса и поэтому не обязанную сохраняться. Однако при осреднении по времени **мгновенная анизотропия статистически исчезает**, хотя значение заряда обязано сохраняться.

7. Цвет нормона. Имея одинаковые 4-импульсы, все 7 зарядовых состояния нормона имеют одинаковую энергию (**вырождены**). Но это справедливо только в однородной и изотропной среде (вакууме). Во внешних макроскопических полях вырождение частично или полностью снимается, то есть энергия нормонов **расщепляется в мультиплет** из нескольких близких значений (до 7). В частности могут существовать стационарные суперпозиции нормонов, сами по-себе являющиеся статистической неоднородностью, поэтому нормоны с разными зарядами в таких суперпозициях могут иметь совсем разные энергии. При этом особо статистически неравновесны и поэтому неустойчивы суперпозиции с дробными зарядами.

В проволне простоны обмениваются не произвольно, а с одинаковыми 4-импульсами, поэтому между ними существует **обменная связь**. Как мы ниже покажем, эта связь приводит к огромному дефекту массы нормона относительно метаболирующих в нём простонов.

Для того чтобы нормон имел целый заряд все его 3-координатных множителя должны быть либо заряженными (единичный модуль заряда нормона), либо – нейтральными (нулевой заряд нормона), то есть они должны быть **одномастными**. Если же это правило нарушается, то один из этих множителей (**аномальный**) будет иметь другую **масть**, чем два других. Таким образом дробно заряженный нормон всегда имеет один аномальный 3-координатный множитель, который относительно трёх координатных осей имеет **три возможных положения**, каждое из которых назовём **цветом** нормона, являющимся особым квантовым числом (особым видом заряда). Нормоны с целым зарядом будем называть **бесцветными**.

Статистическое неравновесие в вакууме естественно и характеризуется вакуумными флуктуациями физических величин, то есть средними отклонениями от средних значений величин в единице 4-объёма. При заданном времени измерения, флуктуации тем больше, чем меньше 3-объём. А при заданном 3-объёме, флуктуации тем больше, чем меньше время измерения (усреднения). В этом **смысл соотношения неопределённостей**. Повышение степени неоднородности физических величин в заданной 4-области, понижает её энтропию и повышает её энергию.

Цветовой заряд частицы означает неуравновешенность (неизотропность) метаболирующих в ней простонов по шести направлениям в сопутствующем ей 3-пространстве. Эта неуравновешенность для микроскопических частиц характеризуется дробным электрическим зарядом частицы. Отсутствие **цветового заряда** (целочисленность электрического заряда) означает отсутствие такой неуравновешенности (неизотропности). По определению цветовой заряд имеет 3 значения, обозначаемые как

$$R, G, B. \tag{1}$$

Таким образом увеличение 4-объёма области, содержащей **дробный электрический заряд** связано с увеличением её энергии, то есть существует сила, стремящаяся к уменьшению этого 4-объёма. Эту силу назовём **цветовой силой**. Она аналогична силе, возникающей при деформировании эластичного тела, например, латексного предмета или жидкой капли.

Аналогично происхождение и обычной электромагнитной силы, как стремления к восстановлению однородности распределения электрического заряда. Однако цветовая сила растёт с увеличением расстояния и по достижении достаточной напряжйнности порождает новые частицы вместо взаимного освобождения частиц с цветным зарядом. В этом суть **конфайнмента цветных частиц**.

Итак свободный нейтральный нормон, симметричен по всем квантовым числам, то есть имеет в среднем нулевые значения всех квантовых чисел, кроме энергии покоя (массы), хотя и её можно инвертировать вместе с зарядом q.

Слабая гэповая несимметрия нормонов порождает несимметрию вещества и антивещества во Вселенной.

Нормон – в высшей степени симметричная механическая система, являющаяся частью вакуума, не нарушающая его в основном состоянии. Возбуждение нормонов происходит вместе с возмущением вакуума. Гэповая асимметрия вакуума является его врождённым свойством.

Согласно (I.8.1.11.1) скалярные сопутные волны имеют **частотный гэп**, то есть если ω^2 – квадрат частоты пара простонов, то $\omega^2 + 2k^2$ – квадрат частоты антипростонов (I.8.5.7.3). Так как средняя частота простонов для современного возраста Вселенной величина космологически большая, то относительная разница в средних частотах анти простонов и пара простонов ничтожно мала. Поэтому мы её до сих пор не учитывали.

В силу парного рождения точечных зарядов (I.8.5.6.2) **число простонов обоих знаков и модули их электрических зарядов одинаковы**. (2)

8. Токовое условие стационарности. Определим это условие:

$$\nabla_0 j^0 = \frac{\partial j^0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \to 0, \tag{1}$$

что означает существование инерциальной системы координат, в которой плотность заряда (а значит и концентрация $\psi\psi^*$ простонов) неизменна во времени. Это обеспечивает отсутствие **неуравновешенной** электромагнитной радиации, то есть – **неизменность энергии** и тем самым – **стационарность проволны** [Ландау 3, §10]. Тогда в такой **сопутствующей стационарной проволне системе** частота покоя μ проволны по определению постоянна, поэтому она уже не локальна, а глобальна. В сопутствующей стационарной проволне системе координат гипер-поверхности постоянной фазы эквидистантны во времени (в силу постоянства частоты), как, например, изображено на рисунке. Тогда частоте k, кроме зависящего от координат **локального волнового вектора** k^μ, удобно сопоставлять постоянный **глобальный волновой вектор** ν^μ, при этом

$$\nu = k. \tag{2}$$

Статистическое значение компоненты u^0 4-скорости общее для всех простонов. Пространственная компонента 4-скорости в стационарном состоянии может проявляться вращениием потока плотности вероятности.

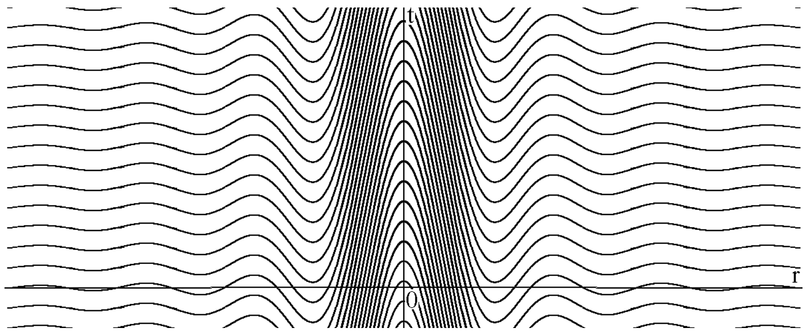


Рис. 206.2.

§4. Квантовый анализ единого поля.

1. Применение механических понятий к единому полю. В каждом квантовом множестве, по определению 4-ток статистически неразрывен, в силу чего соответствующая компонента единого поля и вместе с ней соответствующая волновая функция удовлетворяет локально волновому уравнению (1.2.1) и уравнениям (1.2.3), (1.1.8), (1.4.9)

$$\nabla^\mu \psi = i k^\mu \psi, \quad G, \tag{1}$$

$$\nabla_\mu k^\mu = 0, \quad G, \tag{2}$$

$$\Box \psi = -k^2 \psi, \quad G, \tag{3}$$

$$\Box \psi \psi^* = 0, \quad G. \tag{4}$$

Так как компонента единого поля, соответствующая квантовому множеству, удовлетворяет уравнению КГФ, что является необходимым и достаточным условием неразрывности (в том числе статистической) 4-тока, то в силу инвариантности уравнения КГФ понятие неразрывности 4-тока квантового множества не зависит от выбора системы координат. (5)

Каждой волновой функции можно поставить в соответствие квантовое множество (1.1.*), распределение простонов в котором соответствует квадрату модуля этой волновой функции. Очевидно, такое соответствие неоднозначно (многозначно). С другой стороны каждому квантовому множеству тоже неоднозначно можно поставить в соответствие волновую функцию. Концентрация простонов является статистическим понятием, связывающим понятия квантового множества и волновой функции. В этом заключается **квантово-волновой дуализм**.

Локально-волновое уравнение (1) можно представить как уравнение Лагранжа, а волновую функцию – как его обобщённые координаты. При этом **лагранжев формализм** (I.Глава 9) позволяет определить тензор плотности энергии-импульса для любых квантовых множеств и выясняется локальный смысл волнового 4-вектора k^μ.

2. Применение функционального анализа к единому полю.

Разложение единого поля по компонентным волновым функциям аналогично разложению вектора по ортогональным базисным векторам. То есть поле можно рассматривать как обобщение понятия обычного (3-х-мерного) вектора (определяемого тремя координатами), но имеющего не 3 координаты, а бесконечное их число, если каждое значение пространственных координат поля рассматривать как номер базисного вектора, а значение поля – как длину вектора. Представление поля (функции) таким бесконечномерным вектором является основой высокоэффективных вычислительных методов **функционального анализа**.

Статистический подход к изучению единого поля заключается в разложении единого поля по полным системам ортогональных нормированных функций. Согласно линейной алгебре такие системы получаются как собственные функции линейных операторов. При этом оператор уравнения на собственные значения будем называть **квантовым оператором**. Если квантовый оператор не зависит от координат, то будем называть его **оператором физической величины**.

В этом подходе механическая система представлена квантовым оператором и волновой функцией, которой соответствует квантовое множество. Так как волновая функция (в смысле интеграла её квадрата модуля) по определению **нормирована** на 1, то все собственные функции одного квантового оператора являются волновыми функциями каждой из которых соответствует **собственное квантовое число**.

В зависимости от математической задачи находят применение самые различные системы базисных векторов. Для анализа же единого поля важна **физичность выбора базиса**. Суть этой физичности в том, что базисные волновые функции должны быть собственными функциями операторов, собственные значения которых представляют физические величины. Важнейшими из этих величин являются сохраняющиеся механические величины: энергия, импульс, тензор момента импульса, сохранение которых обеспечивается, стационарностью соответствующих собственных функций и следовательно **постоянством их квантовых (собственных) чисел**. Отсюда следует важность стационарных волновых функций и инерциальных систем отсчёта, хотя механические величины сохраняются не только в стационарных механических системах.

Аналогично различным представлениям вектора его проекциями в различных системах координат, волновые функции (как векторы в гильбертовом пространстве) также могут иметь различные представления (пространственными координатами, частотным спектром, числами заполнения и, вообще, собственными числами различных линейных операторов), что часто называют **квантованием**.

3. Суперпозиции волновых функций и физические величины.

Согласно линейной алгебре, любая суперпозиция волновых функций данного разложения единого поля может быть выбрана в качестве базисной функции другого подходящего разложения единого поля. То есть любые суперпозиции волновых функций могут сами рассматриваться как волновые фукции (**принцип суперпозиции**). Вместе с тем любая волновая функция может быть разложена на компоненты, являющиеся волновыми функциями. При этом возможно сколь

угодно много разных разложений. Каждый способ разложения единого поля по какой-либо базисной системе функций можно охарактеризовать некоторым линейным эрмитовым оператором, собственные функции которого и образуют эту базисную систему. Говорят, что этот оператор определяет некоторую **физическую величину**, значениями которой являются собственные значения этого оператора. Например, оператор

$$\hat{\omega} = i\frac{\partial}{\partial t} \tag{1}$$

определяет систему волновых функций с постоянной угловой частотой в заданной инерциальной системе отсчёта.

По отношению к нормону наибольший интерес представляют сохраняющиеся механические величины, **полный набор** которых ограничивается 11-ю величинами (включающими электрический заряд).

Уравнение КГФ имеет 11 интегралов движения (I.3.1.4.*), то есть 11 констант интегрирования. Поэтому существует 11 квантовых операторов механических величин. Любые обратимые линейные преобразования проволновых уравнений вместе с единым полем не изменяют числа интегралов движения. Эти преобразования порождают различные **представления квантовой механики**, но в силу обратимости этих преобразований, такие представления эквивалентны. Мы строим единое поле и его квантовую механику, исходя из спектрального представления, но развиваем её в 4-пространственном (наглядном) представлении.

В этом представлении 11 операторов соответствуют 4-импульсу P^{μ} (4 компоненты), моменту импульса $M^{\mu\nu}$ (6 компонент) и электрическому заряду q (одна компонента).

4. Операторы наборов свободных частиц. Рассмотрим произвольный набор свободных частиц, уже заданный своими волновыми функциями и соответствующими собственными значениями физических величин, заданных матрицами в произвольной форме. Тогда в качестве общего квантовомеханического оператора для каждой физической величины этого набора, очевидно, можно взять просто матрицу собственных значений этой величины, так как при этом уравнение на собственные значения обращается в тождество.

Например, оператором электрического заряда для свободного нормона является матрица значений его заряда

$$\hat{q} = \pm(\, 0 \quad 1/3 \quad 2/3 \quad 1\,). \tag{1}$$

5. Разнообразие волновых функций. Сложные системы (представляющие много метаболирующих простонов) удобно рассматривать в многомерных **фазовых (конфигурационных) пространствах** с помощью **много-частичных волновых функций**, являющихся функциями координат фазового пространства.

Много-частичная волновая функция является произведением 1-частичных волновых функций, каждая из которых зависит только от своих координат.

При этом, очевидно, сохраняется смысл квадрата модуля такой много-частичной волновой функции как плотности вероятности местоположения n простонов в пространстве $4n$ координат. Уравнения для таких **$4n$-мерных волновых функций** могут записываться в соответствующем **n-частичном виде**. При нормировании много-частичных волновых функций, интегрирование понимается по всему фазовому пространству.

$$\int \psi\psi^* \, dv = \int \prod_i \psi_i \psi_i^* \, dv_i = 1, \tag{1}$$

где $v = \prod_i v_i$ – элемент объёма фазового пространства,

v_i – элемент объёма пространства для i-того простона. Каждая одномерная компонента много-частичной волновой функции может определятся своим набором физических величин, то есть **даже при одинаковой много-частичности (n-частичности) волновые функции могут иметь разные представления**.

Если компонента ψ является собственной функцией оператора $\hat{L}$ некоторой физической величины, то соответствующее собственное значение L этой величины характеризует эту функцию. Если же компонента не является собственной функцией этой величины, то она может быть охарактеризована средним значением $\bar{L}$ этой величины по разложению этой функции по собственным функциям ψ_{Li} этой величины, то есть

$$\bar{L} = \sum_i L_i P_i, \tag{2}$$

где L_i – собственное значение величины $\hat{L}$ для i-той компоненты разложения,

$$P_i = \int \psi_i \psi_i^* \, dv, \tag{3}$$

– вероятность i-той компоненты разложения.

Сумма (волновых функций) конечного числа замкнутых систем, вообще говоря, теряет стационарность, но может рассматриваться как замкнутая механическая система с **внутренним взаимодействием** частей. В частности такой системой является единое поле в целом. В таком смысле сумма волновых функций замкнутых механических систем остаётся замкнутой механической системой. Поэтому сумму волновых функций можно тоже называть **волновой функцией** (**сложной**), хотя уже не обязательно стационарной. Это свойство волновых функций, как общих решений локально-волновых уравнений, назовём **принципом суперпозиции волновых функций**.

Являясь нестационарной, система может периодически возвращаться в одно и то же состояние. Её можно назвать **условно стационарной**. Заметим, что в вакууме даже стационарные состояния могут быть не стабильными в силу возможности переходов под влиянием возмущения вакуумным шумом, то есть не **основные** (не самые нижние) стационарные состояния являются **метастабильными**.

Кроме **суперпозиции волновых функций, коэффициенты которой имеют смысл вероятности присутствия в ней соответствующих компонент**, вероятностный смысл имеют и произведения волновых функций, как механические системы с многими степенями свободы (**много-частичные волновые функции**), определяющие плотность вероятности конфигурации системы.

Для n-частичных волновых функций, **вторичное квантование** (то есть представление **числами заполнения** n, предполагающее несохранение числа простонов) является бессмысленным, так как число протистонов сохраняется. Вторичное квантование актуально лишь для **волновых функций неопределённой мерности**, обменивающихся простонами со средой.

Заметим, что для квантовой механики понятие **местоположения частицы в каждый момент времени** необходимо, так как бессмысленность этого понятия влечёт бессмысленность понятия **плотности вероятности обнаружения частицы**, без которого никакая интерпретация квантовой механики не возможна.

Относительно единого поля все взаимодействия его частей, представляемых волновыми функциями можно рассматривать как внутренние взаимодействия частей единой замкнутой системы – Вселенной, подчиняющейся одному и тому же **линейному** уравнению КГФ. То есть **понятие взаимодействия не обязательно связано с нелинейностью** описывающего их уравнения.

Для нестационарных волновых функции, в отличии от стационарных характерны **осцилляции** квадрата модуля во времени.

Для механического анализа единого поля наибольший интерес представляют стационарные и условно стационарные состояния, возможные в едином поле, так как именно стационарные состояния просты и сохраняются, что способствует их наблюдаемости. Статистические свойства квантовых уравнений позволяют вычислять вероятности переходов между стационарными состояниями, то есть позволяют представлять единое поле только стационарными состояниями и статистически анализиравать их взаимодействие, вызванное их суперпозицией. Стационарные состояния волновых функций являются квантовыми представлениями **элементарных частиц**.

6 Волновые над-функции. Пусть $\psi_1(t,x)$ – произвольная стационарная волновая функция в любых координатах x, а $\psi_2(t,x)$ – стационарная финитная волновая функция (**элемент разложения**). Тогда, согласно функциональному анализу, первую из этих функций можно разложить в интеграл

$$\psi_1(t,x) = \int \psi_0(t,x')\, \psi_2(t,x-x')\, dx', \tag{1}$$

где коэффициент разложения определяется формулой

$$\psi_0(t,x') = \int \psi_1(t,x')\psi_2^*(t,x)\, dx. \tag{2}$$

Используя этот коэффициент разложения в формуле (1), возвращаемся к исходной волновой функции. Действительно, подставляя (2) в (1), получим двойной интеграл

по x и x', интегрируя в котором сначала по x, находим

$$\psi_1(t,x) = \int \psi_1(t,x')\delta(x-x')\,dx' = \psi_1(t,x). \tag{3}$$

Согласно вероятностному смыслу рассматриваемых волновых функций, квадрат модуля функции $\psi_0(t,x)$ имеет смысл плотности вероятности содержания волновой функции $\psi_2(t,x)$ в волновой функции $\psi_1(t,x)$ в положении, заданном координатами x'. Иначе говоря функция $\psi_0(t,x)$ играет относительно элемента разложения ψ_2 ту же роль какую играет любая волновая функция относительно простона, то есть статистически задаёт местоположение элемента разложения. Поэтому функцию $\psi_0(t,x)$ будем тоже называть волновой функцией, но в более широком смысле, применимом как к простонам так и к квантовым частицам в качестве элементов разложения. Волновые функции в этом смысле будем называть **волновыми над-функциями**. например, проволны можно называть **волновыми функциями над простонами** и так далее.

Мы рассмотрели стационарные волновые над-функции, но в пределах допустимой неточности можно рассматривать не только инерциальное движение квантовых частиц, но и ускоренное, что расширяет понятие волновых над-функций на взаимодействующие квантовые частицы. Волновая над-функция саободной квантовой частицы может быть представлена плоской волной, чему соответствует нелокализованное инерциальное движение этой частицы. Поэтому, вообще говоря, **полная волновая функция** любой квантовой частицы может быть представлена произведением **внутренней волновой функции** частицы и **волновой функции движения** этой частицы.

Заметим, что простая замена переменных позволяет записать выражение (1) в виде

$$\psi_1(t,x) = \int \psi_0(t,x-x')\,\psi_2(t,x')\,dx', \tag{4}$$

то есть в этом выражении функции ψ_0, ψ_2 совершенно равноправны. Поэтому, например, если одна из них является волновой функцией над простонами, а другая – над данными квантовыми частицами, то их можно поменять ролями, считая первую волновой функцией над данными квантовыми частицами, а вторую – над простонами. Такую симметрию волновых функций будем называть **свёрточной симметрией волновых функций**, так как выражение справа в (1) называется **свёрткой** функций ψ_0, ψ_2.

7 Квантовые волновые уравнения. Согласно (6.1) функция $\psi_1(t,x)$ является суперпозицией всевозможных трансляций волновой функции $\psi_2^*(t,x)$, но первая функция не является результатом линейных операций над второй, так как коэффициент разложения зависит от той же переменной t. Отсюда следует, что **дифференциальное уравнение волновой функции над данной квантовой частицей не совпадает с уравнением для этой частицы**. В частности, обоим уравнениям соответствуют разные массы.

Волновые над-функций удобно использовать для описания движения частиц в составе более сложных частиц. Соответственно следует различать **волновые функции квантовых частиц** (проволны и их суперпозиции) и **волновые функции движения квантовых частиц**.

Произведению двух плоских волн с волновыми 4-векторами k_1^μ и k_2^μ соответствует плоская волна с волновым 4-вектором

$$k^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu. \tag{1}$$

Поэтому волновые над-функции могут иметь волновые уравнения с другим оператором КГФ, чем единое поле.

8. Ультраволны и инфраволны. Скорость проволны в реликтовой системе в высшей степени ультрарелятивистская, так как её темп $u^0 \sim \sqrt{T}$. Поэтому для земного наблюдателя простон, описываемый такой волной крайне экзотический объект. Позже выясниться, что и масса простона крайне велика. Мы не замечаем простоны только потому, что они образуют чрезвычайно однородный прогаз, который нами наблюдаем только благодаря относительно малым его неоднородностям. Из-за ультра-релятивистского движения, проволны, а также комбинации проволн с темпом порядка темпа проволны, будем называть **ультраволнами**.

Темп нормона u_n^0 характеризуется сугубо ультра-релятивистским средним темпом простонов $\breve{u}^0$ в реликтовой системе отсчёта (I.8.5.5.3)

$$u_n^0 = \breve{u}^{02} = \frac{8\pi T}{3k^2}. \tag{1}$$

Однако масса нормона не равна массе метаболирующих в нём простонов, так как нормон образует механическую систему метаболирующих в нём простонов со связями, выражающимися в отборе из всего множества простонов только простонов с близкими 4-скоростями. Наличие этой связи приводит к эффекту массы простонов g, который как выяснится позже, является очень сильным дефектом массы ($g \ll 1$).

Простоны образуют сплошную среду (прогаз), которая статистически однородна и изотропна, а наблюдаемы только её возмущения, обычная амплитуда вероятности которых космологически мала по сравнению с амплитудой вероятности вакуума. Сугубо ультрарелятивистские скорости частиц прогаза остаются сугубо ультрарелятивистскими в широком диапазоне ультрарелятивистских скоростей систем отсчёта. То есть свойство ультрарелятивизма прогаза в определённой степени лоренц-инвариантно. В ограниченном статистическом смысле прогаз имеет свойства пустого пространства, что позволяет интерпретировать его как вакуум.

Вакуум, как прогаз простонов, можно рассматривать и как газ нормонов с теми же ультрарелятивистскими средними темпами, но с дефектом массы от связи (равенства 4-импульсов) простонов в нормонах.

Согласно функциональному анализу, волновую функцию прогаза можно разложить по волновым функциям нормонов и любых других квантовых частиц.

При этом концентрация таких частиц в прогазе зависит от вида частиц. Законы сохранения требуют чтобы в любых таких представлениях сохранялась неразрывность 4-импульса (хотя бы в статистическом смысле).

Представление нормонов плоскими проволнами допускает существование таких суперпозиций этих волн, которые стационарны и имеют нерелятивистские скорости в реликтовой системе отсчёта. Это открывает возможности синтеза из них наблюдаемых элементарных частиц. То есть из плоских **ультраволн – нормонов** можно построить волновые функции с нерелятивистскими (или хотя бы умеренно релятивистскими) темпами (**инфраволны**).

§5. Механический смысл квантовых волновых уравнений.

Для релятивистской квантовой механики уравнение Шредингера не является достаточным. В ДФ оно заменяется локально-волновым уравнением простона.

1. Квантовый лагранжиан. Так мы будем называть комплексный лагранжиан механической формы (2.10.5) локально-волнового уравнения простона, записанного в двух эквивалентных видах:

$$\left(ik_R^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + k^2\right) u = 0, \tag{1}$$

$$\left(ik_R^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - k^2\right) u^* = 0, \tag{2}$$

где под u понимается скалярная квантовая компонента. Мы берём пару уравнений (1) и (2) потому, что функция u, являясь комплексной, представляет собой пару независимых обобщённых координат, которые, в частности, можно взять в виде u и u^*. Линейная связь лагранжиана и соответствующего тензора плотности энергии-импульса (I.9.4.2.10), обеспечивает независимость комплексных компонент волновой функции.

Попробуем взять лагранжиан в виде (сравните с [Нелипа, с. 110])

$$\Lambda = -ic_\Lambda \left(\frac{1}{2}\left(u^* k_R^\mu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} - u k_R^\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^\mu}\right) - ik^2 u u^*\right), \tag{3}$$

где c_Λ – произвольная постоянная.

Поскольку при выводе уравнения (1) использовались приближения с космологической точностью, то не имеет смысла считать c_Λ абсолютной постоянной. Мы будем считать её **космологической постоянной**, допуская возможность её медленного изменения, пропорционально невысокой степени возраста Вселенной. Такое допущение мы назовём **космологической недоопределённостью постоянной** c_Λ. Ниже (7.2.7) мы покажем, что c_Λ является константой, если **единица измерения заряда пропорциональна заряду простона** (зависящего

от возраста Вселенной), что отвечает экспериментальной физике и обеспечивает механические законы сохранения.

Заметим, что лагранжиан (3) **обращается в нуль, если функции** u **и** u^* **удовлетворяют уравнениям** (1) **и** (2). Выберем в качестве независимых обобщённых координат функции u и u^*. Тогда из (3) следует

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u^*} = -ic_\Lambda\left(\frac{1}{2}k_R^\mu\frac{\partial u}{\partial x^\mu} - ik^2u\right), \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u^*}{\partial x^\mu}} = ic_\Lambda\frac{1}{2}k_R^\mu u, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u} = -ic_\Lambda\left(-\frac{1}{2}k_R^\mu\frac{\partial u^*}{\partial x^\mu} - ik^2u^*\right), \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u}{\partial x^\mu}} = -ic_\Lambda\frac{1}{2}k_R^\mu u^*. \tag{5}$$

Легко видеть, что подстановка этих выражений в уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u^*}{\partial x^\mu}} = 0, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u}{\partial x^\mu}} = 0 \tag{6}$$

приводит к уравнениям (1) и (2) при **механическом условии** (1.2.3):

$$\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (k^\mu = k_R^\mu + ik_I^\mu). \tag{7}$$

2. Квантовый тензор плотности энергии-импульса. Тогда тензор плотности энергии-импульса (I.9.4.2.4)

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial u}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u}{\partial x^\nu}} + \frac{\partial u^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial u^*}{\partial x^\nu}} - \delta_\mu^\nu\Lambda, \tag{1}$$

который, с учётом (4),(5) и обращения Λ в нуль для u и u^*, удовлетворяющих уравнениям (1) и (2), примет несимметричный вид

$$T_{\mu\nu} = -ic_\Lambda\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x^\mu}k_{R\nu}u^* - \frac{\partial u^*}{\partial x^\mu}k_{R\nu}u\right). \tag{2}$$

Выражая производные из (1.1),(1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \frac{ik^2k_{R\mu}}{k_R^\mu k_{R\mu}}u, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^\mu} = \frac{-ik^2k_{R\mu}}{k_R^\mu k_{R\mu}}u^*, \tag{3}$$

получим **симметричный вид тензора**

$$T_{\mu\nu} = \frac{c_\Lambda k^2k_{R\mu}k_{R\nu}}{k_R^\mu k_{R\mu}}u^*u = c_\Lambda k^2u_\mu u_\nu u^*u, \tag{4}$$

где u_μ – направляющий 4-вектор (4-скорость) 4-вектора $k_{R\mu}$, то есть 4-скорость 4-тока квантовой компоненты (2.10.1),

$k_{R\mu}$ – вещественная часть локально-волнового 4-вектора (1.2.10):

$$k_{R\mu} = k_R u_\mu, \quad k_R^2 = k_{R0}^2 - k_{R1}^2 - k_{R2}^2 - k_{R3}^2 = k_{R\mu} k_R^\mu. \tag{5}$$

В координатах имеем тензор

$$T_\mu^\nu = c_\Lambda k^2 u^* u \begin{pmatrix} u_0u^0 & u_0u^1 & u_0u^2 & u_0u^3 \\ u_1u^0 & u_1u^1 & u_1u^2 & u_1u^3 \\ u_2u^0 & u_2u^1 & u_2u^2 & u_2u^3 \\ u_3u^0 & u_3u^1 & u_3u^2 & u_3u^3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

его след

$$T_\mu^\mu = c_\Lambda k^2 u u^* u_\mu u^\mu = c_\Lambda k^2 u u^*. \tag{7}$$

Величины, определяемые тензором плотности энергии-импульса (6) в доквантовой механике должны быть вещественными. Вещественность тензора (6) обеспечивается при вещественном c_Λ. При этом и лагранжиан (1.3) очевидно веществен. Однако, спин 4-векторных квантовых компонент, вычисленный согласно (I.9.5.9.2) является, вообще говоря, комплексной величиной даже при вещественном c_Λ. Поэтому в доквантовой и квантовой механике общим способом обеспечения вещественности механических величин является сохранение только вещественной части **комплексных представлений механических величин** комплексным лагранжианом. Поэтому для общности **постоянную** c_Λ **рассматриваем как комплексную**

$$c_\Lambda = c_R + ic_I. \tag{8}$$

В квантовой механике мнимые компоненты энергии-импульса характеризуют степень **нестационарности системы**, поэтому для стационарных систем можно игнорировать мнимые части величин.

3. Переход к волновым функциям. Рассмотрим применимость формул, найденных для квантовых компонент, к соответствующим волновым функциям. Для квантовой компоненты u единого поля тензор плотности энергии-импульса (2.4) выражается через вещественную 4-скорость u_μ плотности 4-тока простонов, что соответстует вещественности понятия 4-скорости в механике. Эта 4-скорость является направляющим 4-вектором вещественного волнового 4-вектора k_R^μ в механической форме локально-волнового уравнения (1.1). Если использовать другую форму этого уравнения (2.10.3), то 4-скорость оказывается комплексной. Поэтому используется именно механическая форма. Эта форма не требует условия $k_R^\mu \to k^\mu$ (2.2.1) нормальной гравитации и поэтому может применяться для вычисления экзотически сильных гравитационных полей, например, в **чёрных дырах**.

В теории же элементарных частиц гравитационные поля, хотя имеют важное значение для формирования массы частиц, но они не нарушают условия нормальной гравитации. Поэтому все формулы пунктов 1,2 можно использовать для любых

волновых функций, которые определены (3.1.4) пропорционально соответствующим квантовым компонентам, то есть имеем формулы:

$$\left(ik_R^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + k^2\right)\psi = 0, \tag{1}$$

$$\left(ik_R^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - k^2\right)\psi^* = 0, \tag{2}$$

где под ψ понимается скалярная волновая функция или любая из компонент 4-векторной волновой функции ψ^ν.

$$\Lambda = -ic_\Lambda \left(\frac{1}{2}\left(\psi^* k_R^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \psi k_R^\mu \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu}\right) - ik^2 \psi\psi^*\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi^*} = -ic_\Lambda \left(\frac{1}{2} k_R^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - ik^2\psi\right), \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu}} = ic_\Lambda \frac{1}{2} k_R^\mu \psi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} = -ic_\Lambda \left(-\frac{1}{2} k_R^\mu \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} - ik^2\psi^*\right), \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}} = -ic_\Lambda \frac{1}{2} k_R^\mu \psi^*. \tag{5}$$

$$T_{\mu\nu} = c_R k^2 u_\mu u_\nu \psi^* \psi, \tag{6}$$

где u_μ – направляющий 4-вектор (4-скорость) 4-вектора $k_{R\mu} \to k_\mu$,
c_R – вещественная часть c_Λ согласно (2.8).

4. 4-векторная волновая функция в спинорном представлении.
Волновая функция нормона может быть представлена 4-вектором (3.5.4), то есть 4-х-компонентной величиной a^ν, которая также может быть представлена спинором второго ранга $\zeta^{\mu\dot{\nu}}$ [Ландау 4, (18,1)]

$$\begin{aligned} a^1 &= \tfrac{1}{2}(\zeta^{1\dot{2}} + \zeta^{2\dot{1}}), \quad a^2 = \tfrac{i}{2}(\zeta^{1\dot{2}} - \zeta^{2\dot{1}}), \\ a^3 &= \tfrac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}} - \zeta^{2\dot{2}}), \quad a^0 = \tfrac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}} + \zeta^{2\dot{2}}). \end{aligned} \tag{1}$$

При этом [Ландау 4, (18,3)]

$$\zeta_{\gamma\dot{\beta}} \zeta^{\gamma\dot{\beta}} = 2a^2. \tag{2}$$

Согласно (I.9.5.5.5),(I.9.5.9.2) не скалярное поле, рассматриваемое как обобщённые координаты механической системы, имеет **собственный (спиновый) момент импульса**, или просто (**спин**), не зависящий от координат, а лишь от закона преобразования компонент поля в преобразованиях 4-координат. Поэтому спин в спинорном представлении отличается от спина в 4-векторном или скалярном представлении. В последнем случае он равен нулю (I.9.5.7.7).

5. Постоянная Планка как спиновый эталон. Согласно (I.9.5.5.5),(3.5) имеем спиновый тензор

$$\sigma_\alpha^{\mu\zeta} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial \psi_\zeta}{\partial x^\mu}} \psi_\alpha = -i\frac{c_\Lambda}{2} k_R^\mu \psi^{\zeta *} \psi_\alpha. \tag{1}$$

Тогда спин $\grave{M}^{\mu\zeta}$ (I.9.5.9.2) 4-векторной волновой функции ψ_α обращается в комплексный 4-вектор

$$\grave{M}^{\mu} = \sum_{\alpha} \int 2\sigma_{\alpha}^{\mu\zeta}\, dS^{\gamma} = -ic_{\Lambda} \sum_{\alpha} \int k_R^{\mu} \psi^{\zeta *} \psi_{\alpha}\, dv =$$

$$= -ic_{\Lambda} \int k_R^{\mu} \psi_{\alpha}^{*} \psi^{\alpha}\, dv, \qquad (2)$$

где в прямом 4-пространстве dS^{γ} имеет смысл элемента объёма dv, а суммирование (в силу ортогональности 4-векторных компонент ψ_α) означает свёртку по индексам $\alpha\zeta$. Интеграл (2) имеет смысл среднего значения $\bar{k}_R^{\mu}$ 4-вектора k_R^{μ}, поэтому можно писать

$$\grave{M}^{\mu} = -ic_{\Lambda} \bar{k}_R^{\mu}. \qquad (3)$$

4-вектор ψ_α эквивалентен спинору 2-го ранга (4.1), при этом (4.2)

$$\psi_{\alpha}^{*} \psi^{\alpha} = \frac{1}{2} \psi_{\gamma\dot{\beta}} \psi^{\gamma\dot{\beta}}, \qquad (4)$$

а так как интеграл квадрата модуля волновой функции по своему статистическому смыслу нормируется на 1 независимо от её представления, то спинорное представление 4-х компонентной волновой функции даёт вдвое меньшее по модулю значение 4-вектора спина, чем 4-векторное

$$\grave{M}^{\mu} = -\frac{i}{2} c_{\Lambda} \int k^{\mu} \psi_{\gamma\dot{\beta}} \psi^{\gamma\dot{\beta}}\, dv = -\frac{i}{2} c_{\Lambda} \bar{k}_R^{\mu}. \qquad (5)$$

В случае скалярного представления волновой функции спин согласно (I.9.5.7.7) отсутствует. (6)

Таким образом для 4-скалярной, 4-спинорной и 4-векторной волновых функций спектр значений модуля вещественной части спина, используя обозначения

$$c_I = \operatorname{Im} c_{\Lambda}, \quad c_R = \operatorname{Re} c_{\Lambda}, \quad (2.8), \qquad (7)$$

можно записать в виде

$$s = |\operatorname{Re}\grave{M}^{\mu}| = 0,\ \frac{1}{2} c_I k_R,\ c_I k_R, \qquad (8)$$

где $k_R = |\bar{k}_R^{\mu}|$, что соответствует **квантовой теории**, если **постоянную Планка** определить выражением

$$c_I k_R = \hbar. \qquad (9)$$

Тогда спин простой волновой функции имеет спектр:

$$s = 0,\ \hbar/2,\ \hbar, \qquad (10)$$

не требуя осцилляций волновой функции ни по одной координате, то есть это **спектр основных спиновых состояний** простой частицы.

6. Спин свободного нормона. 4-векторное представление волновой функции нормона соответствует её спину $\hbar/2$ (биспинор) или $\hbar$ (4-вектор), в то время как скалярное представление соответствует спину 0. Таким образом нормон может быть представлен и как фермион и как векторный или скалярный бозон, что выше названо **суперсимметрией нормона**. Спиновые состояния свободного нормона имеют одну и ту же энергию покоя (массу), то есть **вырождены**, но симметрия может нарушаться изменением условий однородности и изотропности, снимающим вырождение. **Спинорное представление волновой функции обеспечивается её двузнаковостью**. При этом угловая компонента волновой функции может иметь период 4π при сохранении её непрерывности и однозначности квадрата модуля. Соответственно спин принимает **полуцелое значение, что возможно только для двузнаковых функций**. (1)
Например, однозначное электромагнитное поле имеет спин $\hbar$, но не $\hbar/2$.

Значение $\hbar$ можно рассматривать как **спин суперсимметричного состояния** свободного нормона, **вырожденного по всем возможным значениям** (5.10) проекции спина на заданную ось, то есть имеющего одинаковую энергию покоя для всех этих значений. (2)

§6. Основные понятия волновой механики.

1. Механический смысл 4-векторов k_R^μ и $\mathcal{T}^\mu$. Согласно (1.4.1) плотность 4-тока

$$j_u^\mu = uu^* k_R^\mu,$$

выражается через 4-вектор k_R^μ. Так как u^μ – 4-скорость этого 4-тока, то (1.4.4)

$$k_R u^\mu = k_R^\mu. \tag{1}$$

Из выражения для тензора плотности энергии-импульса (5.2.4) находим **4-импульс волновой функции** (учитывая, что $u_0\,\psi\psi^* = w$ – 3-плотность вероятности)

$$P_\mu = \int T_{\mu 0}\, dv = \int c_\Lambda k^2 u_\mu u_0\, \psi^*\psi\, dv = \int c_\Lambda k^2 u_\mu w\, dv. \tag{2}$$

Плотность 4-импульса $c_\Lambda k^2 u_\mu w$ не является 4-вектором, так как множитель w является плотностью (I.7.1.1.1), точнее имеет смысл **плотности вероятности местоположения простона**. Величина w превращается в скаляр w_0, если её поделить на временну́ю компоненту u_0 4-скорости

$$w_0 = w/u_0. \tag{3}$$

Эта величина является **плотностью покоя вероятности местоположения простона**. Ей соответствует **плотность покоя 4-импульса**

$$p_\mu = c_\Lambda k^2 u_\mu w/u_0 = c_\Lambda k^2 u_\mu w_0, \tag{4}$$

имеющая смысл плотности 4-импульса в системе отсчёта, локально сопутствующей **локальной 4-скорости** u_μ. В этой же системе w_0 имеет смысл плотности вероятности местоположения простона, поэтому (с учётом (1)) величину

$$\mathcal{T}_\mu = c_\Lambda k^2 u_\mu = c_\Lambda \frac{k}{k_R} k_{R\mu} \tag{5}$$

можно интерпретировать как статистически ожидаемое значение 4-импульса простона в данной точке. Иными словами $\mathcal{T}_\mu$ есть **локальный** (**локально ожидаемый 4-импульс простона**), то есть осреднённый согласно волновой функции. Тогда его нулевая компонента является **локальной энергией простона**

$$\mathcal{T}_0 = c_\Lambda k^2 u_0, \tag{6}$$

а его модуль

$$\mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{T}_\mu \mathcal{T}^\mu} = c_\Lambda k^2 = m_m \tag{7}$$

является **(локальной) массой простона**, где для массы прилагательное "локальной" в обычных условиях гравитационного спокойствия не обязательно (так как масса – инвариант, постоянный в этих условиях), а лишь указывает, что простон внутри связанной системы.

Согласно (1.1.8), $k = \text{const}$, тогда из (5) и механического условия (1.2.3) следует (при постоянных c_Λ, k_R) **уравнение неразрывности 4-вектора** $\mathcal{T}^\mu$, а также, с учётом (7), – постоянство массы $\mathcal{T} = m_m$. При этом $\mathcal{T}_0$ может быть непостоянно в 4-пространстве. В псевдоэвклидовом 4-пространстве это непостоянство может быть ограничено только 3-пространством, что соответствует **стационарности** плотности 4-импульса, а следовательно и волновой функции. Тогда в системе координат, сопутствующей этому **стационарному состоянию**, величину k_R^0 будем называть **частотой квантовой частицы** (в смысле угловой частоты), а поле $\mathbf{k}_R$ будем называть **внутреним волновым вектором квантовой частицы**. (8)

Введённое здесь понятие локального 4-импульса вполне релятивистское. Его временна́я компонента (энергия) может быть как переменной так и постоянной (**стационарной**) функцией времени.

Сравнивая выражение для $\mathcal{T}$ со следом тензора плотности энергии-импульса (5.3.6), видим, что этот след имеет смысл плотности покоя массы простонов (то есть плотности покоя энергии покоя)

$$T_\mu^\mu = c_\Lambda k^2\, \psi\psi^* = \mathcal{T}\, \psi\psi^* = \mathcal{T} w_0 = m_m w_0. \tag{9}$$

А произвольный коэффициент c_Λ **определяет выбор единицы измерения плотности энергии**.

Из (4) и (5) имеем плотность покоя 4-импульса в виде

$$p_\mu = \mathcal{T}_\mu \, w_0. \tag{10}$$

4-импульс движения простона с неизменным $\mathcal{T}_\mu$ можно вычислить в сопутствующей системе координат $(u^0 = 1)$ в виде:

$$\int \mathcal{T}_\mu w \; dv = \mathcal{T}_\mu \int w \; dv = \mathcal{T}_\mu = P_\mu, \quad \mathcal{T}_\mu = \text{const}, \tag{11}$$

а **масса** этого состояния, как и должно быть согласно (7):

$$\sqrt{P_\mu P^\mu} = \sqrt{\mathcal{T}_\mu \mathcal{T}^\mu} = \mathcal{T} = c_\Lambda k^2 = m_m.$$

2. u^μ **как локальная ожидаемая 4-скорость метаболирующего простона.** Таким образом механический смысл модуля величины k^μ ясен из (1.7)

$$k = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{c_\Lambda}}, \tag{1}$$

а направляющий 4-вектор u^μ 4-вектора k^μ_R, согласно (1.5), определяется направлением локального 4-импульса $\mathcal{T}^\mu$. Поэтому 4-скорость u^μ имеет также смысл **локальной ожидаемой 4-скорости метаболирующего простона**. Её можно представить как отношение

$$u_\mu = \frac{\mathcal{T}_\mu}{\mathcal{T}} = \frac{c_\Lambda k^2 u_\mu}{c_\Lambda k^2}. \tag{2}$$

Тогда плотность 4-тока выражается через эту же скорость (как и в (1.4.2))

$$j_\mu = w_0 q u_\mu. \tag{3}$$

Умножая (1.5) на u_μ и сравнивая с (1.7), имеем

$$k^2 = \frac{1}{c_\Lambda} \mathcal{T}_\mu u^\mu = \frac{1}{c_\Lambda} \mathcal{T}, \tag{4}$$

откуда

$$\mathcal{T}_\mu u^\mu = \mathcal{T}. \tag{5}$$

3. Локальный и глобальный волновой смысл 4-вектора k^μ**. Квантовая частица.** Величина k имеет смысл (1.2.1) локальной частоты покоя волновой функции, поэтому 4-вектор k^μ можно локально рассматривать как **локальный волновой 4-вектор**. В этом и заключается **локальный волновой смысл 4-вектора** k^μ. Модуль k локального волнового 4-вектора k^μ является его частотой покоя, которую мы будем также называть **комптоновской частотой простона**, которой отвечает масса простона. Согласно (1.1.8) **комптоновская частота**

простона является постоянной величиной, то есть не зависит от вида волновой функции.

$$k = \text{const}. \tag{1}$$

Если существует система координат, в которой волновая функция является стационарной, то ей соответствует **квантовая частица**. В этой **сопутствующей частице системе координат** компонента k^0 является постоянной во всём 4-пространстве величиной, которую мы будем называть **(глобальной) комптоновской частотой квантовой частицы или её волновой функции**. Постоянство этой частоты во всём сопутствующем 3-пространстве позволяет сделать разделение переменных, то есть выделить временную компоненту волновой функции в виде глобальной плоской волны с волновым 4-вектором k^ν, который мы назовём **волновым 4-вектором** квантовой частицы. Относительно квантовой частицы её **комптоновская частота**

$$k^0 = \omega = \text{const}. \tag{2}$$

является инвариантом (частотой покоя).

4. Эффект массы нормона. Дефект массы. Волновая функция нормона вообще не локализует её метаболирующий простон в 3-пространстве, но накладывает на него условие отбора по одинаковому направлению 4-импульса, то есть некоторую **самосвязь метаболирующего простона в нормоне**. Обе плоские проволны нормона имеют ультрарелятивисиский волновой 4-вектор

$$k^\mu = ku^\mu, \tag{1}$$

где u^0 имеет характерное для ультрарелятивистских простонов значения. Состояние механической системы, статистически определённой последовательностью метаболирующих простонов, является **свободным простоном** массы m_m, если степени свободы этих простонов ничем не ограничены. Однако в нормоне метаболирующие простоны, кроме упорядочения во времени, ограничены выбором одинакового направления 4-импульса. Вообще говоря, наличие зависимостей (сил (I.9.2.3.*)) между частями механической системы может нарушать равенство массы системы сумме масс m_i её частей. Это неравенство можно характеризовать **коэффициентом эффекта массы** g, который определим соотношением

$$m = g \sum_i m_i. \tag{2}$$

В частности для массы нормона можно написать

$$m_n = g_n m_m, \tag{3}$$

где m_m – масса простона, а знак суммы опущен, так как метаболируют простоны одинаковой массы и в каждый момент времени система содержит только один из

них. Ниже мы найдём возможность конкретного определения коэффициента g_n для нормона.

Если $g < 1$, то эффект массы называется **дефектом массы** (I.9.7.3.2).

5. Волновой смысл локального 4-импульса. Согласно (1.7), (1.5.4.4)

$$\mathcal{T} = c_\Lambda k^2 = m_m = \frac{2}{3} q^2 \beta. \tag{1}$$

В отличие от самого 4-вектора $\mathcal{T}_\mu$, его модуль $\mathcal{T}$ может рассматриваться как космологически постоянная величина (как и m_m). Тогда в том же смысле требуется постоянство величины c_Λ, то есть имеем

$$\mathcal{T} = \text{const}, \tag{2}$$

$$k = \text{const}, \tag{3}$$

$$c_\Lambda = \text{const}. \tag{4}$$

Возможность (4) увидем ниже (в §7). Локальный же 4-импульс $\mathcal{T}^\mu$ зависит от 4-координат в той же мере как и 4-скорость потока вероятности u^μ. В том числе может зависеть от координат и энергетическая компонента $\mathcal{T}^0$.

Выражение (1.5)

$$\mathcal{T}^\mu = c_\Lambda \frac{k}{k_R} k_R^\mu = c_\Lambda k^2 u^\mu \tag{5}$$

демонстрирует линейную связь 4-вектора $\mathcal{T}^\mu$ с волновым 4-вектором k^μ в условиях нормальной гравитации, то есть при $k_R^\mu \to k^\mu$ локальный 4-импульс имеет тот же волновой смысл (хотя в других единицах), что и волновой 4-вектор k^μ.

При этом с космологической точностью неразрывность 4-вектора k^μ влечёт неразрывность 4-вектора $\mathcal{T}^\mu$.

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^\mu = 0, \quad G. \tag{6}$$

6. Шаговое возмущение массы простона. Длительность шага простона (3.3.6.2)

$$\Delta T \sim 1. \tag{1}$$

Заряд

$$q \sim \frac{1}{T^3}. \tag{2}$$

Возмущения заряда (микропульсации) порядка (I.10.1.3.9)

$$\delta q \sim \frac{q}{T} \sim \frac{1}{T^4}. \tag{3}$$

Масса простона (1.5.4.4)

$$m_m = \frac{2}{3} \beta q^2 \sim q^2 T^{1/2} \sim \frac{1}{T^{11/2}}. \tag{4}$$

Порядок величины β (3.3.6.5)

$$\beta \sim T^{1/2}. \tag{5}$$

Изменение массы при переходе от одного шага к соседнему происходит за счёт возмущения δq заряда, поэтому имеет порядок

$$\delta_q m \approx 2q \cdot \delta q \cdot T^{1/2} \sim 1/T^3 \cdot 1/T^4 \cdot T^{1/2} \sim \frac{1}{T^{13/2}}. \tag{6}$$

Изменение массы за шаг за счёт изменения возраста Вселенной должно иметь порядок

$$\Delta_T m_m = \Delta \frac{1}{T^{11/2}} \sim \frac{1}{T^{13/2}}. \tag{7}$$

Таким образом это изменение реализуемо за счёт микропульсаций, так как (6) и (7) имеют одинаковые порядки.

7. Паразаряд простона. Напомним, что **всегда можно выбрать положительный знак массы простона**, так как инверсия знака массы простона эквивалентна инверсии знака заряда. (1)

Однако изначально протистоны противоположных знаков заряда не вполне симметричны друг другу, так как существует гэп темпа, различающий протистоны и антипротистоны. Поэтому в результате взаимного уничтожения фундаментальных частиц и античастиц выживает больше частиц, чем античастиц (2)

§7. Квантово-волновой дуализм частиц.

1. Частицы. Частицы мы понимаем в следующем смысле.

Частица – это состояние движения n простонов, определённое его статистическим распределением в пространстве-времени посредством волновой функции. В частности, этому определению удовлетворяет и вся Вселенная в целом. При этом её волновую функцию называем **единой волновой функцией**. Таким образом Вселенная – это самая большая частица, содержащая все простоны.

Как всякая волновая функция, единая волновая функция удовлетворяет уравнению

$$\left(i k_R^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + k^2 \right) \psi^{\nu} = 0, \tag{1}$$

где k^{μ} – общее для всей Вселенной поле (которое назовём **единым потенциальным 4-векторным полем**), удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_{\mu} k^{\mu} = \Box \Phi = 0, \tag{2}$$

где скаляр Φ назовём **4-скалярным потенциалом**.

Удовлетворяя уравнению (2), 4-скалярный стационарный потенциал, согласно теории потенциала [Корн, с. 484], не имеет экстремумов в 3-пространстве (принцип максимума [Корн, с. 485]), но может иметь особенности [Корн, с. 178,493] вида

$$\Phi \approx \frac{e^{\pm ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \qquad (3)$$

и их суперпозиции при разных $\mathbf{r}_i$, которым соответствуют особенности поля k^μ. Такие сингулярные особенности поля k^μ допустимы только если квадрат модуля волновой функции на этой особенности интегрируем. Мы покажем, что волновые функции допускают важное расширение класса функций (3) (гравитоны).

В условиях достаточной разреженности таких особенностей поля k^μ (**условие разрежения**), единая волновая функция в окрестностях особенностей может распадаться на квадратично интегрируемые (**финитные**) компоненты (определяющие **частицы вещества**), которые, в силу условия разрежения, практически не коррелируют между собой и поэтому могут рассматриваться как ортогональные компоненты, локализующиеся в окрестностях разных особенностей поля k^2. Таким образом Вселенная, как частица, в областях, где выполняется условие разрежения, распадается на более мелкие **частицы вещества**. Остальные (**инфинитные**) компоненты волновых функций определяются полем k_u^μ во всей его сложности, поэтому статистически могут рассматриваться просто как случайный процесс (соответствующий **частицам излучения**). В условиях достаточной однородности среды (хотя бы статистической), в силу теоремы Нётер, для излучения (или хотя бы его части) справедливы механические законы сохранения, поэтому распространяющееся излучение может переносить на большие расстояния информацию, что означает **прозрачность** такой среды для этой (**свободной**) части излучения.

Таким образом каждому виду частиц сопоставляется своя волновая функция, квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности местоположения хотя бы одного простона (плотность вероятности обнаружения сразу двух простонов в бесконечно малом элементе объёма стремится к нулю). В этом заключается **квантововолновой дуализм частиц**, существование которых определяется существованием точечных частиц (простонов), а идентификация определяется волновыми функциями, являющимися функциональными компонентами единой волновой функции, представляющей распределение всех простонов в пространстве-времени.

2. Доквантовые частицы. Кроме обезличивающего квантово-механического описания протистона, его можно рассматривать индивидуально, используя понятие его мировой линии. При этом шаговая структура мировой линии принимает в микроскопических масштабах определённые формы (**индивидуальные состояния движения протистона**). Протистоны, определяемые индивидуальными состояниями их движения, будем называть **доквантовыми частицами** или **индивидуальными протистонами**. Квизы и квапы тоже будем называть **доквантовыми частицами**.

Индивидуальные состояния движения протистона могут быть стационарными (например, периодические 2-х и 4-х-шаговые зигзаги мировой линии). Вымораживание энергетически невыгодных (возбуждённых) состояний в процессе расширения Вселенной, повышает вероятность существования стационарных состояний.

Использования в теории индивидуальных состояний движения протистонов возможно только вместе с достаточно точным вычислением единого поля в его окрестности. Абстрактно же необходимо ограничиться квантовыми (статистическими) представлениями.

3. Свободный простон как простейшая квантовая частица. Простон (5.4.1.*), как частица с массой m_m может рассматриваться как **свободная доквантовая частица**, движущаяся прямолинейно в интервале звена. Всё остальное время его локализация произвольна, то есть определяется всей единой волновой функцией. Свободный простон имеет массу m_m. Связанное состояние метаболирующего простона, описывается с помощью своей волновой функции, обеспечивающей метаболирующему простону (**самосвязь**) определённую своим условием (**принципом**) метаболизма. **Принцип метаболизма определяется ничем иным как волновой функцией**. Связанное состояние простона, имеет дефект масс, то есть имеет меньшую массу m, чем масса m_m **свободного (на интервале звена) простона**

$$m < m_m. \tag{1}$$

Связь простона в нормоне заключается не в локализации его в координатном пространстве, а в локализации в пространстве 4-импульса. В сложной структуре связанного (метаболирующего) состояния простона, **свободный на интервале звена простон** можно рассматривать как **простейшую свободную доквантовую частицу с постоянной массой**, метаболизм которой в квантовой частице делает её связанной. Напомним, что протистон существует в 2-х зарядовых вариантах, которые переносятся и на простон.

4. Обменные связи. Каждой волновой функции сопоставляется n протистонов, статистически распределённых с концентрацией $\psi^\nu\psi^*_\nu$ в фазовом n-мерном пространстве. Однако, ниоткуда не следует, что эти n протистонов всё время должны быть одни и те же. Статистический подход допускает обмен (**метаболизм**) (2.8.10) протистонов между различными волновыми функциями. Отсюда также следует **принцип неразличимости простонов, заданных статистическими распределениями** (2.8.11).

Статистически заданный (**метаболирующий**) простон является уже иной механической системой, чем **индивидуальный простон**. В каждый момент времени эта система состоит из одного простона с определённой массой и 4-скоростью, определяемой волновой функцией. Отбор простонов посредством волновой функции накладывает на метаболирующий простон специфическую связь, которую можно рассматривать как воздействие **сил обменного происхождения**.

Поэтому для метаболирующего простона тензор плотности энергии-импульса другой, чем для одинокого.

Вообще все силы в ДФ можно свести к электромагнитным и обменным. Сила гравитации, в отличие от других сил, стремится конденсировать вещество независимо от знаков электрических зарядов. Кроме гравитации универсальной обменной силой является сила давления в обычных газах, которая имеет кинетическое происхождение. Сила давления в таких газах стремится рассеивать вещество. Кинетическое происхождение имеет и сила гравитации, но частицы соответствующего газа (прогаза) сугубо ультрарелятивистские в реликтовой системе отсчёта, благодаря чему тензор плотности энергии-импульса такого газа практически инвариантный, что означает отрицательное давление этого газа, приводящее к неустойчивости газа, проявляющейся в стремлении к конденсации в виде частиц, реализующих **обменные связи**.

5. Существование квантовых частиц. Согласно сделанным выше определениям, **квантовая частица** – последовательность элементов мировых линий протистонов, упорядоченная во времени так, что конец одного такого элемента одновременен (в собственном времени частицы) началу следующего элемента. Ясно, что такое определение квантовой частицы неоднозначно, то есть весьма абстрактно. Оно может быть конкретизовано дополнительными **условиями обмена**. Какдому **виду условия обмена соответствует свой вид квантовой частицы**. В пределах статистической абстрактности квантовой частицы она будет иметь объективный смысл, если каждое условие обмена будет сформулировано так, чтобы квантовая частица не зависела от выбора системы координат, то есть большое познавательное значение имеет **инвариантность условия обмена**. В этом смысле **наиболее объективное определение квантовой частицы** дают условия обмена, сформулированые в виде волновых функций, имеющих центр инерции. Поэтому понятия квантовой частицы и соответствующей волновой функции можно отождествить. В этом смысл понятия **квантово волнового дуализма**.

Таким образом, видов квантовых частиц может быть столько, сколько доступно нашему воображению. **Вопрос о их существовании решается в квантовой теории вычислением вероятности их существования** в тех или иных условиях, что возможно с помощью соответствующих волновых функций. Волновые функции удовлетворяют локально-волновыму уравнению, для которого существует функция Лагранжа, допускающая механическую интерпретацию квантовых частиц. Существует возможность рассматривать траекторию метаболирующего простона как в фейнмановской формулировке квантовой механики [Садбери §3.6].

Локально-волновое уравнение допускает стационарные финитные решения. Это значит, что описываемое таким решением состояние метаболизма n простонов имеет постоянную энергию покоя (массу) и определённый **статистический центр инерции**, мировая линия которого прямая и поэтому может рассматриваться как свободная материальная точка (квантовая частица) с постоянной массой. И вообще квантовая частица может рассматриваться как замкнутая механическая

система, благодаря статистической 4-однородности и 4-изотропности вакуумного шума, позволяющего применение в нём теоремы Нётер. Такая статистическая стационарность движения протистона является статистической абстракцией, имеющей большую познавательную ценность. Представление запутанного движения протистонов суперпозицией квантовых частиц резко упрощает анализ этого движения, выявляя в нём универсальные свойства (**законы**) и отвлекаясь от случайных подробностей с помощью **статистического осреднения**.

6. Элементарные частицы и их устойчивость. Частицу со стационарной волновой функцией будем называть **элементарной**. Если в ней метаболирует один простон, то такую элементарную частицу будем называть **простой**.

Любое малое возмущение невырожденной стационарной волновой функции означает превращение её в суперпозицию исходной волновой функции и её вариации, то есть – любой другой волновой функции с отличающейся частотой, что означает нестационарность 4-тока такой суперпозиции. Но нестационарный 4-ток излучает, чем вызывает непрерывное изменение состояния до тех пор пока оно не достигнет стационарности, то есть либо вернётся в исходное состояние, либо перейдёт в другое стационарное состояние. Вырожденные стационарные состояния могут переходить друг в друга при сколь угодно малых возмущениях со скоростью, зависящей от возмущения. Это интегрируемые во всём плоском пространстве решения, каждое из которых представляется суммой универсальных (с точностью до 4-трансляций и 4-вращений) элементарных стационарных решений вида

$$\psi^\nu \psi^*_\nu \sim \mathrm{e}^{-br}/r^2, \tag{1}$$

которые в некотором приближении соответствуют элементарным частицам. Простой частице соответствует один метаболирующий простон, поэтому её волновая функция удовлетворяет условию нормировки

$$\int \psi^\nu \psi^*_\nu \, dv = 1. \tag{2}$$

То есть это интегрируемое (**финитное**), в отношении квадрата модуля волновой функции, состояние. **Финитность волновой функции** означает **локальность** соответствующего ей метаболирующего простона, то есть существование его на конечном расстоянии от центра инерции, определяемого волновой функцией. Локальность распределения простона означает существование центростремительной силы, связывающей (конденсирующей) метаболирующие простоны в локальный сгусток. Любая сила связи приводит к **дефекту массы** связываемых частиц. Энергия покоя (масса) **свободных простонов** равна

$$m_m = \frac{2}{3} q^2 \beta, \tag{3}$$

а масса простонов, связанных волновой функцией, меньше, так как возникает дефект масс, учитывая который коэффициентом g, можно написать для массы

частицы

$$m_g = g_g m_m = \frac{2}{3} g_g q^2 \beta. \tag{4}$$

Связь простонов в частицахах не противоречит существованию свободных простонов, которые образуют прогаз, а частицы являются локальными очень малыми и редкими возмущениями прогаза.

Частица имеет интегрируемую особенность и её можно представить как бесконечную сумму (интеграл) плоских волн. Со статистической точки зрения каждая плоская волна усиливает или ослабляет данную частицу с некоторой вероятностью, зависящей от фазы плоской волны относительно максимума модуля волновой функции. Эта фаза с равной вероятностью может быть как положительной так и отрицательной. Отсюда следует, что **каждая частица конструктивно (или деструктивно) интерферирует в данный момент времени с половиной всех существующих в данный момент плоских волн** (нормонов). Конструктивная интерференция преобладает просто в силу естественного отбора, согласно определению частицы как стационарной метаболирующей системы проволн, выделяющейся на общем фоне повышенной концентрацией простонов.

Темп частицы в реликтовой системе зависит от соотношения количества нормонов частицы с разными направлениями скорости в реликтовой системе. То есть, вообще говоря, **темп частицы может быть любым, ограниченым темпом простонов в реликтовой системе**. Наиболее вероятен в этой системе нулевой средний темп. Иначе говоря, **релятивизм частиц ограничен** темпом простонов, который весьма велик.

7. Слабость локальных взаимодействий индивидуальных протистонов. В силу космологически больших взаимных темпов протистонов (порядка $T^{1/2}$) их локальное взаимодействие (каждого с каждым) ничтожно мaлó, так как ничтожна корреляция плотности заряда одного протистона с потенциалом другого. Оба этих поля для каждого протистона в сопутствующей системе отсчёта другого протистона испытывают огромное ультрарелятивистское сжатие в направлении скорости, поэтому ничтожна как пространственная корреляция этих полей для разных протистонов так и ничтожно время их существенного пересечения.

Другое дело, коллективные взаимодействия простонов. Для различных метаболических состояний простонов реальны значительные корреляции их волновых функций. Поэтому стационарные состояния метаболирующих функций (частицы) могут весьма сильно взаимодействовать, вплоть до аннигиляции.

Частицы являются статистически определёнными состояниями коллективного движения простонов. Если такое состояние стационарно, то оно может в каждый момент времени содержать только определённое число простонов, хотя обменивается простонами со средой (метаболирует).

В астрономически больших масштабах или в очень сильных гравитационных полях прямолинейное инерциальное движение сменяется криволинейным. Ниже мы покажем, что гравитационное поле принимает участие в формировании квантовых

частиц. Индивидуальные же протистоны, практически не взаимодействуя посредством силы Лоренца, движутся по геодезическим линиям гравитационного поля. Гравитационная неустойчивость приводит к весьма неравномерному распределению **возмущений концентрации** протистонов в астрономических масштабах, но не самой концентрации.

8. Адаптивность сложных частиц. Сложные (много-частичные) волновые функции, представляющие сложные частицы, содержащие много фундаментальных частиц, имеют очень различные вероятности существования, зависящие от окружающих условий. При этом малые изменения структуры такой частицы могут приводить к большому изменению их вероятности существования (**жизнеспособности**). Поэтому возмущения состояния такой частицы средой естественно толкают такую частицу в сторону увеличения её жизнеспособности. То есть происходит **естественный отбор** наиболее жизнеспособных **устойчивых** состояний частицы в данных условиях среды. Как правило естественный отбор упрощает частицу, что часто повышает её устойчивость, но это происходит не всегда. Существуют весьма сложные частицы и такие условия, в которых эти частицы остаются устойчивыми длительное время, приспосабливаясь к вариациям условий в широких пределах. Примером таких частиц являются **живые организмы**. Основным их свойством является приспособляемость (**адаптивность**) к вариациям внешних условий при сохранении некоторых **определяющих их признаков**.

§8. Квантовые эталоны. Возмущения вакуума.

1. Универсальная постоянная Планка. [21.08.11] Волновые функции нормонов представляются плоскими волнами с постоянным комплексным волновым вектором k^μ_n, который при этом вырождается в вещественный 4-вектор, с собственной частотой $|k_n| = |k|$. Такую же частоту $|k|$ имеют любые волновые функции при условии нормальной гравитации, хотя их локально-волновые 4-векторы k^μ могут быть совершенно разными.

Вещественное значение массы **квантовой частицы, описываемой плоской волной**, (нормона) можно выразить как через массу свободного простона (6.4.3),(6.5.1) так и через частоту $|k_n| = |k|$ этой волны (5.2.8),(6.5.1)

$$m_n = g_n m_m = c_R k_n^2 = \frac{2}{3} g_n q^2 \beta, \tag{1}$$

где g_n – коэффициент эфекта массы (6.4.2) простона в нормоне. В этом выражении коэффициент $c_R|k_n|$ имеет смысл коэффициента пропорциональности между комптоновской частотой плоской волны нормона $|k_n|$ и его массой m, как и **постоянная Планка $\hbar$ (рационализированная)** квантовой теории. Поэтому их можно отождествить, то есть с учётом (5.5.9)

$$\hbar = c_R|k_n| = c_I|k_{Rn}|, \quad c_R = c_I, \quad c_\Lambda = c_R + ic_I, \tag{2}$$

где два разных определения постоянной Планка сходятся к одному в условиях нормальной гравитации, то есть при $k_{Rn} \to k_n$.

Тогда

$$m_n = \hbar|k_n| = \hbar|k|. \tag{3}$$

Требуя релятивистской независимости выражения (3) от выбора системы отсчёта, для вектора 4-импульса P^μ, следует писать

$$P_n^\mu = \pm\hbar k_n^\mu, \tag{4}$$

откуда $m_n^2 = P_n^\mu P_{n\mu} = \hbar^2 k_n^\mu k_{n\mu} = \hbar^2 m_n^2$, что соответствует (3).

Используя (3.3.6.6)

$$\beta = \frac{|k|S_J u^0}{\pi}, \tag{5}$$

где u^0 – равновесный темп свободных простонов в реликтовой системе отсчёта, можно из (1) получить

$$c_R = \frac{2|k|g_n S_J u^0 q^2}{3\pi k_n^2} = \frac{2^{5/2} g_n S_J T^{1/2} q^2}{3^{3/2}\pi^{1/2} k_n^2}, \tag{6}$$

где u^0 раскрыто из выражения (I.8.5.5.3) в виде

$$u^0 = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2}T^{1/2}}{3^{1/2}|k|}. \tag{7}$$

В квантовой теории постоянная Планка выражается через элементарный электрический заряд e в виде (в гауссовой системе единиц)

$$\hbar = \frac{e^2}{\alpha}, \tag{8}$$

где α – безразмерная **постоянная тонкой структуры**.

Чтобы частота кванта радиации и волновой функции имела одинаковую связь с их энергией, приравняем $\hbar$ к величине $\hbar_0 = q^2/\alpha_0$ (2.4.7.2) (что окончательно доопределяет понятие волновой функции). То есть имеем связь

$$\hbar = \frac{e^2}{\alpha} = \hbar_0 = \frac{q^2}{\alpha_0} = c_R|k_n|. \tag{9}$$

Величинам $\hbar$ и $\hbar_0$ мы придали одинаковые значения, однако они отличаются по смыслу. Хотя протистон в процессе движения на звене полностью обменивает свою энергию со своим электромагнитным полем радиации, но коэффициенты $\hbar, \hbar_0$ перехода от частоты к энергии автоматически не должны быть одинаковы. Поэтому равенство (9) является **доопределяющим условием на волновую функцию**. По своему определению $\hbar_0$ – абсолютный инвариант, что согласно (9) делает $\hbar$ тоже абсолютным инвариантом

Деля (9) на e^2, получаем (при $\alpha_0 \approx 0,164$ (2.5.5.7))

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\frac{q^2}{e^2} = \frac{1}{\alpha_0}\varepsilon^2 = 6,1\varepsilon^2, \tag{10}$$

где величину

$$\varepsilon = \frac{q}{e} \tag{11}$$

– назовём **статической диэлектрической проницаемостью прогаза**.

Экспериментальное значение постоянной тонкой структуры [Internet]:

$$\frac{1}{\alpha} = 137,03599911(46).$$

Чтобы соответствовать этому значению, диэлектрическая проницаемость прогаза должна иметь значение

$$\varepsilon = 4,74\ldots, \tag{12}$$

которое мы ниже попытаемся получить.

2. Значение массы свободного и связанного нормона. Из (1.2),(1.6),(1.9)

$$c_R|k_n| = \hbar = \frac{2^{5/2} g_n S_J T^{1/2} q^2}{3^{3/2}\pi^{1/2}|k_n|} = \frac{q^2}{\alpha_0},$$

откуда

$$\alpha_0 = \frac{3^{3/2}\pi^{1/2}|k_n|}{2^{5/2} g_n S_J T^{1/2}} = \text{const}, \tag{1}$$

$$|k_n| = k = \frac{2^{5/2}\alpha_0 g_n S_J T^{1/2}}{3^{3/2}\pi^{1/2}} \gg 1, \tag{2}$$

$$g_n = \frac{3^{3/2}\pi^{1/2}|k_n|}{2^{5/2}\alpha_0 S_J T^{1/2}}. \tag{3}$$

Подставляя g_n в (1.6), получаем, учитывая (1.2)

$$c_R = \frac{q^2}{\alpha_0|k_n|} = \hbar/|k_n|. \tag{4}$$

Так как для любых волновых функций в условиях нормальной гравитации (а для нормона безусловно) комптоновская частота является определённой величиной

$$k_n = k, \tag{5}$$

то коэффициент эфекта масс простона в нормоне не может быть произвольным. Его из (1.1), учитывая (5),(4) и (1.5), можно записать в виде

$$g_n = \frac{3}{2}\cdot c_R \cdot \frac{k^2}{q^2\beta} = \frac{3}{2}\cdot\frac{q^2}{|k|\alpha_0}\cdot\frac{k^2\cdot\pi}{q^2\cdot|k|S_J u^0} = \frac{3\pi}{2\alpha_0 S_J u^0}, \tag{6}$$

чему соответствует очень большой **дефект массы**, метаболирующего в нормоне простона.

С учётом (5), c_R из (4) представляется в виде

$$c_R = \frac{\hbar}{|k|} = \frac{q^2}{\alpha_0|k|} = \frac{k_q^2}{|k|\alpha_0 T^6}, \tag{7}$$

а из (1.6) – в виде

$$c_R = \frac{2g_n S_J u^0 q^2}{3\pi|k|}. \tag{8}$$

Космологически медленное изменение c_R говорит об очень малом нарушении **интегральных** механических законов сохранения в космологических масштабах **в безразмерных единицах**, хотя можно выбрать **единицы измерения заряда** так, что c_R будет константой, обеспечивая интегральные законы сохранения.

Таким образом масса свободного нормона

$$m_n = c_R k^2 = g_n m_m = \hbar|k|. \tag{9}$$

Так как масса свободных нормонов непосредственно связана с постоянной Планка, то для них уместно также употреблять название **планкон** (то есть свободный нормон).

В свободном нормоне метаболируют простоны с одинаково направленной временнóй компонентой 4-скорости, поэтому темп u_N^0 свободного нормона в реликтовой системе равен среднему темпу u^0 свободных простонов в реликтовой системе

$$u_N^0 = u^0 = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2}T^{1/2}}{3^{1/2}|k|}. \tag{10}$$

Умножим выражение (1.1) на $g_i = m_i/m_n$, то есть на коэффициент дефекта массы нормона, связанного в произвольной i-той свободной квантовой частице, получим

$$m_i = \hbar\mu_n g_i = g_n g_i m_m.$$

Это ничто иное как дефектная масса нормона с коэффициентом g_i, выраженная через частоту нормона с тем же коэффициентом g_i, то есть частота и масса произвольной i-той частицы связаны друг с другом так же как у нормона, то есть, опуская индекс i, можно обобщить формулы (1.3), (1.4) в виде

$$m = \hbar k, \quad P^\mu = \pm\hbar k^\mu. \tag{11}$$

Поэтому **все частицы вещества можно представлять связанными состояниями нормонов.**

3. Физические единицы измерения энергии и заряда.

Раскрывая q^2 в виде

$$q^2 = \frac{k_q^2}{T^6}, \tag{1}$$

и подставляя его в выражение для c_R, найдём

$$c_R = \mathrm{c}_I = \frac{q^2}{|k|\alpha_0} = \frac{k_q^2}{|k|\alpha_0 T^6}. \tag{2}$$

Коэффициент c_Λ при лагранжиане (5.1.3) определяет единицу измерения плотности энергии. Его значение зависит от выбора единицы измерения заряда q. Если универсальный механический коэффициент c_Λ измерять в единицах, пропорциональных q^2, то заряд простона будет постоянной величиной и не будут нарушаться механические законы сохранения, так как пространство-время остаётся однородным и изотропным.

Практические системы единиц строятся на **эталонах**, важнейшим из которых является элементарный электрический заряд, который, являясь эталоном, полагается постоянной величиной. Единица заряда связана с единицей энергии. В нашей теории заряд в безразмерных единицах зависит от возраста Вселенной T. Но при космо логически большом возрасте Вселенной относительное изменение безразмерного заряда за время существования человека не велико. Поэтому допустимо использование и безразмерного значения элементарного электрического заряда в качестве эталона. Измеренное в специально выбранный **момент времени калибровки** $\mathrm{T} = T_0$ безразмерное значение заряда с известной точностью будет сохраняться в течении определённой эпохи и может быть экстраполировано на любой другой момент. Когда значение эталона, привязанное к старому моменту калибровки будет вызывать какие-то неудобства, можно провести новую калибровку эталона.

Но для **безусловного выполнения механических законов заряд простона** q **должен быть постоянной величиной**, для чего его можно выбрать в качестве единицы заряда, но практически более удобны, связанные с ним единицы энергии. Удобна система единиц, в которой **единицей энергии является рационализированная постоянная Планка**

$$\hbar = 2\pi\hbar/2\pi, \tag{3}$$

так как при этом угловая частота проволны в безразмерных единицах совпадает с её энергией

$$\mathcal{E} = \omega\,\hbar = f\,h \tag{4}$$

и единица энергии, является квантом момента импульса.

Используя (2.5), имеем из (1.2) и (2) следующее **безразмерное значение постоянной Планка** h

$$h = 2\pi\hbar = 2\pi c_R|k| = \frac{2\pi k_q^2}{\alpha_0 T^6}. \tag{5}$$

Фундаментальная размерная единица энергии $\hbar$ связана с c_R простым линейным соотношением

$$c_R = \frac{h}{2\pi|k|} = \frac{\hbar}{|k|}. \tag{6}$$

В таких единицах из (1.1)

$$m = m_n = c_R k^2 = |k|\hbar = 2\pi|k|\,h, \tag{7}$$

то есть $|k|$ является угловой **комптоновской частотой** стационарной волновой функции, представляющей нормон, то есть частотой волновой функции в сопутствующей ей системе. (8)

В размерных единицах все энергетические величины постоянны, а единицы интервала остаются безразмерными, сохраняя псевдоэвклидову метрику и расширение Вселенной.

4. Механический смысл k_μ для волновых функций. Так как $\mathcal{T}^\mu$ является локально ожидаемым 4-импульсом протистона, то в **статистическом смысле** его можно приравнять к полному 4-импульсу i-го метаболирующего простона данной стационарной волновой функции

$$\mathcal{T}^\mu \to P_i^\mu. \tag{1}$$

Тогда 4-вектор k^μ имеет смысл локально ожидаемого **4-импульса протистона в безразмерных единицах** (поскольку величина с размерностью q^2 делится на величину с размерностью q^2)

$$k^\mu = \pm\mathcal{T}^\mu/\hbar \to \pm P_i^\mu/\hbar. \tag{2}$$

Так как для квазиточечных частиц (в том числе простона), применимо понятие силы Лоренца, то **в поле внешнего электромагнитного потенциала** $A^\mu(x_i^\nu)$ (I.11.5.2.3)

$$\mathcal{T}^\mu \to P_i^\mu - q_i A^\mu(x_i^\nu) \tag{3}$$

и тогда

$$k^\mu = \pm\mathcal{T}^\mu/\hbar =\to \pm(P_i^\mu - q_i A^\mu(x_i^\nu))/\hbar. \tag{4}$$

Из (1.1) и (3.6) следует, что модуль k 4-вектора k^μ, в отличие от самого 4-вектора, является космологически постоянной величиной, имеющей смысл **частоты свободного нормона**.

5. Волновые функции вакуумных возмущений. В условиях нормальной гравитации единая волновая функция всюду статистически однородна и изотропна, представляя собой физический вакуум.

В силу однородности и изотропности вакуума его осреднённый по достаточно большим элементам объёма тензор плотности энергии-импульса в каждом таком элементе одинаков и инвариантен. Его плотность энергии является постоянным скаляром. Поэтому **волновую функцию нормального вакуума** в каждой точке можно представить как инвариантный шум.

Локальные возмущения единой волновой функции сами можно рассматривать как волновые функции. Причём их можно рассматривать как механические системы,

если наделять их подходящим тензором плотности энергии-импульса. Для этого можно использовать тот же квантовый лагранжиан (5.1.3), при локально волновых условиях.

Подчеркнём, что **хотя понятие постоянной Планка возникает начиная с уровня энергии нормона, оно применимо и на любых уровнях как универсальный коэффициент перехода от безразмерных единиц измерения 4-вектора k^μ к единицам измерения энергии**.

Если волновая функция возмущения финитна, то она должна быть нормирована на целое число нормонов, откуда следует **кратность заряда квантового возмущения вакуума величине** $q/3$, в частности волновой функции простого возмущения вакуума соответствует спектр заряда того же вида как и для нормона (3.6.6)

$$q_n = 0, \pm q/3, \pm 2q/3, \pm q. \tag{8}$$

6. Механическая форма уравнения КГФ. Из механической формы локально-волнового уравнения (3.10.5)

$$ik_R^\mu \nabla_\mu u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

следует нетривиальная **механическая форма уравнения КГФ** (2).

Действительно. Применяя к (1) оператор ∇^μ, получим, используя механическое условие $\nabla_\mu k_R^\mu = 0$,

$$ik_R^\mu \Box u + k^2 \nabla_\mu u = 0$$

или, с учётом $\nabla_\mu u = ik_\mu u$ (1.3.1), имеем

$$k_R^\mu \Box u + k^2 k^\mu u = 0$$

или, умножая на k_μ

$$\Box u + \frac{k^4}{k_R^\mu k_\mu} u = 0. \tag{2}$$

Используя пропорциональность функций u и ψ и обозначая

$$\frac{k^2}{\pm\sqrt{k_R^\mu k_\mu}} = \mu, \tag{3}$$

получаем искомое уравнение

$$\Box \psi + \mu^2 \psi = 0, \tag{4}$$

где,

$$\mu = \pm|\mu|, \quad \mu_{|k_R^\mu \to k^\mu} \to \pm k. \tag{5}$$

7. Потенциальная энергия в связанной квантовой системе. Из (6.4) для волновой функции любой i-той частицы, связанной в финитной квантовой системе имеем уравнение

$$\Box \psi_i = -\mu^2 \psi_i, \quad \mu = \pm|\mu|, \tag{1}$$

где согласно (4.2) волновой 4-вектор μ^μ, умноженый на постоянную Планка $\hbar$, имеет смысл **локального 4-импульса** волновой функции. Соответственно $\hbar\mu$ – **локальная масса**, $\hbar\mu^0$ – **локальная энергия**. В координатном виде в любой инерциальной системе имеем уравнение КГФ

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - \Delta\psi_i = -\mu^2\psi_i. \tag{2}$$

Если квантовая частица стационарна, то есть её локальная энергия

$$\mathcal{E}_0 = m_i = \hbar\mu^0 = \hbar\mu u^0 = \text{const} \tag{3}$$

постоянна (хотя не постоянны μ и u^0), то есть справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} = -\frac{m_i^2}{\hbar^2}\psi_i, \tag{4}$$

где m_i = const – масса частицы (её энергия в системе, сопутствующей центру инерции финитной системы) , то из (4) получим уравнение (2) в виде

$$\hbar^2\Delta\psi_i + \left(m_i^2 - \hbar^2\mu^2\right)\psi_i = 0. \tag{5}$$

Величина $\hbar\mu$ имеет смысл **локальной массы связанной квазиточечной квантовой частицы**, поэтому значение этой величины при $r \to \infty$ относится к **вакуумному состоянию частицы**, то есть к нормону, масса которого равна $m_n = \hbar\mu_\infty = \hbar k$. С квантовой точки зрения нормон, волновая функция которого – плоская волна (проволна) является **свободной квантовой частицей**, то есть **вакуумное состояние соответствует идеальному газу нормонов**. Все остальные частицы являются связанными состояниями нормонов и сами могут быть как связанными так и свободными, порождая иерархию **сложных частиц**. **Массой сложной частицы** является энергия её свободного состояния в сопутствующей ей (**собственной**) системе отсчёта.

Имеющую смысл локальной энергии квантовой частицы величину

$$U = \hbar\mu - \hbar\mu_\infty \leqslant 0, \quad \text{где } \mu = \pm|\mu| \tag{6}$$

назовём **потенциальной энергией** этой частицы в стационарной квантовой системе. (Не путать обозначение U с единым полем помогает контекст.)

Используя это понятие, уравнение (5) можно записать в виде

$$\hbar^2\Delta\psi_i + \left(m_i^2 - (U(\mathbf{r}) + m_n)^2\right)\psi_i = 0, \quad U_{|r\to\infty} \to -0, \tag{7}$$

где $m_n = \hbar\mu_\infty = \hbar k$ – масса нормона.

Это уравнение является **уравнением на собственныё значения массы** m_i частицы в связанной (финитной) стационарной замкнутой системе. Вид функции $U(\mathbf{r})$ определяется видом частицы и этой системы.

Определённое здесь понятие потенциальной энергии имеет тот же смысл, что и (I.9.6.7.10) и вообще потенциал, имеющий смысл энергии материальной точки как функции её координат. Обычно потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной, которую часто удобно выбирать так, что потенциал на бесконечном удалении равен нулю.

Не трудно видеть, что уравнение вида (7) можно построить не только относительно нормонов, но и относительно любых других квантовых частиц, имеющих свободные состояния с определённой массой m_∞ и связанные стационарные состояния с потенциальной энергией U, то есть **общее квантовое волновое уравнение на собственные значения массы** m можно записать в виде

$$\hbar^2\Delta\psi + \left(m^2 - (U(\mathbf{r}) + m_\infty)^2\right)\psi = 0, \quad U_{|r\to\infty} \to -0, \quad \mu = \pm|\mu|, \tag{8}$$

где m_∞ – локальная масса **метаболирующей частицы на бесконечности**, то есть масса свободной частицы. В связанном состоянии эта масса испытывает дефект. Среднее значение дефектной массы является её собственным значением согласно (8). Масса всей замкнутой связанной системы равна сумме собственных значений масс всех частиц этой системы.

Заметим, что нормон удовлетворяет уравнению (8) при $m = m_\infty = \hbar k$, $U = 0$, $\psi = \exp(ikt) = \mathrm{const}(\mathbf{r})$. (9)

8. Квази-точечные квантовые частицы. Многие частные случаи позволяют рассматривать финитную волновую функцию как материальную точку (**квази-точечную квантовую частицу**). При этом удобно использование волновых над-функций (4.6.*), то есть волновых функций над этими материальными точками, а не непосредственно над протистонами. Такие волновые над-функции имеют смысл плотности вероятности местоположения квази-точечной квантовой частицы. При этом особую роль в статистике простонов играют **стационарные волновые функции**.

Стационарные волновые функции, образуя полную систему, могут представлять единую волновую функцию как разложение по этой системе с определёнными коэффициентами, имеющими вероятностный смысл. Стационарные волновые функции с механической точки зрения являются свободными объектами, движущимися инерциально. То есть это кинематические объекты, которые можно рассматривать как **абсолютно твёрдые тела**. Динамика таких тел заключается лишь в переходах от одного представления единой волновой функции к другому, что заключается лишь в перераспределении вероятностей стационарных компонент, но не меняет их механических характеристик. При этом единая волновая функция испытывает динамические изменения, заключающиеся в перераспределении 4-импульса и вероятности местоположения простонов.

Свойства квази-точечных квантовых частиц достаточны для **аксиоматики классической квантовой теории**.

9. Связь локально-волнового уравнения с уравнением Дирака. Решения

уравнения КГФ вида

$$\Box\psi + \mu^2(x)\psi = 0 \qquad (1)$$

с одинаковым угловым моментом (спином) (в том числе полуцелым, дапускаемым двузнаковостью ψ [Нелипа, с. 35]) объединим в виде многокомпонентных (тензорных или спинорных) функций, для которых (обобщая) сохраним обоначение ψ.

В случае спина 1/2 это уравнение можно записать в форме уравнения Дирака [Ландау 4, с. 100]

$$(\gamma\hat{p} - \mu)\psi = 0, \qquad (2)$$

где

$\gamma = \gamma_\mu$ – матрицы Дирака (матричный 4-вектор) [Ландау 4, с. 13],

$\hat{p} = \hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ [Ландау 4, с. 53], (3)

подразумевается, что μ умножено на единичную матрицу,

ψ – 4-х-компонентная функция (биспинор [Нелипа, с. 26], дираковский спинор [Садбери, с. 411]).

$\psi(x)$ не является 4-вектором; вместе с тем эту функцию удобно рассматривать как вектор-столбец 4×1 при рассмотрении произведений с γ-матрицами. Здесь число 4 не связано с размерностью пространства-времени. Если бы пространство-время имело размерность $2n$, то спинор ψ имел бы 2^n компонент. [Садбери, с. 411]. Из уравнения Дирака следует уравнение КГФ. [Садбери, с. 411].

В более общем случае спина $n + \frac{1}{2}$, $\psi(x)$ может быть многокомпонентной функцией, являющейся одновременно как тензором ранга n так и Дираковским спинором. (Сравни с [Нелипа, с. 35]).

Выделяя постоянную составляющую μ_0 функции μ

$$\mu = \mu_0 + \tilde{\mu} \qquad (4)$$

и обозначая непостоянную часть (потенциальную массу, делённую на $\hbar$) в виде

$$\tilde{\mu} = E\tilde{\mu} = \gamma q A, \qquad (5)$$

где E – единичная матрица, уравнение (2) можно записать в виде

$$[\gamma(\hat{p} - qA) - \mu_0]\psi = 0. \qquad (6)$$

Это уравнение имеет форму уравнения Дирака для частицы во внешнем электромагнитном поле [Ландау 4, с. 144], [Нелипа, с. 110], где q – заряд частицы,

$A = A^\mu$ – 4-векторный потенциал внешнего поля.

Заметим, что если задано $\tilde{\mu}$, то выражение (5) представляет собой 4 однокомпонентных уравнения относительно 4-х неизвестных A^μ, то есть $\tilde{\mu}$ однозначно определяет величину A^μ, но заданному A^μ далеко не всегда соответствует какое-нибудь $\tilde{\mu}$, так как 4 уравнения относительно одного неизвестного, вообще говоря, не имеют решения.

Инвариантность уравнения Дирака при калибровочном преобразовании потенциалов электромагнитного поля выражается в том, что его вид остаётся

неизменным, если одновременно с преобразованием $A \to A + i\hat{\chi}$ (где χ – произвольная функция) преобразовать проволну согласно

$$\psi \to \psi e^{iq\chi}. \tag{7}$$

Для (дираковски) сопряжённого спинора $\bar{\psi}$ имеем уравнение [Нелипа, с. 28]

$$\bar{\psi}(\gamma\hat{p} + \mu) = 0 \tag{8}$$

или, с учётом (4)

$$\bar{\psi}[\gamma(\hat{p} + qA) + \mu_0] = 0. \tag{9}$$

§9. Разнообразие взаимодействий.

Все взаимодействия квантовых частиц сводятся к **доквантовому взаимодействию протистонов** посредством радионов (квизов и квапов). Однако статистическое понятие силы Лоренца позволяет абстрагироваться от подробностей электромагнитного поля и мировых линий протистонов и рассматривать все взаимодействия как обмен только квантовыми частицами в силовом электромагнитном поле, которое само можно представить метаболирующими квантовыми частицами (нормонами). Нормоны, являясь универсальными квантовыми частицами, позволяют конструировать любые материальные частицы, в том числе гравитоны, фотоны, лептоны, векторные бозоны, реализуя различные взаимодействия.

1. Знаки зарядов нормона. Согласно формуле (8.1.4):

$$P_n^\mu = \pm\hbar k^\mu, \tag{1}$$

проволна нормона характеризуется своим волновым 4-вектором k^μ, который с точностью до постоянного множителя $\pm\hbar$ имеет смысл 4-импульса P_n^μ нормона. Так как масса m_m и темп u^0 простона определены положительно, то знаки $\pm$ относятся к волновому 4-вектору k^μ проволны, отображая её двузнаковость. Нулевой электрический заряд нормона соответствует равновероятности в нём простонов обоих знаков электрического заряда. Электрический заряд нормона согласно (3.6.6), имеет 7 возможных в нормоне значений, знаки которых (в отличие от простона) не связаны однозначно со знаком частоты ω

$$q_n = (0, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 1)|q|. \tag{2}$$

Инверсия как электрического так и пара-заряда инвертирует знак компоненты $\omega = k^0$ 4-импульса, то есть формулу (1) можно записывать в более определённом виде

$$P_n^\mu = \frac{q_n q_{pn}}{|q_n q_{pn}|}\hbar k^\mu, \quad \omega = k^0 > 0 \quad q_n/|q_n|_{|q_n=0} = 1, \quad q_{pn} \neq 0, \tag{3}$$

где знак электрического заряда выбирается согласно условию $\omega = k^0 > 0$,

отрицательное значение пара-заряда q_{pn} сопоставим **анти-нормонам**, обозначение которых (как и других анти-частиц) будем помечать акцентом ˜ (тильда). Нормон (и другие частицы) с нулевым электрическим зарядом будем называть **нейтральным**. Паразаряд нормона не равен нулю. **Сложные частицы** характеризуются суммарным пара-зарядом их нормонов. У **истинно нейтральных частиц** (всегда сложных) нейтрализованы все квантовые числа, кроме массы. Согласно гэпу частоты (I.8.2.11.2), изменение знака паразаряда изменяет модуль массы нормона космологически мало.

2. Макроскопические проявления нормонов. Согласно (5.6.*) спин нормона имеет спектр $0,\ 1/2,\ 1$.

Так как нормон может иметь спин $1/2$ (в единицах $\hbar$), то при его ультрарелятивистской скорости свободного движения, проекция этого спина на направление движения (**спиральность** (I.9.5.12.2)) имеет два значения ($-1/2$ и $+1/2$). Поэтому **обмен** (поглощение и испускание) нормоном при изменении его спиральности можно рассматривать как поглощение или испускание фотона со спином 1. При этом разность 4-импульсов испускаемого и поглощаемого нормонов определяет 4-импульс фотона. В этом смысле нормоны являются переносчиками фотонов. Но концентрация нормонов во Вселенной равна концентрации протистонов, оценка которой даёт настолько гигантское значение, что все взаимодействия нормонов превращаются в огромные, но крайне кратковременные флуктуации вакуумного поля, существующие в форме **обмена квизами и квапами**.

Равновесные (вакуумные) нормоны имеют в среднем одинаковые энергии, поэтому вакуумный обмен нормонами является упругим, то есть в среднем не изменяет энергии любой квантовой системы.

Единственным макроскопическим проявлением нормонов являются вакуумные возмущения, являющиеся решениями уравнений гравитационного поля. В частности существуют стационарные решения, простейшим из которых является гравитон. Кроме того существуют гравитационные волны, распространяющиеся со скоростью света. Гравитоны оказываются на много порядков легче нормонов и формируют наблюдаемые частицы.

Среди наблюдаемых частиц наиболее лёгкими частицами, имеющими массу, являются нейтрино, благодаря электрической нейтральности и лёгкости которых, их паразаряд достаточно существен. Имея гэп, паразаряды нарушают вакуумное равновесие частиц и античастиц, что приводит к нарушениям CPT инвариантности [Ландау 4,(13,16)] (которая восстанавливается в масштабах CPT-симметричных эквариантов).

Электрический заряд симметричен по определению, а паразаряд определяет частотный и темповый гэп, то есть **паразаряд не симметричен по определению**. Отсюда следуют **нарушения симметрии слабого взаимодействия**.

3. Реакции квантовых частиц. Сближение двух (и более) стационарных волновых функций является возмущением для них всех, результатом которого может быть **переход** в совокупность новых стационарных состояний. Этот процесс

называется **реакцией**.

Так как центры инерции стационарных квантовых частиц, участвующих в реакции можно изобразить прямыми линиями, то для изображения реакций удобны **диаграммы Фейнмана**, являющиеся проекцией этих линий на плоскость с двумя координатными осями: времени и одной пространятвенной оси. Ясно, что линии диаграммы ограничены хотя бы с одной стороны точкой (или ограниченной областью), изображающей процесс реакции, то есть эти линии являются лучами или отрезками, соединяющими две реакции. Простейшая реакция изображается трёхлучевой диаграммой.

Возможность того или иного перехода между парой состояний определяется законами сохранения, а его вероятность P_{12} – скалярным произведением волновых функций до и после перехода, котророе имеет смысл взаимной вероятности **присутствия** состояний до и после перехода друг в друге (в смысле (I.8.1.1.*))

$$P_{12} = \int \psi_1^* \psi_2 \, dv. \tag{1}$$

4. Сильные взаимодействия квантовых частиц. Гравитон является основнымм стационарным состоянием звукового (гравитационного) возбуждения вакуума (равновесного состояния прогаза). Это свободное состояние существует, находясь в термодинамическом равновесии с реликтовым излучением, поэтому имеет соответствующую малую энергию покоя (массу).

Взаимодействие гравитонов друг с другом чрезвычайно маловероятно из-за их огромных размеров (порядка сантиметра) при локализации волновой функции в тончайшем сферическом слое. Но всё же существует ничтожная вероятность их перехода в тяжёлый гравитон (**тяжелон**), определяемый расщеплением волновой функции гравитона в две сферы, находящиеся в соприкосновении. Такой переход очень энергозатратный.

Если же эта крайне маловероятная реакция произошла, то тяжелону обеспечено долгое существование, так как обратная реакция ещё менее вероятна, поскольку расширение Вселенной её снижает (происходит **закалка частиц**).

Образовавшийся микроскопический **тяжелон** легко связывается с другими тяжелонами, образуя **фундаментальную частицу (фундон)**. Дробно заряженные фундоны связываются в очень сильно возбуждённые стационарные состояния – **адроны**. Устойчивость этим состояниям придаёт существование ещё одного сохраняющегося квантового числа – **цвета**, характеризующего нецелочисленность заряда состояния квантовой частицы. Цвет трёхмерен, что усложняет его нейтрализацию в адроне, повышая его устойчивость. Являясь 3-х-мерным аналогом электрических зарядов, цвет реализует **сильные взаимодействия**.

5. Переносчики взаимодействий. Переходам между различными стационарными состояниями инфра частиц, изменяющим спин на единицу (наиболее вероятным по **правилам отбора**), можно сопоставить свои частицы, (**переносчики взаимодействий**).

Переносчиками взаимодействий обычно называют векторные бозоны. Но в превращениях стационарных состояний друг в друга (**реакциях**) могут участвовать не только векторные бозоны. Существенно для **бозонов** то, что они имеют целый спин, отличающий их от **фермионов**, которые имеют полуцелый спин. При этом бозоны и фермионы имеют разные статистические свойства, не позволяющие одинаковым фермионам скапливаться в одном состоянии (**принцип Паули**) [Ландау 3, §61].

Газ простонов идеален, то есть термодинамически равновесен, однако в нём могут возникать относительно слабые возмущения в виде вещества и в виде волн плотности, распространяющихся со скоростями, близкими к релятивистскому пределу.

6. Массы частиц в релятивистской квантовой теории. В нерелятивистской теории масса является экспериментальной величиной, то есть её постоянным параметром. При этом волновая функция определяет лишь возможные параметры движения частицы в заданных полях, рассматривая её квазиточечной, внутренние свойства которой отражены в понятиях спина и зарядов. Такая теория не претендует на объяснение происхождения масс.

Для объяснения этого необходима релятивистская теория, где масса является модулем 4-импульса и, вообще говоря, может изменяться. А волновая функция описывает динамику движения независимо от системы координат. В ДФ существует универсальная почти точечная частица – простон, динамику которой (в том числе массу) определяет 4-х-мерная волновая функция (удовлетворяющая линейному локально-волновому уравнению), квадрат модуля которой имеет простой смысл плотности вероятности местоположения простона в 4-пространстве. Эта теория по простоте мало уступает нерелятивистской квантовой механике, но имеет перспективные следствия.

7. Ультра частицы. В разложении единой волновой функции по почти плоским ультра волнам (4.8.1) **каждая ультра волна представляет один свободный нормон**. Энергия покоя (масса) **свободного нормона, представляемого ультра волной** равна (8.3.7)

$$m_n = |k|\hbar. \tag{1}$$

При этом ультра волна локализует простон нормона с большой степенью неопределённости, то есть с неопределённостью по координатам в очень большое число раз больше, чем период волны. Причём, чем уже спектр волны, тем больше неопределённость координат, что называется **соотношением неопределённости** [Ландау 4, §16]. В этой связи поясним наше понимание **виртуальности**. Под **виртуальными** явлениями мы понимаем микроскопические явления, в которых наблюдаются отклонения от **нормальных** явлений, соответствующих точным механическим законам. Причём эти отклонения являются следствием применения статистического осреднения, свойственного квантовомеханическим представлениям и колличественно характеризуемым **соотношениями неопределённости** квантовой теории. Представление же единым полем точно, но не аналитично.

Индивидуальный (не метаболирующий) протистон можно представить его мировой линией. Но такое представление протистона имеет малую познавательную ценность, так как **не аналитично**, то есть не позволяет применить эффективные методы функционального анализа. Поэтому в квантовой механике основным объектом исследований являются метаболирующие простоны и их статистически **стационарные** состояния (**частицы**), описываемые стационарными волновыми функциями. Таким образом квантовая механика устанавливает взаимно однозначное соответствие между частицами и волновыми функциями. Поэтому и частицы и волновые функции одновременно и локальны и протяжённы в степени, определяемой волновой функцией. В этом заключается смысл понятия **квантово волнового дуализма волн и частиц**. При этом не следует забывать об **индивидуализме протистонов**, как точечных объектов дающих смысл понятию плотности вероятности их местоположения и, следовательно, самому понятию волновой функции.

Нормону соответствует плоская ультра волна, поэтому нормоны будем также называть **ультра частицами** из-за их крайне ультрарелятивистской скорости в реликтовой системе координат. Плоская волна не несёт информации о локализации простона, но может нести информацию о его 4-импульсе, если его сопоставить волновому вектору.

Волновая функция гравитона локализована гравитационным полем. Гравитон можно рассматривать как **сгусток (конденсат) метаболирующих нормонов**, связанный собственным гравитационным полем, который испаряет и снова захватывает нормон из окружающего прогаза. Обмен нормонов в силовом гравитационном поле сопровождается соответствующей **работой выхода**, что означает существование дефекта массы нормона внутри гравитона. То есть в среднем масса нормона, метаболирующего в гравитоне меньше массы свободного нормона. Квадрат модуля волновой функции гравитона определяет это среднее значение однозначно.

Волновая функция гравитона является элементарной финитной волновой функцией, которая имеет однозначное, то есть объективное, определение. Финитность плоских ультраволн лишь условная. Свободные нормоны ультра волны объективно локализовать нельзя, гравитоны же, хотя и нельзя локализовать точно, но можно локализовать с некоторой конечной статистической точностью.

Единственной причиной, препятствующей неограниченной гравитационной фрагментации сгустков нейтрального в среднем прогаза (**коллапсу**), является взаимная кинетическая энергия нормонов.

8. Инфра волны и инфра частицы. Суперпозиция ультра волн (реально – нормонов) с одинаковой по модулю (но не обязательно по знаку) частотой в некоторой инерциальной системе координат может образовать **финитную стационарную волновую функцию**, то есть волновую функцию, квадрат модуля которой интегрируем и постоянен во времени. Если эта инерциальная система координат движется в изначальной системе со скоростью много меньшей средней скорости нормонов, что оставляет ей возможность быть

ультрарелятивистской, то такую волновую функцию называем инфра волной. Соответствующий метаболирующий нормон, образует квантовую частицу, которую в этом случае будем называть **инфра частицей**. Систему координат, в которой эта волна стационарна, назовём **собственной (сопутствующей)** системой координат инфра волны (инфра частицы). Гравитон, определённый в реликтовой системе координат как нерелятивистская частица, является в этой системе координат инфрачастицей автоматически.

Напомним, что показательная форма плоских волн обеспечивает **аддитивность их волновых векторов**.

9. Обменный смысл дефекта массы. Любая связь механических систем означает незамкнутость каждой из них в отдельности от других. Это означает существование действующих на них сил (просто по определению понятия силы). Дефект массы связанной системы (частицы) относительно суммы масс её несвязанных частей является ничем иным как работой сил, связывающих эти части. Появление дефекта масс вызывает **изменение 4-импульса связанной частицы** относительно суммы 4-импульсов её частей. Это очевидно, если рассмотреть частицу в системе координат, сопутствующей её центру инерции. При этом 4-импульс имеет только одну отличную от нуля компоненту – энергию покоя (массу) и поэтому дефект массы не может не изменить 4-импульса. То есть **операция связывания частицы не возможна без изменения её 4-импульса, то есть без обмена 4-импульсом с окружающей средой**. То же самое можно сказать и об обратной во времени операции – **распаде частицы**.

Заметим, что обмен частицы 4-импульсом со средой может происходить и без изменения массы частицы. Этот случай называется **упругим взаимодействием (обменом)**, в отличие от **неупругого взаимодействия (обмена)**. В этом случае **понятие потенциальной энергии во внешней среде (в поле) эквивалентно понятию дефекта массы Δm, взятой с отрицательным знаком**. То есть согласно (I.9.6.7.8)

$$\mathcal{E}_\Pi = m_f - m = -\Delta m. \tag{1}$$

Понимание дефекта массы как результата обмена со средой допускает представление о дефекте массы единственного простона, то есть дефект массы простона с некоторым коэффициентом g, является результатом энергетического обмена между простоном и окружающей средой. Такое состояние простона с дефектной массой может описываться стационарной волновой функцией с некоторым стационарным потенциалом φ_r, который по смыслу совпадает с потенциалом $\mathcal{T}^0$

$$\varphi_r = \mathcal{T}^0 = \hbar\mu^0. \tag{2}$$

Для потенциала μ^0 решение известно из уравнения $\nabla_\mu\mu^\mu = 0$ (8.5.5) с точностью до постоянного коэффициента Q, зависящего от **вида обмена**:

$$\mu^0 = \frac{Q}{r}. \tag{3}$$

При этом могут существовать условия, ограничивающие область определения r как, например, для гравитона в физическом вакууме, где $r \geqslant r_g$ (7.3.4.10). Если известно значение g, то значение Q можно найти, решая квантовое волновое уравнение при известном m_m и известной энергии покоя (массе) gm_m основного (нижнего) уровня. При этом определится весь спектр стационарных волновых функций со всеми их квантовыми числами. Значение g задаётся некоторыми дополнительными условиями которые определяют **вид обмена**. Найденный таким образом потенциал будем называть **обменным потенциалом** данного вида.

При переходе частицы с одного энергетического уровня на другой её энергия изменяется на величину разности энергий этих уровней. В силу сохранения, эту энергию получает среда (или она из неё изымается). При этом происходит **обмен частицы 4-импульсом со средой**. Если переход происходит между **взаимно вырожденными уровнями**, то есть уровнями с одинаковыми энергиями покоя, то такой обмен является упругим. Вообще все виды изменения стационарного состояния частицы, описываемой волновой функцией называются **реакциями**, в которых участвует эта частица.

10. Наблюдаемость волновых функций. Вопрос существования любых волновых функций с математической точки зрения тривиален, так как решается только непротиворечивостью определений. С физической точки зрения он эквивалентен понятию **наблюдаемости** этих состояний, которое сводится к их статистике, то есть к вероятности этих состояний по отношению к другим состояниям. Очевидно плотность вероятности конкретных состояний может иметь точки сгущения в пространстве всех состояний. Математически это выражается в существовании экстремалей относительно вариаций, то есть – стационарных состояний. В конце концов вопрос сводится к лагранжеву формализму механики инерциальных (замкнутых) механических систем, существование которых определяет и их **наблюдаемость**.

11. Распределение импульсов и координат простонов в прогазе. Квантовые частицы, представляемые стационарными проволнами, имеют **вполне определённый 4-импульс**.

В общем релятивистском случае энергия простона имеет вид

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}. \tag{1}$$

В сугубо ультрарелятивистском случае, характерном для простонов прогаза **в реликтовой системе отсчёта**, $m^2 \ll P^2$ и выражение (1) можно записать в **виде, не зависимом от** m:

$$\mathcal{E} = |\mathbf{P}| = P. \tag{2}$$

Тогда, согласно [Ландау 5, (29,2)], **распределение вероятности различных значений импульсов простонов**, как частиц идеального газа, можно записать в виде [Ландау 5, (29,1)]

$$dw_{\mathbf{P}} = a\mathrm{e}^{-\mathcal{E}(\mathbf{P})/T^\circ} dP_x\, dP_y\, dP_z = a\mathrm{e}^{-P/T^\circ} dP_x\, dP_y\, dP_z, \tag{3}$$

где $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия простона как функция импульса,

P – абсолютная величина импульса.

a – множитель, нормирующий всё распределение на единичную вероятность,

T° – температура газа в единицах энергии,

Или в сферических координатах

$$dw_{\mathbf{p}} = a\mathrm{e}^{-P/T^\circ} P^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dP, \tag{4}$$

где ϑ и φ – полярный угол и азимут, определяющие направление импульса. Интегрируя по углам, найдём **распределение вероятностей для** P

$$dw_p = 4\pi a\mathrm{e}^{-P/T^\circ} P^2 \, dP.$$

Нормируя это распределение на 1, имеем условие для a:

$$\int\limits_0^\infty 4\pi a\mathrm{e}^{-P/T^\circ} P^2 \, dP = 1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{4\pi J},$$

где

$$J = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-P/T^\circ} P^2 \, dP = [\text{Прудников}, 2.3.3.2, \text{с.}322] = 2T^{\circ 3}.$$

И тогда

$$dw_p = \frac{1}{2T^{\circ 3}} \mathrm{e}^{-P/T^\circ} P^2 \, dP, \quad P \to \mathcal{E}. \tag{5}$$

Это распределение мы будем называть **ультра импульсным**.

Найдём среднее значение для модуля импульса (энергии) простона. Согласно определению средних значений [Ландау 5, (29,9)] из (5)

$$\bar{P} = \bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2T^{\circ 3}} \int\limits_0^\infty P^3 \mathrm{e}^{-P/T^\circ} \, dP = [\text{Прудников}, 2.3.3.2, \text{с.}322]$$

$$= \frac{1}{2T^{\circ 3}} 6T^{\circ 4} = 3T^\circ. \tag{6}$$

Найдём значения $P = P_{max}$ и $P = P_{min}$ в максимуме и минимуме распределения (5), приравнивая нулю его производную

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial P^2} = \frac{1}{2T^{\circ 3}} (2P - P^2/T^\circ) \mathrm{e}^{-P/T^\circ} = 0,$$

откуда

$$P_{max} = 2T^\circ, \quad P_{min} = 0, \infty. \tag{7}$$

Учитывая почти идеальность газа простонов, **плотность вероятности** $w_{\mathbf{x}}$ **местоположения простонов в зависимости от декартовых координат, пренебрегая её относительно малыми отклонениями на нормонах, можно представить как постоянную величину** (I.8.5.3.3)

$$w_{\mathbf{x}} = 2c_q = 2. \tag{8}$$

Так как $2c_q$ имеет смысл концентрации простонов, то $w_{\mathbf{x}}$ **нормировано на число простонов в единичном объёме**. Если элементарный объём dV достаточно мал, то вероятность нахождения в нём более одного простона является малой величиной более высокого порядка малости, чем вероятность нахождения в нём одного простона, поэтому

$$dw_{\mathbf{x}} = w_{\mathbf{x}}\, dV, \tag{9}$$

где $dw_{\mathbf{x}}$ – **вероятность нахождения одного простона в объёме** dV. Так как

$$P = mu^0, \tag{10}$$

то найденное равновесное распределение импульсов простонов не противоречит существованию стационарных метаболирующих систем (квантовых частиц), каждая из которых может иметь своё индивидуальное распределение энергии покоя (массы) по координатам, согласованное с распределением темпа u^0. При этом **как целое** частица может двигаться с произвольной скоростью и находится во **внешнем термодинамическом равновесии** с вакуумом, а через него и с другими частицами.

В силу аддитивности концентрации выражение (1.9) справедливо для нормонов, гравитонов и вообще для любых квантовых частиц, для которых его можно записать в виде

$$dw_{\mathbf{x}} = w_{\mathbf{x}}\, dV = \psi^\mu \psi^+_\mu\, dV, \tag{11}$$

где ψ^μ – соответствующая проволна. Это выражение просто соответствует смыслу квадрата модуля проволны.

Хотя нормоны являются состояниями движения простонов, прогаз и газ нормонов могут иметь равновесные распределения, но с очень разными температурами, так что простоны и нормоны друг с другом в равновесии не находятся. Такой случай возникает естественным образом ввиду того, что огромная разница в массе почти исключает обмен энергией между простонами и нормонами. Здесь ситуация аналогична "двухтемпературной"(для ионов и электронов) плазме [Ландау 10, (31.11)]. **Двухтемпературность прогаза и газа нормонов** объясняет практическую **ненаблюдаемость огромной температуры прогаза** с точки зрения наблюдателя, состоящего из квантовых частиц. Важно знать – **как в преобразованиях Лоренца преобразуется температура**. Из инвариантности уравнения волновой функции следует **инвариантность температуры**.

Масса протистонов весьма консервативна, то есть изменяется космологически медленно, но разные протистоны могут иметь разные массы. Однако, нормоны

обмениваются не в целом протистонами, а только отрезками их мировых линий, то есть простонами, причём обмен происходит согласно 7-ми значениям возможного заряда их проволн (3.6.6).

§10. Вычисление постоянной тонкой структуры.

1. Диэлектрическая проницаемость симметричной ультрарелятивистской плазмы. [08.09.11] В каком смысле следует понимать поляризацию плазмы и её диэлектрическую проницаемость? На микроскопическом уровне относительная диэлектрическая проницаемость плазмы равна, конечно, 1. Но возможно существование поляризации прогаза (как плазмы). В этом контексте прогаз естественно называть **проплазмой**. Её неустойчивость может формировать потенциальные ямы кулоновского вида, эквивалентные точечному заряду (простону), окружённому "шубой". Этот заряд можно рассматривать в сопутствующей протистону системе, вокруг которого образуется облако поляризованной им плазмы, **самосогласованное поле** которой [Ландау 10, §27] имеет кулоновский потенциал в пределах **дебаевского радиуса**, растущего вплоть до бесконечности при уменьшении частоты [Ландау 5, §78].

"При заданных зарядах проводников потенциал и напряжённость поля убывают в ε раз по сравнению с их значениями для поля в пустоте; это ослабление поля может быть наглядно истолковано как результат частичной экранировки заряда проводника поверхностными зарядами прилегающего к нему поляризованного диэлектрика"[Ландау 8, с.63].

На расстоянии до точечного заряда, много меньшем среднего расстояния между зарядами диэлектрика, участвующими в экранировке поля точечного заряда, это поле восстанавливается как до экранировки.

С ростом расстояния ослабленное диэлектриком в ε раз поле убывает практически по кулоновскому закону и лишь на достаточно большом расстоянии, определяемом **дебаевским радиусом** – это поле снижается по экспоненте [Ландау 5, с.266] (здесь рассмотрен потенциал φ_e **экранированного электрического заряда** $\mathrm{e} = q/\varepsilon$).

Диэлектрическая проницаемость ультрарелятивистской электронной плазмы рассмотрена в [Ландау 10, с.165, задача 3 (В.П. Силин, 1960)].

Согласно [Ландау 10, (31,11)] имеем продольную диэлектрическую проницаемость **равновесной (максвелловской) плазмы** для компоненты поля с **модулем** k (обозначение только для этого параграфа) **волнового 3-вектора**:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{T_e}}\right)+1\right] + \frac{1}{(ka_i)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{T_i}}\right)+1\right], \qquad (1)$$

где индексы e и i отличают величины, относящиеся к электронам и ионам,

T_e – температура электронного газа,

$$v_{T_e} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \tag{2}$$

– некоторая **средняя тепловая скорость электронов**,

$$a_e = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi N_e e^2}} \tag{3}$$

– **дебаевский радиус**, определённый по заряду и концентрации N_e электронов, ,

$$\Omega_e = \frac{v_{T_e}}{a_e} = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_e}} \tag{4}$$

– **плазменная** (или **ленгмюровская**) частота для электронов,

$F(x) \sim 1$ при $x \gg 1$, $F(x) \sim 0$ при $x \ll 1$ [Ландау 10, (31,5),(31,6)].

Нас интересует случай $\omega = 0, a_e = a_i = a$, $F(x) = 0$, соответствующий симметричной по зарядам плазме прогаза (**проплазме**). При этом **статическая** $(\omega = 0)$ продольная проницаемость

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{2}{(ka)^2}. \tag{5}$$

Эта величина вещественна, как и должно быть при $\omega = 0$ [Ландау 10, (28.9)].

Мы хотим узнать диэлектрическую проницаемость относительно постоянной во времени компоненты поля, создаваемого данным точечным зарядом. Потенциал этого поля ограничен в пространстве дебаевским радиусом $\sim a$, поэтому спектр волновых 3-векторов этого поля локализуется у значения порядка

$$k \sim 1/a. \tag{6}$$

Тогда

$$\varepsilon_l \sim 3. \tag{7}$$

Ниже мы уточним и осмыслим этот предварительный результат.

Из (6) видно, что **для постоянного поля, волновой вектор которого равен 0, дебаевский радиус бесконечен**. Но постоянное поле точечного заряда зависит от расстояния до него, поэтому разлагается на компоненты с разными значениями k.

2. Потенциал точечного электрического заряда в проплазме.

Рассмотрим выражение потенциала экранированного точечного заряда q в плазме [Ландау 5, (78,9)]:

$$\varphi_e = \frac{e}{r}\mathrm{e}^{-r/a}. \tag{1}$$

где a – дебаевский радиус проплазмы. **В пределах дебаевского радиуса** (но **не слишком близко к точечному заряду** q) потенциал φ_e эквивалентен потенциалу точечного заряда величины e, который меньше заряда q в число раз, равное продольной диэлектрической проницаемости ε_l прогаза на нулевой частоте.

3. Распределение потенциала φ_e по спектру k. Потенциал φ_e, хотя и происходит от потенциала точечного заряда в пустоте, является коллективным **самосогласованным** электрическим полем проплазмы в сопутствующей окрестности этого заряда [Ландау 5, §78],[Ландау 10, §27]. Поэтому он должен рассматриваться как осреднённая случайная величина. Это коллективное поле обеспечивает потенциалу φ_e продольную электрическую компоненту, которой нет у отдельных квизов и квапов. Без этой компоненты притяжение или отталкивание между протистонами не могло бы существовать, так как квизы и квапы не несут никакой информации о том – радиацией какого знака заряда они являются.

Разлагая функцию $\varphi_e(r)$ по системе плоских пространственных волн, найдём спектральную плотность распределения модулей волновых векторов этих волн. Нормируя интеграл от этой плотности на 1, придадим ей смысл спектральной плотности вероятности. Тогда можно расчитать средние значения любых функций от k, в том числе средние значение ε_l и её некоторых комбинаций. Здесь предполагается существование волн потенциала с пространственно подобным волновым вектором. Для установившегося статистически стационарного движения точечных зарядов это не противоречит никаким законам.

Применим к φ_e трёхмерное преобразование Фурье

$$S(k) = \int \varphi_e(r)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}}\,dv.$$

Выберем направление координатной оси $\vec{z}$ совпадающем с направлением волнового 3-вектора $\mathbf{k}$. Тогда в сферических координатах

$$S(k) = 4\pi e J,$$

где

$$J = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{e}^{-ikr\,\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,dr = \int\limits_0^\infty r\mathrm{e}^{-r/a} J_1\,dr,$$

$$k = |\mathbf{k}|, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

$$J_1 = \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-kr\,\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Сделаем замену

$$\cos\vartheta = x,\ -\sin\vartheta\,d\vartheta = dx,\ x_{|\vartheta=0} = 1,\ x_{|\vartheta=\pi} = -1,$$

тогда

$$J_1 = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-ikrx}\,dx = \frac{-1}{ikr}(\mathrm{e}^{-ikr} - \mathrm{e}^{ikr}),$$

$$J = \frac{-1}{ik}(J_2 - J_3),$$

где

$$J_2 = \int\limits_0^{\infty} r\mathrm{e}^{(-\frac{1}{a}-ik)r}\,dr, \quad J_3 = J_2^*.$$

Согласно [Прудников, 2.3.3.1, с.322, $\alpha = 2$]

$$J_2 = \frac{\Gamma(2)}{(\frac{1}{a}+ik)^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} - k^2 + \frac{2k}{a}i},$$

$$J_3 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} - k^2 - \frac{2k}{a}i},$$

тогда

$$J = \frac{-1}{ik}\frac{-\frac{4k}{a}i}{(\frac{1}{a^2}-k^2)^2 + \frac{4k^2}{a^2}} = \frac{4}{a(\frac{1}{a^4} + \frac{2k^2}{a^2} + k^4)} = \frac{4}{a(\frac{1}{a^2}+k^2)^2}.$$

И получаем положительно определйнную функцию

$$S(k) = \frac{16\pi e}{a(\frac{1}{a^2}+k^2)^2}, \tag{1}$$

которая даёт распределение значений k в разложении потенциала φ_e по пространственным волнам и может быть нормирована как плотность вероятности этих значений. Найдём соответствующую норму

$$N = \int\limits_0^{\infty} S(k)\,dk = \frac{16\pi e}{a}\,J_n,$$

где

$$J_n = \int\limits_0^{\infty} \frac{dk}{(\frac{1}{a^2}+k^2)^2} = [\text{Прудников, 2.2.3.6, с.295}]$$

$$= \frac{\pi}{2}a^3\frac{1!!}{2!!} = \frac{\pi}{4}a^3,$$

$$N = \frac{16\pi e \cdot \pi a^3}{a\cdot 4} = 4\pi^2 e a^2. \tag{2}$$

Нормированное выражение для $S(k)$:

$$w = \frac{S(k)}{N} = \frac{16\pi e\cdot 1}{a(\frac{1}{a^2}+k^2)^2\cdot 4\pi^2 e a^2} = \frac{4}{\pi a^3(\frac{1}{a^2}+k^2)^2} = \frac{4a}{\pi(1+(ka)^2)^2}. \tag{3}$$

Тогда среднее значение k:

$$\langle k\rangle = \int\limits_0^\infty wk\,dk = \frac{4}{\pi a^3}\,J_4,$$

где

$$J_4 = \int\limits_0^\infty \frac{k\,dk}{(\frac{1}{a^2}+k^2)^2} = \frac{-1}{2(\frac{1}{a^2}+k^2)}\Big|_0^\infty = \frac{a^2}{2},$$

тогда

$$\langle k\rangle = \frac{4}{\pi a^3}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{2}{\pi a} = 0,636619772/a,$$

Заметим, что если усреднять k^2, то получим

$$\langle k^2\rangle = \frac{4}{\pi a^3}J_5,$$

где

$$J_5 = \int\limits_0^\infty \frac{k^2\,dk}{(\frac{1}{a^2}+k^2)^2} = [\text{Прудников, 1.2.10.21}]$$

$$= \left(\frac{-k}{2(\frac{1}{a^2}+k^2)} + \frac{a}{2}\operatorname{arc\,tg} ka\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi a}{4},$$

тогда

$$\langle k^2\rangle = \frac{4}{\pi a^3}\cdot\frac{\pi a}{4} = \frac{1}{a^2},$$

Полученные средние значения

$$\langle ka\rangle = \frac{2}{\pi} = 0,636619772, \tag{4}$$

$$\langle (ka)^2\rangle = 1 \tag{5}$$

позволяют найти дисперсию величины ka [Корн, (18.3-9)]

$$\sigma^2 = \langle (ka)^2\rangle - \langle ka\rangle^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2} = 0,594715265,$$

то есть среднеквадратичное отклонение величины ka от её спектрального среднего равно

$$\sigma(ka) = 0,771177843. \tag{6}$$

4. Распределение вероятностей значений величины ε_l. Найдём это распределение в смысле спектральной (по k) плотности вероятности. Согласно [Корн, (18.5-2), с.559] распределение w_ε значений ε_l равно

$$w_\varepsilon(Y) = w_x(x(Y)) \left|\frac{dx}{dy}\right|_{y=Y} \qquad (1)$$

для всех значений Y величины $y = \varepsilon_l$, при которых производная dx/dy существует и непрерывна. При этом, если функция $x(y)$ многозначна, то

$$w_\varepsilon(Y) = w_1(Y) + w_2(Y) + \ldots, \qquad (2)$$

где w_x – распределение значений величины $x = k$,

$x(Y)$ – величина k как функция от Y,

$w_1(Y), w_2(Y), \ldots$ – распределения, получаемые из формулы (1) для соответствующих однозначных ветвей $x_1(y), x_2(y), \ldots$ функции $x(y)$.

Так как $k > 0$, то из (1.5)

$$x = k = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\varepsilon_l - 1}}, \quad \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{a\sqrt{2}\ (\varepsilon_l - 1)^{3/2}}, \quad \varepsilon_l \geqslant 1. \qquad (3)$$

И тогда распределение w_ε имеет вид

$$w_\varepsilon = \frac{1}{a\sqrt{2}(\varepsilon_l - 1)^{3/2}} w_x(x(\varepsilon_l)). \qquad (4)$$

Взяв w_x из (3.3), имеем распределение значений ε:

$$w_\varepsilon = \frac{1}{a\sqrt{2}(\varepsilon_l - 1)^{3/2}} \frac{4}{\pi a^3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2(\varepsilon_l - 1)}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(\varepsilon_l - 1)^{3/2}(1 + \frac{2}{\varepsilon_l - 1})^2}. \qquad (5)$$

5. Средние от комбинаций ε_l. Вычислим среднее значение случайной величины $\varepsilon_l - 1$:

$$\overline{\varepsilon_l - 1} = \int\limits_1^\infty (\varepsilon_l - 1) w_\varepsilon d\varepsilon_l.$$

Сделаем замену переменной

$$1/\sqrt{\varepsilon_l - 1} = x,\ d\varepsilon_l = \frac{-2}{x^3} dx,\ x_{|\varepsilon_l = 1} = \infty,\ x_{|\varepsilon_l = \infty} = 0,$$

тогда

$$\overline{\varepsilon_l - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2 \left(1 + 2x^2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2 \left(\frac{1}{2} + x^2\right)^2} =$$

$$[\text{Прудников, 1.2.11.15, с.43, } a = 1/\sqrt{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-\frac{4}{x} - \frac{2x}{\frac{1}{2}+x^2} - 6\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}\,x)\right]\Big|_0^\infty = \infty. \tag{1}$$

Исходя из того же распределения, найдём

$$\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon_l} w_\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+1/2)^2}.$$

Это среднее имеет важное значение, так как определяет среднее значение экранированного заряда протистона

$$e = \left\langle\frac{q}{\varepsilon_l}\right\rangle. \tag{2}$$

Сделаем замену

$$x^2 = z, \quad dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}},$$

тогда

$$\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}J,$$

где

$$J = \int_0^\infty \frac{\sqrt{z}\,dz}{(z+1)(z+1/2)^2} =$$

$$[\text{Прудников, 2.2.6.24}, \alpha = \tfrac{3}{2}, \varrho = 1, \lambda = 2, y = 1, z = \tfrac{1}{2}, \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2]$$

$$= 4B(3/2,3/2)\ {}_2F_1(3/2,2;3;-1) = 4\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}\ {}_2F_1(3/2,2;3;-1) =$$

$$[\text{Прудников 3, 7.3.2.211}]$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+1}}(1+\sqrt{1+1})^{-2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2},$$

и получим

$$\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{5,828}. \tag{3}$$

Исходя из того же распределения, найдём

$$\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l^2}\right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon_l^2} w_\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+1/2)^2}.$$

Сделаем замену

$$x^2 = z, \quad dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}},$$

тогда

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon_l^2} \right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} J,$$

где

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{z^{3/2}\,dz}{(z+1)^2(z+1/2)^2} =$$

$$[\text{Прудников, 2.2.6.24}, \alpha = \tfrac{5}{2}, \varrho = 2, \lambda = 2, y = 1, z = \tfrac{1}{2}, \Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4]$$

$$= 4B(5/2, 3/2)\ {}_2F_1(5/2, 2; 4; -1) = 4\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}\ {}_2F_1(5/2, 2; 4; -1) =$$

$$[\text{Прудников 3, 7.3.2.256}]$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{1+1}}(1+\sqrt{1+1})^{-3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^3},$$

и получим

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon_l^2} \right\rangle = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^3} = \frac{1}{14,071}, \quad \left\langle \frac{1}{\varepsilon_l^2} \right\rangle^{1/2} = \frac{1}{3,751}. \tag{4}$$

Для среднего квадрата заряда, определяющего энергетические свойства заряда, надо применять именно это значение.

Исходя из того же распределения, найдём

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon_l - 1} \right\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varepsilon_l - 1} w_\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1/2)^2} =$$

$$[\text{Прудников, 1.2.10.22}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{x}{2(x^2+1/2)} + \operatorname{arc\,tg} 2x\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Исходя из того же распределения, найдём

$$\left\langle \frac{1}{(\varepsilon_l - 1)^2} \right\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(\varepsilon_l - 1)^2} w_\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(x^2+1/2)^2} \to \infty. \tag{6}$$

Заметим, что все эти же средние значения можно было бы найти, исходя прямо из распределения k.

6. Эффективное значение экранированного заряда.

Поскольку нам известно распределение спектральной (по модулям волновых векторов) плотности экранированного заряда, то мы можем вычислить его среднее значение e_1. При этом, так как **энергетические характеристики заряда зависят**

от его квадрата, то интерес представляет и средний квадрат этого заряда, корень из которого отличается от среднего значения, поэтому обозначим их по-разному

$$e_1 = \left\langle q\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle = q\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle, \qquad (1)$$

– **среднее значение экранированного заряда**,

$$e_2 = \left\langle q^2\frac{1}{\varepsilon_l^2}\right\rangle^{1/2} = q\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l^2}\right\rangle^{1/2}. \qquad (2)$$

– **средне-квадратичное значение экранированного заряда**.

Измерение элементарного заряда e_1 сводится к измерению его взаимодействия с полем φ, которое само пропорционально этому заряду, то есть измеряется не первая степень, а квадрат некоторой величины e, пропорциональной e_1:

$$e^2 \sim e_1\varphi,$$

но значение φ само определяется через взаимодействие заряда с полем, то есть через значение квадратного корня из e_1^2, а следовательно через e_2, тогда e можно определить в виде

$$e^2 = e_1e_2 = q^2/\varepsilon^2, \qquad (3)$$

где e – назовём **эффективным значением экранированного заряда**, квадрат которого даёт те же значения его энергетических характеристик, что и произведение e_1e_2,

ε – **эффективная статическая диэлектрическая проницаемость проплазмы**, для которой из (1),(2),(3) следует

$$\frac{1}{\varepsilon} = \left\langle\frac{1}{\varepsilon_l}\right\rangle^{1/2}\left\langle\frac{1}{\varepsilon_l^2}\right\rangle^{1/4} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{2})^{3/4}} = 1/4,675566438. \qquad (4)$$

На малых по сравнению с $N^{1/3}$ (где N – концентрация прогаза) расстояниях до точечного заряда, значение ε стремится к 1. Поэтому поле на этих расстояниях гораздо сильнее, а взаимодействие заряда с самим собой вполне описывается значением q.

Плазму простонов (проплазму) мы выше рассмотрели с точки зрения её диэлектрической проницаемости и дебаевского радиуса. Но взаимодействие заряда с самим собой от этой плазмы не зависит, то есть вполне описывается зарядом q.

7. Значение постоянной тонкой структуры. [23.09.2011] Тогда из (8.1.10), с точностью не лучшей, чем для α_0, находим

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\varepsilon^2 \approx 6,1\varepsilon^2 = 133,4, \qquad (1)$$

что на 3% меньше экспериментального значения $137,036$.

Полагая экспериментальное значение α вычисленным на лучшей аналоговой вычислительной машине – самой Природе, мы можем найти с хорошей точностью значение α_0 (которое должно подтверждаться прямым цифровым вычислением по (2.5.3.1)). То есть имеем

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha\varepsilon^2} = \frac{137,035999}{4,675566438^2} = 6,268537166, \quad \alpha_0 = 0,159526852. \tag{2}$$

Полученное здесь значение α_0 даёт хороший способ проверки правильности вычисления ε, так как уточнение значения α_0, вычисленного по формуле (2.5.3.1) методом Монте-Карло с низкой точностью, не должно противоречить значению (2) при повышении точности вычисления.

Таким образом, с использованием (1),(2) и (2.5.3.4), постоянная тонкой структуры выражается в виде математической константы:

$$\alpha = \alpha_0/\varepsilon^2, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon = (1+\sqrt{2})^{7/4}, \tag{4}$$

$$\alpha_0 = \pi \frac{\int\limits_0^\infty \omega \int\limits_0^\pi J^2\, d\vartheta\, d\omega}{(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi J^2\, d\vartheta\, d\omega)^2}, \tag{5}$$

$$J(\theta,\omega) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2\sin\vartheta\cos(\omega\tau(x))\, dx}{(\operatorname{ch}(x-\pi/2) - \operatorname{sh}(x-\pi/2)\ \cos\vartheta)^2},$$

$$\tau(x) = \int\limits_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{ch}(x-\pi/2)}{\sin x}\, dx.$$

Осцилляции подинтегрального выражения затрудняют вычисление интегралов с хорошей точностью, а способ их аналитического вычисления автору не известен.

§11. Квантование электромагнитного поля.

1. Квантование электромагнитного взаимодействия поля с веществом.

Основываясь на понятии волновой функции, мы теперь имеем возможность использовать многие квантовомеханические понятия, однако, остаётся вопрос о квантовании электромагнитного поля. Само электромагнитное поле в классическом понимании, очевидно, не даёт никаких оснований для квантования. Частицы вещества же представимы стационарными состояниями, энергия которых квантуется. Каждое стационарное состояние характеризуется постоянной во времени

плотностью электрического 4-тока и поэтому не излучает электромагнитных волн (кроме шумового поля, сглаженного в статистическом подходе). Однако, суперпозиция хотя бы двух стационарных состояний с разной энергией (если они не разнесены пространственно) характеризуется осциллирующей плотностью 4-тока и поэтому излучает. При этом частота осцилляций тока для пары состояний равна разности их собственных частот $(\omega_2 - \omega_1)$ (**частота перехода**).

Согласно теории возмущений (см., например [Левич, §56]) переходы между двумя стационарными (точнее, квазистационарными) состояниями происходят под действием возмущения, осциллирующего с частотой перехода (явление **резонанса**). **Переходы не происходят мгновенно**, поэтому в процессе перехода частица одновременно находится в суперпозиции хотя бы двух стационарных состояний (это, при ненулевой частоте перехода, не стационарное состояние) и поэтому её 4-ток осциллирует на частоте перехода и она на этой частоте излучает или поглощает.

Если в результате перехода энергия состояния увеличивается ($\mathcal{E}_2 = \hbar\omega_2 > \mathcal{E}_1 = \hbar\omega_1$), то, по закону сохранения, энергия возмущающего поля должна уменьшиться. Это происходит в форме **деструктивной интерференции** возмущающего поля и поля излучённого переходом, то есть возникает **тень перехода**, уменьшающая энергию поля возмущения. Если переход произошёл сверху вниз (по значению энергии), то энергия внешнего поля, наоборот, пополняется излучением перехода, причём в той же фазе и на частоте перехода (**лазерный эффект**). Переходы вверх и вниз под действием внешнего статистически неравновесного поля называются **вынужденными** (вынужденные поглощение и излучение).

Так как мировой электромагнитный шум содержит широкий спектр электромагнитных волн, то в нём всегда имеются компоненты, резонансные с любым переходом, которые вызывают так называемое **спонтанное излучение или поглощение** (**спонтанные переходы**). Такие переходы происходят и вниз и вверх равновероятно (**виртуальные переходы.**)

Высокоэнергичные переходы вверх маловероятны, поэтому практически всегда вынужденны, переходы же вниз всегда обеспечены энергией предшествующего перехода вверх, поэтому могут быть как вынужденными так и спонтанными.

Существенно, что вынужденный переход может происходить при любой амплитуде возмущающего поля, лишь бы возмущение было на резонансной частоте перехода. От амплитуды возмущающего поля зависит лишь время (обратнопропорциональное вероятности) перехода. Из энергетических соображений ясно, что при меньшей амплитуде возмущения переход произойдёт медленнее, так как, чтобы накопить достаточную энергию для перехода, интерференция со слабым полем должна длиться дольше (для переходов вверх). Это хорошо объясняет независимость частотного порога фотоэффекта от амплитуды.

Процессы излучения и поглощения аналогичны друг другу, отличаясь направлением во времени. Непонимание этого иногда возникает из-за условности понятия силы Лоренца (5.1.2.6). И излучение и поглощение можно рассматривать однообразно как результат конструктивной или деструктивной интерференции

радиации, связанной с переходом между стационарными состояниями системы простонов и внешнего поля, что приводит к обмену 4-импульсом между этой системой и полем. При этом, поскольку скорость перехода, то есть накопления или потери энергии пропорциональна интенсивности внешнего поля, то вероятность достичь энергии достаточной для перехода в другое стационарное состояние (пока сохраняется подходящая фаза) тем выше, чем интенсивнее поле, но отлична от нуля даже для самого слабого поля, если только достаточно времени когерентного взаимодействия.

2. Абстрактный фотон. Согласно теории возмущений, (см., например [Левич, §56]) переходы между двумя стационарными (точнее, квазистационарными) состояниями волновой функции системы вероятны лишь в малой окрестности резонансной частоты ω_r возмущающего поля, определяемой разностью энергий этих состояний

$$\Delta\omega_r = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar}. \qquad (1)$$

Это касается любых комбинаций переходов между состояниями дискретного и непрерывного спектров, то есть как связанных так и свободных состояний, например, внутриатомных переходов, фотоэффекта, эффекта Комптона и других. При этом поле обменивается с системой волновым пакетом со средней частотой ω_r, который мы будем называть **фотоном**. То есть фотон либо **конструктивно интерферирует** с внешним полем, увеличивая энергию последнего (**подпитывая его**), либо **деструктивно интерферирует**, уменьшая эту энергию (**затеняя внешнее поле**). Соответственно переход системы происходит либо в нижнее (по энергии) состояние, либо в верхнее. Такая **когерентная** интерференция возможна только при достаточной близости частоты пакета частоте ω_r. Фотон имеет энергию $\mathcal{E}_f$, связанную с частотой ω_r условием

$$\mathcal{E}_f = \hbar\omega_r. \qquad (2)$$

Это следует просто из закона сохранения энергии в переходе. Таким образом фотоны существуют лишь постольку, поскольку существуют пары возможных стационарных состояний квантовомеханических систем простонов, переходы между которыми, согласно закону сохранения 4-импульса, означают обмен 4-импульсом с электромагнитным полем. При этом поле вовсе не обязательно рассматривать состоящим из фотонов, которые представляют собой весьма различные компоненты поля при разных переходах.

“Переход из начального в конечное состояние не совершается скачком, а разыгрывается во времени” [Левич 2, §56]. Чем меньше длительность перехода, тем шире спектр обмениваемого фотона. Таким образом фотон не имеет строго определённую частоту. Однако, вполне определённой является его средняя частота, которую мы обычно и будем называть **частотой фотона**. Из спектрального анализа известно, что чем шире координатное представление функции, тем уже её спектральное представление и наоборот. В этом смысл **соотношения**

неопределённостей для локализации фотона. Вообще, локализация фотона может быть определена лишь статистически. Достаточно локализованный в пространстве или спектрально фотон мы будем называть **координатно** или **спектрально локализованным**. Строго спектрально локализованный фотон является плоской электромагнитной волной, **нелокальной** в 4-пространстве, что не мешает его использованию (и вообще плоских волн) в анализе поля. Высокая степень спектральной локализации фотонов (и других частиц) при близости их 4-импульсов допускает их корреляцию (**запутанность, entanglement**) на больших расстояниях.

Хотя реальные фотоны являются вполне определёнными компонентами электромагнитного поля, статистические методы исследования отвлекаются от этой определённости и интересуются обычно 4-импульсом фотона (и иногда его фазой, поляризацией (спином)), то есть имеют дело с **абстрактным фотоном**. При этом всякое электромагнитное поле можно разложить по фотонам бесконечным числом способов. В том числе отдельный квиз или квап можно разложить на фотоны. Заметим, что из квизов и квапов (беря их с подходящим статистическим весом) можно синтезировать (в статистическом смысле) любую волну, в том числе монохроматическую, которая удобна для **абстрактного представления фотонов**.

Квантовый (фотонный) характер взаимодействия поля с веществом приводит к определённому статистическому закону распределения фотонов по энергиям для равновесного (теплового) излучения при данной температуре [Ландау 5, (54.2)], откуда, с учётом связи частоты спектрально локализованного фотона с его энергией, получается планковский закон распределения энергии по частоте [Ландау, с. 205, 206]. Этот закон действителен и для координатно локализованного фотона в смысле распределения его спектральных компонент, так как электромагнитное поле едино, а фотоны из него выделяются только процессами радиации. В распределении Планка $d\omega$ можно везде заменить на $d\mathcal{E}/\hbar$.

Согласно закону сохранения момента импульса, спин фотона определяется разностью спинов состояний, между которыми происходит обмен этим фотоном. Так как электромагнитное поле фотона определяется 4-векторным потенциалом, а спиновый момент зависит только от тензорного вида поля, то спин фотона (5.6.1)

$$s_\gamma = \hbar, \tag{3}$$

а спин $\hbar/2$ исключается, так как электромагнитное поле не определено как двузнаковое и поэтому не имеет спинорного представления.

3. 4-потенциал электромагнитного поля как волновая функция фотона. Понятие **волновой функции** (аналогичное волновой функции простона) можно ввести и для квантов электромагнитного поля (**фотонов**) в виде 4-потенциала электромагнитного поля A^μ. Он является статистической характеристикой фотонов в том смысле, что квадрат его модуля пропорционален плотности вероятности местоположения фотона. Эта пропорциональность следует из того, что электрическое и магнитное поля ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) пропорциональны 4-потенциалу A^μ, а плотность потока энергии электромагнитного поля пропорциональна как $\mathbf{E}$ так и

$\mathbf{H}$, то есть она пропорциональна квадрату модуля 4-вектора A^μ. А так как фотон представляется порцией энергии, то его локализация определяется локализацией этой энергии, то есть её плотностью. В условиях, когда любая электромагнитная волна является компонентой всеобщего протошума, понятие локализации фотона при его распространении может иметь только статистический смысл, хотя локализация фотона при его радиации (излучении или поглощении) более определённа.

Частота возмущений волновой функции простона определяется частотой потенциала электромагнитного поля, поэтому, согласно закону сохранения энергии, связь частоты волновой функции с энергией простона должна быть такой же как и связь частоты электромагнитного потенциала фотона с его энергией. То есть в обоих случаях энергия пропорциональна круговой частоте с коэффициентом $\hbar$:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega. \tag{1}$$

Для этого мы уже отождествили величины $\hbar_0$ и $\hbar$ (8.1.9). Учёт постоянной диэлектрической проницаемости среды при этом излишен, так как на частоту волн она не влияет. Но при наличие взаимного движения источника волн и приёмника важно не забывать об эффекте Доплера, а в гравитационном поле может быть существенно гравитационное смещение частоты переходов.

Кинетическую энергию $\mathcal{E}_k$ спектрально локализованного фотона (имеющего темп $u^0 \to |\mathbf{u}| \to \infty$) согласно (I.9.6.7.6) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_k = mu^0 = \mathcal{E} = |\mathbf{P}|, \quad v = \mathrm{C} \to 1, \quad m \to 0. \tag{2}$$

Финитной нормированной суперпозиции спектрально локализованных фотонов соответствует координатно локализованный фотон, для которого соотношение неопределённости допускает отклонение массы от 0.

4. Частотная плотность вероятности фотона в равновесном тепловом излучении с температурой T°. Воспользуемся известными статистическими свойствами квантованного равновесного теплового излучения. Число фотонов в таком (**чёрном**) излучении (радиации) в данном интервале частот $d\omega$ в объёме V [Ландау 5, с. 206]

$$dN_\omega = \frac{V}{\pi^2}\frac{\omega^2\,d\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1}, \tag{1}$$

где k_B - постоянная Больцмана.

Величине $dN_\omega/d\omega$ можно придать смысл даже в том случае, если фотон не имеет определённой частоты, то есть если его спектр широкий (пространственно локализованный фотон). Можно говорить даже о **распределении одного фотона по спектру**.

Плотность энергии излучения W_ω на частоте ω очевидно равна

$$W_\omega = \frac{\hbar\omega}{V}\frac{dN_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1)}. \tag{2}$$

Асимптотически при $\omega \to 0$

$$W_\omega = \frac{k_B}{\pi^2}\omega^2 T^\circ. \tag{3}$$

Нормируя $dN_\omega/d\omega$ на 1, получим частотную плотность вероятности того, что произвольный фотон имеет частоту ω

$$w(\omega) = A\,\frac{\partial N_\omega}{\partial \omega}, \tag{4}$$

где A - нормировочный коэффициент, определяемый условием

$$\int\limits_0^\infty w(\omega)\,d\omega = 1, \tag{5}$$

то есть

$$A = 1/\int\limits_0^\infty \frac{\partial N_\omega}{\partial \omega}\,d\omega = 1/J, \tag{6}$$

где

$$J = \frac{V}{\pi^2} J_1, \tag{7}$$

$$J_1 = \int\limits_0^\infty \frac{\omega^2\,d\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1} = \tag{8}$$

$$= \frac{k_B^3 T^{\circ 3}}{\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \qquad \text{[Прудников, 2.3.14.6, с. 341]}$$

$$= \frac{k_B^3 T^{\circ 3}}{\hbar^3}\Gamma(3)\zeta(3).$$

Так как $\quad \Gamma(3) = 2! = 2, \quad$ [Прудников, с. 773]

$$\zeta(3) = \qquad \text{[Прудников, с. 776]}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} = 1,20205690\ldots, \quad \text{[Прудников, 5.1.2.2 с. 651]}, \tag{9}$$

то

$$J_1 = \frac{2k_B^3 T^{\circ 3}\,\zeta(3)}{\hbar^3},$$

$$J = \frac{2V\,k_B^3 T^{\circ 3}\,\zeta(3)}{\pi^2\hbar^3},$$

$$A = \frac{\pi^2\hbar^3}{2V\,k_B^3 T^{\circ 3}\,\zeta(3)}. \tag{10}$$

5. Средние характеристики фотонов в тепловом равновесии. Теперь среднюю энергию фотона можно найти по формуле

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \int_0^\infty \hbar\omega\, w(\omega)\, d\omega = A\hbar \int_0^\infty \omega\, \frac{\partial N_\omega}{\partial\omega}\, d\omega = \frac{V}{\pi^2} A\hbar J_2, \tag{1}$$

где

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1} = \frac{k_B^4 T^{\circ 4}}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \quad \text{[Прудников, 2.3.14.6 с. 341]}$$

$$= \frac{k_B^4 T^{\circ 4}}{\hbar^4} \Gamma(4)\zeta(4).$$

Так как $\Gamma(4) = 3! = 6$, [Прудников, с. 773]

$$\zeta(4) = \quad \text{[Прудников, с. 776]}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \text{[Прудников, 5.1.2.2 с. 651]}, \tag{2}$$

то

$$J_2 = \frac{\pi^4 k_B^4 T^{\circ 4}}{15\hbar^4},$$

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{V}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2\hbar^3}{2V\, k_B^3 T^{\circ 3}\, \zeta(3)} \cdot \hbar \cdot \frac{\pi^4 k_B^4 T^{\circ 4}}{15\hbar^4} = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} k_B T^\circ = 2,70117804\ldots k_B T^\circ, \tag{3}$$

(сравните с [Ландау 5, с. 208,209]). Ниже нам пригодится выражение для $w(\omega)$

$$w(\omega) = A\frac{\partial N_\omega}{\partial\omega} = \frac{\pi^2\hbar^3}{2V k_B^3 T^{\circ 3}\zeta(3)} \cdot \frac{V\omega^2}{\pi^2(e^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1)} =$$

$$= \frac{\hbar^3\omega^2}{2k_B^3\zeta(3) T^{\circ 3}(e^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1)}. \tag{4}$$

Интегрируя (4.2), имеем в данном объёме V число фотонов

$$N = \int_0^\infty \frac{\partial N_\omega}{\partial\omega}\, d\omega = \int_0^\infty \frac{w(\omega)}{A}\, d\omega = \frac{1}{A}\int_0^\infty w(\omega)\, d\omega = \frac{1}{A} = \frac{2V k_B^3 T^{\circ 3}\zeta(3)}{\pi^2\hbar^3}. \tag{5}$$

Откуда концентрация фотонов

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2k_B^3 T^{\circ 3}\zeta(3)}{\pi^2\hbar^3}, \tag{6}$$

умножая которую на среднюю энергию фотона, имеем пространственную плотность энергии равновесного излучения

$$W = n\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{\pi^2 k_B^4 T^{\circ 4}}{15\hbar^3} = \frac{\pi^2 \cdot 30^4\zeta^4(3)\langle\mathcal{E}\rangle^4}{15\hbar^3 \cdot \pi^{16}} = \frac{2\cdot 30^3\zeta^4(3)}{\pi^{14}\hbar^3}\langle\mathcal{E}\rangle^4. \tag{7}$$

(Закон Стефана-Больцмана).

Выражая $k_B T^\circ$ из (3) и подставляя в (6), имеем

$$n = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2\hbar^3}\frac{30^3\zeta^3(3)\langle\mathcal{E}\rangle^3}{\pi^{12}} = \frac{2\cdot 30^3\zeta^4(3)}{\pi^{14}\hbar^3}\langle\mathcal{E}\rangle^3. \tag{8}$$

Экспериментальное значение постоянной Больцмана

$$k_B = 1,3806503(24)\cdot 10^{-23}\text{Дж/К}. \tag{9}$$

6. Частота максимума в спектре теплового излучения. Эту частоту $\omega = \omega_m$ найдём, дифференцируя $w(\omega)$ (5.4) и приравнивая призводную нулю. Заранее опуская постоянные множители, имеем

$$0 = \frac{2\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1} - \frac{\omega^2\cdot\hbar}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1)^2 k_B T^\circ}\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ},$$

откуда

$$2k_B T^\circ = \frac{\omega\hbar}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ} - 1}\ \mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T^\circ}$$

или

$$\frac{\omega\hbar}{2k_B T^\circ} = 1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_B T^\circ}$$

или

$$x + 2\mathrm{e}^{-x} = 2,$$

где

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T^\circ} = \frac{\hbar\omega_m}{k_B T^\circ}.$$

Это трансцендентное уравнение имеет решение

$$\frac{\hbar\omega_m}{k_B T^\circ} = 1,59361. \tag{1}$$

Оно отличается от [Ландау 5, (63,9)]

$$\frac{\hbar\omega'_m}{k_B T^\circ} = 2,822, \tag{2}$$

где ω'_m имеет смысл **частоты при максимуме плотности спектрального распределения энергии чёрного излучения**, а в (1) величина ω_m имеет смысл **частоты при максимуме плотности вероятности распределения фотонов**

по частоте. При этом формула (5.5) для числа фотонов в объёме V совпадает с [Ландау 5, (63,18)], что подтверждает смысл распределения фотона по спектру в (4.1).

7. Реликтовые и виртуальные вакуумные фотоны. Космологические ускорения свободного протистона и нормона по определению равны одно другому и изменяются космологически медленно с возрастом Вселенной. Это представляет интерес с точки зрения применения к нормону понятия **температуры Унру**.

Температура Унру [Гинзбург 3] характеризует тепловое возбуждение некоторого физического детектора, движущегося равноускоренно в физическом вакууме. При этом возникает реальный теплообмен детектора с вакуумом, **зависящий только от ускорения, но не от скорости детектора**, поэтому температуру этого обмена можно относить к любой инерциальной системе, то есть **температура Унру** – **релятивистский инвариант**, что однако не относится к любым температурам. Реальные **фотоны Унру**, соответствующие гладкому самоускорению свободных нормонов, отождествимы (благодаря их тепловому спектру) с **реликтовыми фотонами**.

Так как нормон является универсальной квантовой частицей, то по отношению к любой квантовой частице вакуум представляет собой среду, заполненную фотонами с температурой Унру, которую естественно отождествить с **реликтовым излучением**.

Вакуумный электромагнитный шум абсолютно равновесен. Поэтому вызывает только ненаблюдаемые **виртуальные переходы** с обменом **виртуальными фотонами**. **Реально наблюдаемо** лишь неравновесное электромагнитное поле, представленное реальными фотонами. Это осреднённое поле, определённое условиями применимости к нему понятия силы Лоренца. Реликтовое излучение тоже равновесно, но в другом смысле, чем вакуум. Оно равновесно только в изначальной системе координат, то есть это **нерелятивистская равновесность**, в отличие от **релятивистской равновесности** вакуума. Поэтому реликтовое излучение реально наблюдаемо, в отличие от вакуума, который наблюдаем только в ограниченном (**виртуальном**) смысле.

Наблюдаемость протистонов зависит от степени их термодинамической равновесности. В силу гравитационной неустойчивости степень термодинамического равновесия газа протистонов (прогаза) распределена неравномерно. Существуют огромные пространства (вакуум), где прогаз почти идеально равновесен. Здесь прогаз наблюдаем главным образом как реликтовые фотоны, являющиеся универсальным неравновесным явлением Вселенной. Чем вещество плотнее реликтового излучения, тем оно более отличается от равновесия (вакуума) и тем менее оно вероятно в масштабах Вселенной. То есть области, занятые плотным веществом относительно компактные.

Протистоны наблюдаются как частицы вещества, но не являются ими, а лишь быстро пролетают через них. То есть частица вещества является метаболирующим (обменным) объектом в прогазе, подобным вихрю. Объективно частицы определя-

ются волновыми функциями. В космологической локализации вещества главную роль играют дальнодействующие гравитационные силы, способные концентрировать огромные количества вещества.

§12. Элементарные процессы.

1. Иерархия представлений единого поля. Наблюдаемость Сложность единого поля делает полезными его статистические представления, очевидно, являющиеся его абстракциями. Для этого удобно понятие единой волновой функции над простонами (то есть в **простонном представлении**). Здесь простон является точечной **частицей представления**. В качестве частицы представления можно взять любую финитную (квази-точечную) квантовую частицу. При этом получится **единая волновая функция в представлении квантовой частицей**. Сама же эта квантовая частица может быть взята в представлении другой квантовой частицей. То есть можно построить **иерархию квантовых частиц**, где частица каждого **иерархического уровня** взята в представлении частицей **предыдущего иерархического уровня** вплоть до точечного простонного представления.

Существование гравитационного притяжения делает равномерное статистическое распределение простонов неустойчивым, поэтому распределение концентрации простонов и их потоков имеет сложную структуру (не тривиально) в космических масштабах. Неустойчивость распределения простонов характерна и для электромагнитных сил притяжения (плазменная неустойчивость).

Поэтому не тривиальна **иерархия представлений единой волновой функции**. Изучение единого поля (представляемого единой волновой функцией) на уровне простонов наиболее подробно, но слишком конкретно. Польза иерархии представлений в том, что в зависимости от практических задач, единое поле можно изучать на разных уровнях абстрагирования в разных представлениях, требуемых поставленой задачей. На каждом уровне абстрагирования (сложности) среди частиц могут появляться частицы с достаточно стационарными волновыми функциями, удобные для анализа взаимодействия с другими частицами и макроскопическими полями и тем самым **наблюдаемые**.

2. Элементарные активные процессы. Квантовая частица в вакууме или в достаточно медленно изменяющемся **макроскопическом** поле понимается как замкнутая механическая система. При этом её центр инерции имеет почти прямую времени-подобную мировую линию. В качестве **элементарного процесса взаимодействия** удобно рассматривать превращение одной квантовой частицы в другую под действием третьей (роль которой может выполнять компонента поля).

Вообще говоря, **процесс взаимодействия** происходит в некотором конечном объёме – **зоне влияния**. Взаимодействующие частицы можно изобразить прямыми мировыми линиями их центров инерции, оканчивающимися внутри зоны влияния. Прямые продолжения этих линий внутри зоны влияния назовём **виртуальными**

линиями. Зона влияния определяется областью, в которой существенно произведение волновых функций частиц, вступающих во взаимодействие.

Элементарный процесс **слияния (взаимо-поглощения)** двух частиц с **рождением** третьей частицы обратим. При обращении времени его можно рассматривать как **распад** одной частицы на две частицы.

Если в зоне влияния взаимодействуют более, чем 3 частицы, то процесс тоже можно изобразить как комбинацию элементарных процессов с помощъю виртуальных линий, но **неоднозначно**. Поэтому спектр распада на две частицы дискретный, а спектр распада на три и более частиц – непрерывный.

3. Изображение элементарного активного процесса. Для анализа элементарного активного процесса удобна система координат, выбранная определённым образом. Удобно выбрать ось времени так, чтобы одна из частиц в рассматриваемый момент была неподвижной, то есть выбрать ось времени параллельно мировой линии одной из частиц (например, 1). В определившемся 3-пространстве для мировых линий двух других частиц можно провести общий перпендикуляр (**плечо h взаимного импульса**), длина которого является **расстоянием между траекториями** этих частиц. Спроектируем эти траектории на **изображающую плоскость**, параллельную плечу взаимного импульса. Очевидно эта плоскость этим ещё не определена однозначно, так как она может вращаться вокруг этого плеча. Удобно совместить её с траекторией одной из точек (например, 2). При этом автоматически произойдёт совпадение этой плоскости и с траекторией точки 3, так как иначе нарушается сохранение 3-импульса в выбранной инерциальной системе. Наконец, сделаем параллельное смещение осей координат, чтобы поместить точку, изображающую траекторию частицы 1, в середину плеча взаимного импульса.

Полученное изображение траекторий взаимодействующих частиц удобно для вычисления результатов взаимодействия, используя законы сохранения 4-импульса и момента импульса. Рисунок ясно демонстрирует общий импульс и момент вращения вступающих во взаимодействие частиц. Результирующая частица (например 1) должна иметь квантовые числа, равные сумме квантовых чисел частиц 2 и 3, если они аддитивные и – произведению, если они мультипликативные. Так как спин и момент импульса сохраняются совместно, то понятно влияние **нецентральности взаимодействия** на спин результирующей частицы.

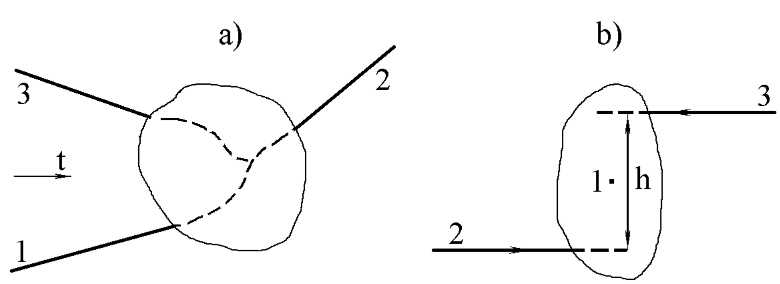


Рис. 206.3.

Таким образом, все элементарные активные процессы сводятся к слиянию двух частиц. Вычислив результаты элементарного процесса, используя **изображающую**

плоскость, не трудно пересчитать их в любую другую систему координат. Эти результаты для элементарного процесса могут быть однозначными. Если же процесс содержит виртуальные элементарные процессы, то вычисляются вероятности различных вариантов (**каналов**) этого процесса.

Более абстрактно элементарные процессы изображаются **диаграммами Фейнмана**, с помощью которых удобно анализировать сложные процессы.

4. Элементарные реактивные процессы. Для частиц элементарного активного процесса безразлично какую пару частиц считать вступающей во взаимодействие, а какую частицу считать его результатом. В химической терминологии элементарный активный процесс является элементарной **реакцией**.

Частица, не противореча законам сохранения, может войти в зону влияния и выйти из неё, не изменяя квантовых чисел (в том числе массу), хотя, быть может изменив направление движения (**рефлексия**) или испытав задержку во времени (**рефракцию**), которая может сочетаться с рефлексией. Рефракцию и рефлексию будем называть **элементарными реактивными процессами**, в отличии от слияния – **элементарного активного процесса** (трёх частиц).

Простейшим элементарным реактивным процессом является **упругое столкновение двух частиц**, которое также называют **рассеянием** одной частицы на другой.

5. Что происходит в зоне влияния. В зоне влияния происходит интерференция волновых функций взаимодействующих частиц с участием вакуума. То есть там происходит вре́менное изменение распределения энергии волновых функций в 3-пространстве, которое в реактивном процессе восстанавливается после выхода из объёма влияния. В этом участвуют и шумоподобные колебания энергии вакуума, вносящие некоторую неопределённость в процессы.

Спектр квантовых чисел квантовой частицы вполне определён её волновой функцией в каждый момент времени. Это следует из существования для неё локально-волнового дифференциального уравнения первого порядка. При участии вакуумных шумов взаимно возмущённые волновые функции в объёме влияния имеют изменённый спектр своих квантовых чисел, вплоть до вре́менного (**виртуального**) появления в нём других квантовых частиц. Эти частицы согласно **правилам отбора**, выражающим законы сохранения, периодически исчезают и снова появляются, конкурируя с исходной парой частиц. В зависимости от фазы **амплитуды вероятности** (волновой функции) при выходе из зоны влияния преимущество по устойчивости может получить либо изначальная пара частиц, либо новый набор частиц. В элементарном процессе это одна частица. Вероятность большего числа частиц понижается с ростом этого числа и чаще всего результатом является отсутствие новых частиц (реактивные прцессы). Недостаток энергии не позволяет появление новых частиц в среде старых до тех пор пока не появятся новые частицы с избытком кинетической энергии.

Таким образом в зоне влияния происходит взаимное возмущение взаимодействующих волновых функций и появление всевозможных (по правилам отбора)

компонент в числе тем большем, чем больше взаимная кинетическая энергия исходных волновых функций, а по выходе из зоны влияния из всей этой смеси выживают лишь те комбинации которые соответствуют правилам отбора. **Достаточное разнообразие** (спектральную полноту) смеси исходных волновых функций обеспечивают шумоподобные вакуумные колебания. Интерференция волновых функций допускает вре́менное доминирование тех или иных компонент спектра квантовых чисел, обеспечивая возможность **переходов** системы взаимодействующих волновых функций из одних устойчивых состояний в другие устойчивые состояния. Вообще говоря переходы возможны из любых стационарных состояний, поэтому все они **квази-стационарные**, хотя состояния с наинизшей энергией для собственных функций определённого квантово-механического оператора принято называть **стационарными**, так как их разрушение требует внешней энергии.

В своей основе **процессы взаимодействия линейны**, так как линейно уравнение единого поля. Линейность проявляется в законах сохранения и в стационарности квантовых состояний. Но вакуумные шумы, являясь статистически однородными и изотропными, допуская с одной стороны механические законы сохранения (в статистическом смысле), с другой стороны спонтанно нарушают их, реализуя взаимодействия квантовых состояний.

6. Квантовые переходы. Волновую функцию принято называть также **амплитудой вероятности**, в связи с тем, что квадрат её модуля имеет смысл плотности вероятности. Квадрат модуля понимается в смысле произведения функции на её комплексное сопряжение. Вообще произведение одной величины на комплексно сопряжённое значение другой величины будем называть **спряжённым произведением**. Оно, вообще говоря, некоммутативно.

Если спряжённое произведение двух волновых функций не равно нулю, то это означает, что они коррелируют. Если коэффициент корреляции равен 1, то спряжённое произведение, очевидно, равно просто квадрату модуля любой из этих функций. А если он равен -1, то спряжённое произведение равно квадрату модуля любой из этих функций, взятому со знаком $-$. В первом из этих случаев модуль спряжённого произведения имеет смысл плотности вероятности того, что если простон принадлежит одной волновой функции этого произведения, то он принадлежит и другой, то есть простоны обеих волновых функций **совместны**. Во втором случае модуль спряжённого произведения имеет смысл плотности вероятности того, что если простон принадлежит одной волновой функции этого произведения, то он не принадлежит другой, то есть простоны обеих волновых функций **несовместны**. Если же модуль коэффициента корреляции меньше 1, то он имеет смысл **плотности вероятности совместности или несовместности простонов двух волновых функций** соответственно знаку $+$ или $-$ коэффициента корреляции.

В случае разных волновых функций модуль их спряжённого произведения можно рассматривать и как плотность вероятности появления в данной точке второй частицы при условии появления в ней первой частицы. То

есть **существует виртуальный переход одной частицы в другую с вероятностью, определяемой модулем скалярного произведения их волновых функций**. Такой переход всегда возможен в силу **соотношения неопределённости** квантовой механики [Ландау 3, §44], но только в течении короткого времени, определяемого этим же соотношением. Такой переход аналогично возможен не только между двумя частицами, но и между любым их числом. Сами по себе виртуальные переходы не изменяют статистического состояния системы частиц. Кроме виртуального перехода первой частицы во вторую, очевидно, существует с той же вероятностью виртуальный переход второй частицы в первую.

Однако виртуальные переходы могут превращаться в **реальные переходы**. Сближение частиц вызывает взаимное перекрытие их волновых функций, которое, вообще говоря, можно рассматривать как возмущение каждой из них. Возмущение, действующее в течение конечного времени может превратить состояние одной системы стационарных частиц в состояние другой системы стационарных частиц, что и является реальным переходом. Для вычисления вероятностей таких переходов применяются методы **квантовой теории возмущений** [Ландау 3, гл.6].

Превращение виртуального перехода в реальный переход (то есть **реализация виртуального перехода**), очевидно, возможно только при выполнении всех законов сохранения.

Обратный переход столь же возможен как и прямой, то есть процесс осциллирует. Его результат зависит от фазы этой осцилляции по окончании взаимодействия.

Понятие редукции (коллапса) волновой функции в рамках ДФ бессмыслено. Имеет смысл говорить о переходах только между почти стационарными волновыми функциями. (Имея в виду стационарность каждой волновой функции в своей инерциальной системе.) Переход может произойти в зоне перекрытия этих волновых функций где они возмущают друг друга. Это не мгновенный переход, а статистический процесс, который заканчивается когда система исходных почти стационарных волновых функций превращается в новую ситему почти стационарных волновых функций. Микроскопически преобразование волновых функций на переходах сводится к радиации точечных зарядов.

7. Несохранение массы в элементарном активном процессе.

Рассмотрим столкновение двух частиц f и ν в системе координат, где результирующая частица f' покоится, то есть её энергия равна её массе $m_{f'}$. Баланс энергии запишется в виде

$$\sqrt{P_f^2 + m_f^2} + \sqrt{P_\nu^2 + m_\nu^2} = m_{f'}, \tag{1}$$

откуда следует, что

$$m_{f'} \geqslant m_f + m_\nu, \tag{2}$$

то есть неупругое столкновение двух частиц увеличивает результирующую массу, а следовательно обратный процесс – распад даёт сумму масс пары меньше массы исходной частицы. Поэтому, вообще говоря, **нет закона сохранения массы**, разве что в нерелятивистском пределе, когда $P_f = P_\nu = 0$.

8. Аннигиляция. К элементарным процессам можно отнести аннигиляцию, то есть реакцию, продукты которой в сумме имеют массу многократно меньшую, чем сумма масс вступивших в реакцию частиц (7.10.*.*). Особенность этой реакции в том, что очень большой дефект массы достигается благодаря очень сильной гравитационной связи субчастиц – тяжелонов.

9. Генерация вещества. Аннигиляция перерабатывает массу вещества в энергию излучения. Чёрная дыра, наоборот, способна перерабатывать излучение окружающей среды (в том числе электромагнитное) в свою массу. В ДФ **чёрная дыра** не является метрическим объектом, но является сверхплотным телом, из которого гравитационная работа выхода в вакуум любых фотонов, многократно больше их энергии. Чёрную дыру можно определить и в терминах варианта ОТО, совместимого с ДФ.

Нет оснований полагать, что процесс накопления массы чёрной дырой необратим. То есть рано или поздно чёрная дыра может потерять устойчивость (что вообще характерно для гравитации) и начать **генерировать вещество**, что по-видимому совершают **квазары** в форме двух противоположных струй вещества (**джетов**).

⋆⋆⋆

Новое живёт, лишь опираясь на старое.

Глава 7. КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Гравитация является следствием инвариантности гравитационно осреднённого тензора плотности энергии импульса прогаза в реликтовой системе отсчёта.

§1. Гравитационное взаимодействие.

1. Тензор плотности энергии-импульса гравитационного поля. Рассмотрим тензор плотности энергии-импульса **замкнутой** электродинамической системы – **проплазмы**, содержащей прогаз вместе с единым электромагнитным полем (I.11.4.1.6)

$$T_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\gamma}F^{\beta\gamma} - A_\alpha\dot{j}^\beta + \frac{1}{16\pi}\delta_\alpha^\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \delta_\alpha^\beta A_\mu \dot{j}^\mu. \tag{1}$$

Член $A^\alpha\dot{j}^\beta$ в корпускулярной калибровке (I.11.4.7.9) записывается в виде

$$A^\alpha\dot{j}^\beta = \sum_i m_i w_{0i}\, u_i^\alpha u_i^\beta, \tag{2}$$

где

$$w_{0i} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)/u_i^0 \tag{3}$$

– концентрация покоя i-того точечного заряда (I.11.4.7.8),
член $A^\alpha\dot{j}^\beta$ тензора плотности энергии-импульса оказывается симметричным в корпускулярной калибровке. При этом симметричным становится и весь тензор, что означает выполнение всех механических законов сохранения (включая сохранение момента импульса). В корпускулярной калибровке тензор (1) интегрируем по любому конечному 4-объёму.

Тензор (1) содержит инвариантный тензор (I.11.1.4.8)

$$\frac{1}{16\pi}\delta_\alpha^\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(H^2 - E^2)\delta_\alpha^\beta, \tag{4}$$

выражающий инвариантную часть плотности энергии-импульса электромагнитного поля. Но так как энергия электромагнитных полей сопутствующих протистонам компенсирована энергией сплошных токов, то остаются только поля радиации, для

которых $E^2 = H^2$, поэтому этот тензор равен нулю. Но зато не равен нулю другой инвариантный тензор (где обозначено $A_\mu \dot{j}^\mu = \varrho_{0m}$)

$$\delta_\alpha^\beta A_\mu \dot{j}^\mu = \delta_\alpha^\beta \varrho_{0m}. \tag{5}$$

Таким образом **тензор плотности энергии импульса проплазмы** можно записать в следующем симметричном виде

$$T_\alpha^\beta = -\frac{1}{4\pi} F_{\alpha\gamma} F^{\beta\gamma} - A_\alpha \dot{j}^\beta + \delta_\alpha^\beta \varrho_{0m}. \tag{6}$$

Член

$$V_\alpha^\beta = -\frac{1}{4\pi} F_{\alpha\gamma} F^{\beta\gamma} \tag{7}$$

тензора (1) относится к (**вакуумному электромагнитному полю**) (4.3.1.*), так как за космологически большое время радиация всех протистонов, распределённых с постоянной концентрацией, должна прийти в термодинамическое равновесие с относительно малыми флуктуациями и космологически постоянной плотностью энергии (4.3.3.3). Каждый индивидуальный простон (как звено протистона) ровно один раз поглощает из вакуума квап и излучает в него квиз с произвольными поляризациями. Поэтому **электромагнитный вакуум** по отношению к прогазу – статистически равновесная среда, сохраняющая механические величины прогаза (в статистическом смысле), то есть **электромагнитный вакуум проявляет себя почти как пустота** (**почти ненаблюдаем** за исключением статистических **флуктуаций**, проявляющихся только микроскопически).

Тогда **рассматривая механику прогаза, тензор** V_α^β **обычно можно не учитывать**, хотя существуют **эффекты флуктуаций**, которые проявляются малыми **радиационными поправками**. Сам прогаз однороден лишь в среднем, что проявляется в его гравитационной неустойчивости (см. ниже).

Обратим внимание, что член $-A_\alpha \dot{j}^\beta$ является произведением знакопеременных и, вообще говоря, независимых 4-векторов и поэтому с ростом элемента осреднения не накапливается, в то время как член $\delta_\alpha^\beta \varrho_{0m} = \delta_\alpha^\beta A_\mu \dot{j}^\mu$ знакоположителен и при осреднении возрастает с ростом элемента осреднения (**накапливается**) и поэтому доминирует.

Тогда, применяя **гравитационное осреднение**, то есть осреднение по достаточно большим элементам dT возраста Вселенной (но не 3-пространства) и исключая электромагнитный вакуумный член V_α^β, получим из (6) следующий 4-инвариантный симметричный **гравитационно осреднённый тензор плотности энергии-импульса прогаза**:

$$G_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \varrho_{0m}, \tag{8}$$

где имеется в виду **не проплазма, а прогаз**, так как этот тензор зависит от массы протистонов и не зависит от их зарядов. Этот же тензор будем также называть **тензором плотности энергии-импульса гравитационного поля**. Заметим, что понятие гравитационного осреднения условно инвариантное, то есть объективное.

2. Волновое уравнение плотности энергии гравитационного поля. В силу инвариантности тензора плотности энергии-импульса гравитационного поля, из (1.8) имеем

$$G_\alpha^\beta = e\,\delta_\alpha^\beta, \tag{1}$$

где

$$e = G_0^0 = \varrho_{0m} \tag{2}$$

– **гравитационная плотность энергии покоя (массы) прогаза** (инвариантная величина).

Из (1) по закону Паскаля (4.2.4.1) **уравнение состояния прогаза** (4.2.3.3) имеет вид

$$e = -p. \tag{3}$$

Из уравнения движения изотропных текучих сред (4.2.5.2)

$$\nabla_\mu \nabla_\nu ((p+e)u^\mu u^\nu) - \Box\, p = 0, \tag{4}$$

видно, что при $e = -p$ (необычный случай **отрицательного давления**)

$$\Box\, p = 0, \quad \Box\, e = 0, \quad e = -p. \tag{5}$$

Это – **волновые уравнения давления и плотности энергии прогаза** (Δ-**вакуума**). Тензор плотности энергии-импульса прогаза полностью характеризуется скаляром (инвариантом) $e = -p$.

В отличие от вакуумного электромагнитного поля с тензором V_α^β (0-**вакуума**), плотность энергии которого e_V (4.3.3.3) огромна и относительно постоянна, образующего почти замкнутую механическую систему, проявляющую себя лишь микроскопическими (**виртуальными**) взаимодействиями, **плотность энергии прогаза зависит от координат**.

3. Потенциал гравитационного поля. Переписав (4.2.5.5) в форме

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p, \tag{1}$$

легко видеть, что **рост потока** плотности энергии текучей среды (плотности импульса) однозначно связан с градиентом давления (рост потока направлен против градиента, то есть в сторону понижения давления). Условием равновесия является отсутствие градиента давления. Для прогаза, давление которого отрицательно, ускорение потока идёт в сторону повышения плотности энергии, что способствует **сгущению прогаза**. Этому сгущению противостоит высокая взаимная скорость частиц прогаза (простонов), способствующая **рассеянию прогаза**. Неустойчивое равновесие этих противоположных тенденций называется **гравитационной неустойчивостью**.

Рассмотрим элемент мировой линии потока прогаза с плотностью энергии e в течении времени dt, на котором приращение скорости равно $d_t\mathbf{v}$. При этом приращение плотности импульса будет равно величине

$$d_t\mathbf{S} = d_t(e\mathbf{v}) = e\,d_t\mathbf{v} + \mathbf{v}\,d_t e,$$

разделив которую на dt, с учётом (1), получим

$$\frac{d_t\mathbf{S}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} = e\frac{d_t\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{d_t e}{dt} = -\operatorname{grad} p, \tag{2}$$

откуда при $p = -e$, в системе, мгновенно сопутствующей потоку ($\mathbf{v}$=0), имеем **гравитационное ускорение** потока:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \frac{1}{e}\operatorname{grad} e = \operatorname{grad}\,\ln e = -\operatorname{grad}\varphi, \quad p = -e, \tag{3}$$

где

$$\varphi = -\ln e \tag{4}$$

– **потенциал гравитационного поля**. Таким образом **потенциалом гравитационного поля является логарифм плотности энергии покоя (массы), взятый со знаком** “$-$”.

Гравитационный потенциал вакуума – скалярная величина, так как e – скаляр. Здесь связь $\mathbf{a}$ с φ соответствует [Ландау 2, (81,2)].

Из (I.9.6.2.9) следует

$$w^{\mu}_{|\mathbf{v}=0} = (0, \mathbf{a}) = (0, -\operatorname{grad}\varphi) = (0, -\nabla\varphi) = -(0, \nabla\varphi),$$

то есть 4-вектор w^μ пространственноподобный. Этому выражению, в произвольной инерциальной системе соответствует [Ландау 2, §6] 4-мерное выражение

$$w^\mu = -\nabla^\mu\varphi = \nabla^\mu \ln e, \quad p = -e, \tag{5}$$

означающее, что **4-градиент гравитационного потенциала имеет смысл (с обратным знаком) 4-ускорения потока прогаза**. Статистически скорость этого потока можно относить к одному **типичному простону**, подходящим образом метаболирующему в прогазе. Из (5) видно, что поле 4-вектора ускорения w^μ является **потенциальным полем**. При этом выражение

$$w^\mu \cdot dx_\mu \equiv -\nabla^\mu\varphi \cdot dx_\mu = -d\varphi \tag{6}$$

является дифференциалом [Корн, (4.5-5)] скалярного поля $-\varphi$, а криволинейный интеграл от 4-точки A до 4-точки B (при известных условиях) не зависит от пути интегрирования [Корн, (5.7-3)].

$$\int\limits_A^B w^\mu \cdot dx_\mu = -[\varphi_B - \varphi_A]. \tag{7}$$

В частности, кривую AB можно выбрать в форме времениподобной прямой, соединяющей точки A и B, тогда в сопутствующей ей системе отсчёта интеграл от 4-ускорения потока прогаза имеет смысл изменения временной компоненты 4-скорости (**темпа**) потока при переходе из точки A в точку B. То есть **разность гравитационных потенциалов в двух одноместных (вообще говоря, не одновременных) точках 4-пространства, имеет смысл разности темпов потока простонов прогаза в этих точках, совмещённых в пространстве выбором системы координат**

$$\int\limits_A^B \frac{du^0}{dx_0}\,dx_0 = u^0\Big|_A^B = u_B^0 - u_A^0 = \varphi_A - \varphi_B, \tag{8}$$

здесь разность потенциалов инвариантна и поэтому может рассматриваться в любой системе отсчёта, а разность темпов должна браться в системе, где точки A и B пространственно совмещены, что возможно лишь при времениподобном интервале между ними. Из (8) следует противоположность знаков приращений гравитационных потенциалов и темпов.

Эта интерпретация гравитационного потенциала справедлива для всех пар точек, связанных времени-подобным интервалом. Причём в системе, сопутствующей отрезку, соединяющему эти точки, простон, вышедший из точки A, совершая любые движения и возвратившись через некоторое время в эту же точку, будет иметь исходный гравитационный потенциал как бы он ни изменял его во время движения.

Для термодинамически равновесного прогаза в целом удобно в качестве точки A взять Начало Вселенной, где осреднённый темп u^0 простонов в изначальной системе космологически мал относительно темпа прогаза в точке B, взятой при космологически большом возрасте Вселенной. Так как для гравитационного ускорения существен лишь градиент потенциала, то его можно определять с точностью до произвольной аддитивной константы, поэтому для равновесного прогаза удобно выбрать

$$\varphi_A = u_A^0 = 1, \tag{9}$$

что является космологически малой величиной относительно u_B^0. Поэтому с космологической точностью можно писать для равновесного прогаза

$$\varphi_B = \varphi = -u^0, \tag{10}$$

то есть **гравитационный потенциал равновесного прогаза является условным инвариантом** (I.8.2.1.*) как и u^0. Гравитационный потенциал в силу гравитационной неустойчивости может заметно отличаться от **равновесного значения** (10) в некоторых областях, которые будем называть **гравитационно возмущёнными**, где, вообще говоря, темп произволен

$$\varphi_B = \varphi = -u_B^0. \tag{11}$$

Ускорение **a** универсально для любого вида потока **S**, в том числе для электромагнитных волн, лучи которых искривляются в гравитационном поле, что даёт смысл понятию **геометризации гравитации** (**линзовый эффект**). (12)

При этом геометризованные единицы интервала геодезических линий зависят от ориентации, то есть **гравитация нарушает инвариантность геометризованной метрики**.

4. Уравнение для гравитационного потенциала. Обратим внимание, что изменение плотности энергии Вселенной e в некоторое число раз изменяет гравитационный потенциал всей Вселенной на общую постоянную величину, что не отражается на значениях гравитационного ускорения во всех точках Вселенной, то есть **изменение единиц измерения массы сразу во всей Вселенной не изменяет поле гравитационнго потенциала**.

Из (3.4) выразим $e = \mathrm{e}^{-\varphi}$ и, учитывая уравнение $\Box e = 0$, получаем

$$\Box e = \Box \mathrm{e}^{-\varphi} = \nabla_\mu \nabla^\mu \mathrm{e}^{-\varphi} = -\nabla_\mu(\mathrm{e}^{-\varphi}\nabla^\mu\varphi) = \mathrm{e}^{-\varphi}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi - \mathrm{e}^{-\varphi}\Box\varphi = 0,$$

откуда, используя (3.5), получаем **нелинейное уравнение для гравитационного потенциала** (инвариантное)

$$\Box\varphi = \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi = w_\mu w^\mu < 0, \tag{1}$$

(последнее неравенство в силу пространственноподобности w^μ).

Согласно (3.5) достаточно малые изменения плотности энергии прогаза и соответственно потенциала описываются волновым уравнением

$$\Box\delta\varphi = 0, \quad \delta e \ll e, \tag{2}$$

в которое вырождается уравнение (1) для малых вариаций $\delta e \ll e$. Отсюда следует существование **гравитационных волн**, скорость распространения которых равна релятивистскому пределу $c = 1$.

5. 4-х-мерное уравнение Пуассона и близкодействие. В уравнении Пуассона (I.12.1.1.4)

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

величину $\rho(\mathbf{x})$ можно рассматривать как плотность некоторого абстрактного заряда (скаляра) с **потенциалом отталкивания** φ от одноимённого пробного точечного заряда. Так как гравитационные заряды притягиваются, то для них соответствующее **гравитационное уравнение Пуассона с потенциалом притяжения** имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho_g. \tag{1}$$

4-х-мерное обобщение этого гравитационного уравнения Пуассона (**4-уравнение Пуассона** или **уравнение Даламбера**) можно записать в следующем виде, не зависящем от выбора системы координат

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \Box\varphi = -4\pi\rho_{g0}, \tag{2}$$

где

$$\rho_{g0} = \rho_g / u^0 = \rho_g \sqrt{1 - v^2} \tag{3}$$

– **плотность покоя потока гравитационного заряда**. В инерциальной системе координат, выражение (2), при нулевой скорости v плотности потока этого заряда, переходит в (1).

Аналогично выражению (I.12.1.1.7), потенциал неподвижного квази-точечного гравитационного заряда, с учётом (3.11), имеет вид

$$\varphi = -u^0_B = -\frac{q_g}{r}, \tag{4}$$

где знак $(-)$ соответствует притяжению таких зарядов. Отсюда видно, что темп точечного гравитационного заряда стремится к бесконечности при приближении к этому заряду. Однако, неопределённость размера такого заряда, который не может быть меньше простона, рассматриваемого на протяжении шага, ограничивает этот темп (и потенциал) конечной величиной порядка $u^0 q_g / \Delta T$. В этом смысл **гравитационной квази-точечности**. Смысл величины q_g прояснится ниже.

Квази-точечный гравитационный заряд q_g определяется метаболирующим простоном и в квантовой механике может быть задан любой квантовой частицей, то есть её финитной стационарной волновой функцией, определяющей распределение этого заряда. Самым **элементарным гравитационным квази-точечным зарядом** является сам простон.

В электродинамике поле, сопутствующее точечному заряду, благодаря корпускулярной калибровке, не имеет плотности энергии, поэтому взаимодействия точечных электрических зарядов происходят только посредством полей радиации. А квази-точечные гравитационные заряды имеют **сопутствующее** поле гравитационного потенциала в виде темпа метаболирующих простонов, посредством которых могут взаимодействовать с соседями. Такое **близкодействие** вполне определяется корреляцией волновых функций и не требует обмена радиацией (**дальнодействия**). (5)

Обычно гравитационное взаимодействие существенно только для очень больших масс тел, что оправдывает представление о слабости гравитационных сил. Однако на очень малых расстояниях, гравитационное близкодействие может быть очень значительным вплоть до формирования масс элементарных частиц.

Таким образом **аналогии электрического и гравитационного потенциалов весьма ограничены**.

6. Плотность гравитационного заряда. Уравнение (4.1)

$$\Box\varphi = w_\mu w^\mu < 0, \tag{1}$$

имет вид 4-уравнения Пуассона (5.2), поэтому величина

$$\rho_{g0} = -\frac{1}{4\pi} w_\mu w^\mu > 0 \tag{2}$$

является **плотностью покоя гравитационного заряда**, а величина

$$\rho_g = u^0 \rho_{g0} > 0, \tag{3}$$

где u^0 – темп плотности потока этого заряда, является **плотностью гравитационного заряда**.

Для определённости **инвариант** $w_\mu w^\mu$ **будем рассматривать как квадрат модуля 4-ускорения потока массы, усреднённый во времени по шагу типичного простона, то есть по периоду глобальной волны**. Покажем, что эта величина универсальна для данного возраста Вселенной. Действительно, согласно (I.12.4.6.2), учитывая (I.12.3.3.3) и неравенство $w_\mu w^\mu < 0$, имеем

$$w_\mu w^\mu = -\frac{3}{2q^2}\left|\frac{dm}{ds}\right|, \tag{4}$$

Вычислим среднее шаговое значение этой величины. Согласно (3.1.5.8) длительность шага в изначальной системе равна

$$\Delta T = \pi/|k|. \tag{5}$$

Так как внутри полушага масса протистона изменяется монотонно от 0 до m_m или обратно, то интеграл от $|dm/ds|$ на каждом полушаге равен m_m, а на всём шаге – равен $2m_m$. Разделив этот интеграл на длительность шага ΔT, получим усреднённое по длительности шага значение

$$|dm/ds| = 2|k|m_m/\pi. \tag{6}$$

Таким образом статистически **квадрат 4-ускорения** $w_\mu w^\mu$ **является универсальной для всех простонов величиной**. Тогда уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\Box\varphi = -\frac{3|k|m_m}{\pi q^2}, \tag{7}$$

где согласно (5.2) **плотностью покоя гравитационного заряда** является инвариантная величина

$$\rho_{g0} = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2}, \tag{8}$$

а **плотностью гравитационного заряда** является величина

$$\rho_g = \rho_{g0} u^0 = \frac{3|k|\mathcal{E}_m}{4\pi^2 q^2} \sim T, \tag{9}$$

где $\mathcal{E}_m$ – энергия простона,

u^0 – темп простона в изначальной системе.

7. Неподвижный точечный гравитационный заряд и гравитационная постоянная. Согласно (6.8) в системе, сопутствующей типичному простону, его гравитационный заряд q_g можно выразить через его плотность $\mathring{\rho}_g$ в виде

$$q_g\mathring{1} = \mathring{\rho}_g = \mathring{\rho}_{g0} = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2}\mathring{1} = \frac{|k|\beta}{2\pi^2}\mathring{1}, \quad \mathring{1} = \mathring{\rho}_g/q_g \to \delta(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где плотность покоя $\mathring{\rho}_{g0}$ определена как постоянная на своём малом **носителе единичного 4-объёма**, котороый содержит один простон. Отсюда ясно, что **элементарный точечный гравитационный заряд эквивалентен массе простона с точностью до постоянного скалярного коэффициента** $3|k|/(4\pi^2 q^2)$ и распределён с плотностью вероятности, определяемой волновой функцией этой частицы. (2)

Для **точечного типичного неподвижного** заряда q_g уравнение (4.1) примет вид (5.1)

$$\Delta\varphi = 4\pi\mathring{\rho}_g = 4\pi\mathring{\rho}_{g0} = 4\pi q_g\mathring{1} \to 4\pi q_g\delta(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Согласно (I.12.1.1.9) частное решение этого уравнения:

$$\varphi_g = -\frac{q_g}{r} = -\frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2 r} < 0,$$

то есть это **гравитационный потенциал неподвижного точечного гравитационного заряда**. Эту формулу можно переписать в форме

$$\varphi_g = \frac{-q_g}{r} = -\frac{Gm_m}{r}, \tag{4}$$

где

$$G = \frac{3|k|}{4\pi^2 q^2} = \frac{3|k|}{4\pi^2 k_q^2}T^6 = 2^{12}3\pi^8|k|T^6 > 0 \tag{5}$$

– **гравитационная постоянная**. Здесь использованы выражения (I.8.5.3.2), (I.8.5.5.2). Тогда формула (4) совпадает с [Ландау 2, (99,4)]. Последняя формула имеет большое значение для сопоставления безразмерных единиц этой теории с экспериментальными единицами измерения. **Эквивалентность гравитационной и инертной массы** в ДФ обеспечена по определению.

Знак в уравнении (3) совпадает со знаком в аналогичном уравнении [Ландау 2, (99,2)].

Потенциал (4) на расстоянии r создаёт силу, действующую на второй неподвижный точечный гравитационный заряд с массой m'_m:

$$\mathbf{F} = m'_m\mathbf{a} = -m'_m \operatorname{grad}\varphi_g = -\frac{m'_m q_g}{r^2}\mathbf{i}_r = -\frac{Gm'_m m_m}{r^2}\mathbf{i}_r. \tag{6}$$

Очевидно, это **сила притяжения**. Эта формула выражает **закон тяготения Ньютона** [Ландау 2, (99,5)].

Но ускорение **a** инвариантом не является, поэтому **сила гравитационного притяжения зависит от относительной скорости источника и пробного тела**.

Так как величина $\beta \sim \sqrt{T}$ имеет космологически большой порядок, то с космологической точностью для неподвижного заряда справедливо:

$$\rho_g = \rho_{g0} = q_g \mathring{1}(\mathbf{x}) = q_g \delta(\mathbf{x}), \tag{7}$$

где носитель функции $\mathring{1}$ совпадает с носителем функции $\mathring{\rho}_{g0}$, то есть космологически мал по объёму.

Из (1) и (5)

$$q_g = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2} = \frac{|k|\beta}{2\pi^2} = Gm_m. \tag{8}$$

8. Потенциал движущегося гравитационного заряда. С применением гравитационной постоянной **плотность точечного неподвижного гравитационного заряда**, согласно (7.1), (7.7) можно записать в виде

$$\mathring{\rho}_{g0} = q_g \delta(\mathbf{x}) = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2} \delta(\mathbf{x}) = Gm_m \delta(\mathbf{x}). \tag{1}$$

А из (6.9) **плотность точечного гравитационного заряда движущегося с темпом** u_q^0 примет вид

$$\mathring{\rho}_g = \mathring{\rho}_{g0} u_q^0 = q_g u_q^0 \delta(\mathbf{x}(t)) = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2} u_q^0 \delta(\mathbf{x}(t)) = Gm_m u_q^0 \delta(\mathbf{x}(t)). \tag{2}$$

Гравитационный потенциал такого движения может быть найден аналогично потенциалу Лиенара-Вихерта (I.12.1.4.8) и по нему можно вычислить гравитационную силу аналогично части вектора **E** (I.12.1.6.11) электрического поля, отвечающей градиенту $\nabla\varphi$ потенциала. Для универсального гравитационного взаимодействия важно **взаимодействие сопутствующими полями, зависящее лишь от скоростей и не зависящее от ускорений**. Соответственно выражению (2) уравнение (5.1) примет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi q_g u_q^0 \delta(\mathbf{x}(t)), \tag{3}$$

частное решение которого, при учёте тоько сопутствующего поля, можно решать, полагая $\mathbf{x}(t)$ константой, что согласно (I.12.1.1.9) даёт:

$$\varphi_u = -\frac{q_g u_q^0}{r} = -\frac{3|k|m_m u_q^0}{4\pi^2 q^2 r} = -\frac{3|k|\mathcal{E}_m}{4\pi^2 q^2 r} \tag{4}$$

или с использованием гравитационной постоянной:

$$\varphi_u = -\frac{Gm_m u_q^0}{r} = -\frac{G\mathcal{E}_m}{r}, \tag{5}$$

то есть это **гравитационный потенциал движущегося точечного гравитационного заряда массы** m_m **или энергии** $\mathcal{E}_m$, наблюдаемый в **неподвижной** точке на расстоянии r. Этот потенциал на расстоянии r создаёт **силу притяжения**, действующую на **неподвижный** точечный гравитационный заряд с массой m:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m \operatorname{grad} \varphi_u = -\frac{mq_g u_q^0}{r^2}\mathbf{i}_r = -G\frac{\mathcal{E}_m m}{r^2}\mathbf{i}_r = -G\frac{u_q^0 m_m m}{r^2}\mathbf{i}_r, \tag{6}$$

где $\mathcal{E}_m$ – энергия движущегося точечного источника гравитационного поля. Эта формула выражает **закон Ньютона** для движущегося квази-точечного гравитационного заряда.

Формула (6) не учитывает запаздывание потенциала в точке наблюдения гравитационного поля, так как рассматривается только сопутствующее поле без радиации, которая существенна только для дальнодействующей гравитации. Как и в электродинамике поле радиации формируется, охватывая конусно вектор скорости заряда тем плотнее, чем больше скорость. А сопутствующее поле охватывает заряд как концентрические сферы, которые сплющиваются в направлении скорости тем плотнее, чем больше скорость.

С использованием концентрации $2c_q$ точечных зарядов обоих знаков, осреднённую плотность гравитационных зарядов Вселенной, с учётом (2) и (1), можно записать в виде

$$\rho_{Ug} = 2c_q \cdot G m_m u_q^0 = G\varrho \sim T, \tag{7}$$

где

$$\varrho = 2c_q m_m u_q^0 = \frac{\rho_{Ug}}{G} \tag{8}$$

– **осреднённая плотность энергии простонов Вселенной**.

Роль заряда для гравитационного поля движущегося квази-точечного источника играет его энергия

$$q_g = \frac{3|k| m_m u_q^0}{4\pi^2 q^2} = G\mathcal{E}_m. \tag{9}$$

Кроме того, что гравитационные заряды квази-точечные в отличие от точечных электрических зарядов, первые имеют только один знак и соответствуют только притяжению, а одинаковые знаки электрических зарядов соответствуют отталкиванию.

Из (7.6) видно, что нарушение равенства гравитационных зарядов двух протистонов, переходом части заряда от одного к другогму, приводит к уменьшению силы их связи, то есть к росту полной энергии, так как

$$(m + \Delta m)(m - \Delta m) = m^2 - (\Delta m)^2 < m^2.$$

В этом смысл **энергетической выгодности** равенства взаимодействующих зарядов.

Свободное движение квази-точечного гравитационного заряда означает его типичность, то есть принадлежность к равновесному прогазу. Гравитационный потенциал такого гравитационного заряда типичен, то есть равен среднему по Вселенной темпу простонов u^0, взятому со знаком $(-)$

$$\varphi = -u^0. \tag{10}$$

Такие гравитационные заряды **индивидуально не наблюдаемы**. Наблюдаемы лишь возмущённые статистические состояния простонов, описываемые финитными стационарными волновыми функциями. Их гравитационный потенциал удобно представлять как малую вариацию $\varphi_g = \delta\varphi$ типичного потенциала φ. Такие волновые функции представляют квантовые частицы, движение метаболирующего простона внутри которых описывается средним значением внутреннего темпа. Величина этого темпа определяет степень связи метаболирующего простона в этом состоянии. Это сводится, как мы ниже покажем, к дефекту массы простона.

Энергия гравитационного поля не имеет расходимостей, так как плотность покоя гравитационного заряда (6.2) в квантовой теории определяется нелокально посредством волновой функции простона. (11)

9. Гравитация вакуума. Вакуум содержит две компоненты: 0-вакуум и Δ-вакуум (4.3.3.3). Плотность энергии 0-вакуума постоянна, (1)
поэтому его гравитационный потенциал и заряд равны нулю. Плотности энергии Δ-вакуума (4.3.3.5)

$$e_\Delta = \frac{c_\Delta}{T^2} \tag{2}$$

соответствует **гравитационный потенциал Δ-вакуума**

$$\varphi_\Delta = -\ln e = -\ln c_\Delta + 2\ln T = -\ln c_\Delta + 2\ln\sqrt{t^2 - r^2}. \tag{3}$$

Откуда, используя (5.1), вычисляем **плотность гравитационного заряда Δ-вакуума**

$$\rho_\Delta = \frac{1}{4\pi}\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{2\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{t^2-r^2}\right) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^3}{t^2-r^2}\right) = \frac{-1}{2\pi r^2}\left(\frac{3r^2}{t^2-r^2} + \frac{2r^4}{(t^2-r^2)^2}\right) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{3}{T^2} + \frac{2r^2}{T^4}\right) = -\begin{cases}\frac{3}{2\pi T^2}, & r \ll T\\ \frac{5}{2\pi T^2}, & r \to T\end{cases}, \quad c_\Delta \neq 0, \infty. \tag{4}$$

Плотность гравитационного заряда Δ-вакуума вполне определённая функция, если только c_Δ не равно 0 или бесконечности. На фоне плотности

гравитационного заряда прогаза (6.9), плотность гравитационного заряда Δ-вакуума в $\sim T^3$ раз меньше, то есть по крайней мере для достаточно большого возраста Вселенной **гравитацией вакуума можно пренебречь**, хотя его плотность энергии огромна. **Гравитационный заряд вакуума отрицательный**.

В отношении происхождения шумового электромагнитного поля гравитации заметим, что глобальная волна единого поля сама по себе никакого электромагнитного поля не создаёт, так как плотность заряда этой волны равна нулю. То есть **шумовое электромагнитное поле происходит только от флуктуационной компоненты единого поля**, которая может создавать электромагнитные поля посредством зарядов.

Являясь электромагнитной радиацией, давно испущенной протистонами или ожидающей поглощения в далёком будущем, вакуум представляет собой рассеянную радиацию, равномерно распределённую по Вселенной. Поэтому **вакуум не создаёт гравитационных сил** и почти не наблюдаем в реликтовой системе отсчёта, хотя проявляет себя в радиационных эффектах типа лэмбовского сдвига частоты. Вакуум можно называть **пустотой** лишь условно (в смысле постоянной осреднённой в пространстве возраста T плотности энергии). Вакуумная радиация характеризуется полным равновесием между излучением и поглощением. Вакуум настолько однороден и изотропен, что не влияет на гравитационное поведение вещества, определяемое самим веществом, то есть простонами.

В отличие от вакуумной радиации, наблюдаемая часть радиации статистически неоднородна. Она переносит информацию из **конечного прошлого**, которая затем переизлучается в **бесконечное будущее**.

10. Конвергенция потоков энергии вакуума. Интеграл от e_Δ (9.2) по 3-пространству всей Вселенной является энергией покоя (массой) Δ-вакуума (M_Δ) в инерциальной системе отсчёта,

$$M_\Delta = 4\pi c_\Delta \int\limits_0^T \frac{r^2\,dr}{t^2 - r^2} = [\text{Прудников, 1.2.10.18}]$$

$$= 4\pi c_\Delta \left(-r + \frac{T}{2} \ln \left| \frac{r+T}{r-T} \right| \right). \tag{1}$$

Эта величина бесконечно большая, поэтому может рассматриваться как сохраняющаяся. (Интеграл расходится при $r \to T$.)

Запишем (9.2) в изначальной системе координат любой точки Вселенной

$$e_\Delta = \frac{c_\Delta}{T^2} = \frac{c_\Delta}{t^2 - r^2}, \tag{2}$$

откуда видно, что в любой точке $r = 0$ Вселенной плотность энергии убывает пропорционально $1/t^2$, хотя для любой конечной **замкнутой** области заданной формы, расширяющейся вместе со всей Вселенной пропорционально T, необходимо

убывание плотности энергии пропорционально $1/t^3$. Это говорит о том, что эта область замкнутой не является, а в неё поступает извне поток энергии, который мы назовём **конвергентным**. При этом **источником конвергентного потока энергии являеться изотропная граница Вселенной, плотность энергии на которой бесконечна**. Здесь уместно напомнить, что в отличие от плотности энергии, которая не интегрируема на границе Вселенной, плотность заряда здесь интегрируема, поэтому **рассматривать границу Вселенной как источник зарядов нельзя**. Заряды появляются попарно вблизи этой границы и тем реже, чем дальше от неё. Происхождение конвергентного потока энергии на границе Вселенной нас не должно беспокоить, так как вблизи этой границы (при $T \to 0$) понятие протистона не определено. Здесь полным является только описание непосредственно единым полем. Согласно (1), **конвергенция потоков энергии не приводит к росту средней плотности энергии во Вселенной, она лишь замедляет её убывание**. Возьмём дивергенцию от обеих частей (4.2.6.5) и, с учётом (4.3.3.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{S}_\Delta = -\Delta p_\Delta = \Delta e_\Delta = \frac{\partial^2 e_\Delta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p_\Delta}{\partial t^2},$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{S}_\Delta = \frac{\partial e_\Delta}{\partial t} + C_d,$$

где C_d – константа интегрирования. Примем $C_d = 0$, так как при $t \to \infty$ плотность энергии стремится к нулю и следовательно исчезает и плотность её потока. Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{S}_\Delta = \frac{\partial e_\Delta}{\partial t}, \tag{3}$$

С другой стороны **закон сохранения энергии** $\partial T_0^\beta/\partial x^\beta = 0$ (I.9.4.3.10) можно записать в противоречащем (3) виде

$$\operatorname{div}\mathbf{S}_\Delta = -\frac{\partial e_\Delta}{\partial t}. \tag{4}$$

То есть **для плотности энергии Δ-вакуума закон сохранения энергии не выполняется** в силу существования конвергентного потока энергии. При этом каждый конечный объём не является механически замкнутой системой. Замкнутость восстанавливается только после вычитания из плотности энергии её вакуумной части, что обычно автоматически выполняется, в силу **термодинамического равновесия вакуума** относительно наблюдателя.

Вычислим дивергенцию потока прогаза. Для этого мы не можем использовать закон сохранения энергии, но можем использовать выражение (3). Тогда из (2)

$$\operatorname{div}\mathbf{S}_\Delta = c_\Delta \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t^2 - r^2} = \frac{-2c_\Delta\, t}{(t^2 - r^2)^2} < 0. \tag{5}$$

Это выражение означает втекание (конвергенцию) энергии в каждый элемент объёма.

11. Космологические потоки энергии вакуума через сферу. Поток энергии Φ_r через поверхность шара радиуса r можно получить, интегрируя дивергенцию $\mathbf{S}_\Delta$ по объёму этого шара,

$$\Phi_r = 4\pi \int\limits_0^r r^2 \operatorname{div} \mathbf{S}_\Delta \, dr = -8\pi c_\Delta t \int\limits_0^r \frac{r^2}{(r^2 - t^2)^2} \, dr =$$

$$[\text{Прудников, 1.2.10.22}] = -8\pi c_\Delta t \left(\frac{-r}{2(r^2 - t^2)} + \frac{1}{4t} \ln \left| \frac{r-t}{r+t} \right| \right) \Big|_0^r =$$

$$= \frac{-4\pi c_\Delta t r}{t^2 - r^2} - 2\pi c_\Delta \ln \frac{t-r}{t+r}, \quad t > r \geqslant 0. \tag{1}$$

(Результат интегрирования легко проверить дифференцированием.) При $r \ll t$ аргумент логарифма стремится к 1. При этом логарифмическая функция аппроксимируется линейной функцией.

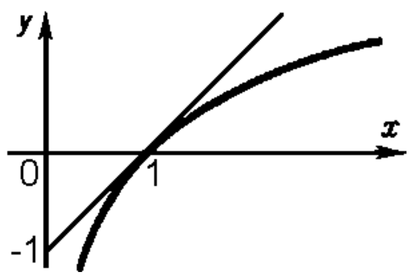


Рис. 207.1.

Действительно,

$$\ln x_{|x=1} = 0, \quad \frac{d}{dx} \ln x = 1_{|x=1},$$

то есть касательная к кривой в точке $x = 1$ имеет наклон 45° относительно оси $\vec{x}$. Следовательно уравнение этой касательной: $y = x - 1$. И тогда имеем в точке $x = 1$ аппроксимацию

$$\ln x_{|x \to 1} = x - 1, \tag{2}$$

а в применении к интересующему нас выражению, имеем

$$\ln \frac{t-r}{t+r} \to \frac{t-r}{t+r} - 1 = \frac{-2r}{t+r} = \frac{-2r(t-r)}{t^2 - r^2}, \quad r \to 0. \tag{3}$$

Тогда

$$\Phi_r = \frac{-4\pi c_\Delta t r}{t^2 - r^2} + \frac{4\pi c_\Delta r(t-r)}{t^2 - r^2} = \frac{-4\pi c_\Delta r^2}{t^2 - r^2}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что при $r \ll T$ второй (логарифмический) член в (1) почти равен первому по абсолютной величине, но противоположен ему по знаку. То есть поток

Φ_r можно представить как сумму двух потоков энерии через поверхность шара во взаимно противоположных направлениях. То есть поток внутрь шара равен

$$\Phi_{\leftarrow} = \frac{-4\pi c_{\Delta} tr}{t^2 - r^2}, \tag{5}$$

а поток наружу шара равен

$$\Phi_{\rightarrow} = -2\pi c_{\Delta} \ln \frac{t-r}{t+r} \rightarrow \frac{4\pi c_{\Delta} r(t-r)}{t^2 - r^2}. \tag{6}$$

Поделив поток Φ_r на площадь поверхности шара $4\pi r^2$ мы получим отрицательное давление, точно равное отрицательному давлению прогаза

$$p = -c_{\Delta}/T^2 = -e. \tag{7}$$

Таким образом поток энергии вакуума на замкнутую границу любой конечной области (каковой может быть **наблюдатель**) оказывается входящим, что является особым свойством инвариантного тензора плотности энергии-импульса. **Конвергентный поток** $\Phi_{\rightarrow}$ слегка превышает **дивергентный поток** $\Phi_{\leftarrow}$.

Конвергентный поток происходит от малого преобладания излучения протистонов над поглощением. Это преобладание тем больше, чем меньше возраст Вселенной. В результате возникает поток излучения из прошлого в настоящее. Пересекая всякую большую замкнутую область и постепенно переизлучаясь в прогазе, этот поток выходит из неё с некоторой потерей энергии относительно входа в неё, так как испытывает доплеровское красное смещение в расширяющемся вместе со всей Вселенной прогазе. То есть прогаз в этой области частично поглощает конвергентный поток и тем больше, чем больше размер этой области.

Эта, поглощаемая прогазом часть конвергентного потока обнаруживается как среднее давлением (7), действующее с внешней стороны относительно произвольного наблюдателя, то есть в направлении из прошлого в настоящее относительно наблюдателя. В этом смысл **стрелы времени**. Учитывая, что Вселенная почти везде пуста, **произвольный наблюдатель** почти всегда обнаружит себя в пустом космосе, наполненном лишь универсальными космическими лучами. Поэтому (7) надо понимать как давление этих лучей.

12. Астрономические скорости. Частица, освобождённая от всех сил, кроме гравитационной, не может оставаться неподвижной, так как испытывает гравитационное ускорение. Вещество Вселенной структурировано гравитационным полем так, что оно всё связано в **квази-точечные астрономические тела**, движущиеся друг относительно друга по законам **небесной механики**, то есть движение управляется практически только гравитационными силами. Между астрономическими телами сохраняется относительно слабое взаимодействие столкновительного типа, которое подчиняет их движение и термодинамическим законам. В результате астрономические тела образуют среду с **астрономическими скоростями**, которые с ростом числа составляющих простонов каждого тела

стремятся к нулевому значению, характеризующему неподвижность относительно реликтовой системы отсчёта, глобально связанной с реликтовым излучением. Поэтому достаточно большие астрономические тела движутся с нерелятивистскими скоростями в реликтовой системе отсчёта

$$u^0_{\mathrm{A}} \approx 1. \tag{1}$$

§2. Геометризация гравитации.

1. Близость физического вакуума к термодинамическому равновесию обеспечивается большим временем существования Вселенной, в течение которого вакуумное шумовое электромагнитное поле, приходящее от далёких областей становится подавляюще большим по сравнению с радиацией соседних протистонов, электрический заряд которых убывает пропорционально $1/T^3$. Инвариантный тензор плотности энергии-импульса $G_\alpha^\beta = e\delta_\alpha^\beta$ (1.2.1) определяет гравитационное поле как приращения (вариации) δe инвариантной плотности энергии e, относительно её среднего значения $\bar{e}$ по Вселенной данного возраста

$$G_\alpha^\beta = (\bar{e} + \delta e)\delta_\alpha^\beta = \bar{e}\delta_\alpha^\beta + \delta e \cdot \delta_\alpha^\beta = V_\alpha^\beta + T_\alpha^\beta, \tag{1}$$

где δ_α^β – постоянный инвариантный метрический тензор прямого пространства-времени, $V_\alpha^\beta, T_\alpha^\beta$ – тензоры плотности энергии-импульса вакуума и гравитационного поля.

Но гравитационное поле можно определить иначе – как метрический тензор искривлённого пространства, взаимно-однозначно проецируемого на исходное пространство-время так, что инвариантный тензор G_α^β имеет одинаковые значения в соответствующих точках обоих пространств, а в кривом пространстве с метрическим тензором g_α^β значение плотности энергии постоянно и равно $\bar{e}$

$$G_\alpha^\beta = \bar{e} g_\alpha^\beta. \tag{2}$$

Приравнивая (1) и (2), найдём метрический тензор кривого пространства в системе координат прямого пространства

$$g_\alpha^\beta = \left(1 + \frac{\delta e}{\bar{e}}\right)\delta_\alpha^\beta. \tag{3}$$

Этот тензор очевидно инвариантный, хотя не постоянный. Но если пользоваться произвольной системой координат, то приращение δe, вообще говоря, не будет скаляром. Тогда метрический тензор не будет инвариантным

$$G_\alpha^\beta = \bar{e} g_\alpha^\beta \neq (\bar{e} + \delta e)\delta_\alpha^\beta, \tag{4}$$

так как дифференциал δe нековариантен (I.2.6.2.*).

Из (3) следует, что **нормальное гравитационное поле вполне геометризуемо посредством одного лишь масштабного скалярного поля**. Однако в **экзотических гравитационных полях**, наблюдаемых как **чёрные дыры**, не исключена ситуация, когда тензор плотности энергии-импульса прогаза не возможно достаточно точно определить как инвариантный. В этом случае гравитацию удобно описать геометрически, используя метрику (4), сохраняя возможность полного описания единым полем в прямом пространстве. В любом случае очень точное описание гравитационного поля требует использования неинвариантного тензора плотности энергии-импульса G_α^β, то есть **спин гравитационного поля равен 2**.

Здесь идеология гравитации ДФ стыкуется с идеологией ОТО, не противореча ей, а лишь накладывая на метрический тензор дополнительное условие, допускающее использование прямолинейной метрики. Это условие снимает неопределённости, существующие в ОТО, то есть уменьшает степень её абстрактности и допускает интегральные законы сохранения. Таким образом теория гравитации ДФ относится к типу биметрических и не отличается от ОТО при условии существования во Вселенной системы координат, в которой метрический тензор всюду инвариантен. ДФ исходит именно из этого условия, вытекающего из спектрального представления единого поля.

Уравнение Эйнштейна общей теории относительности [Ландау 2, (95,8)] является следствием **принципа эквивалентности гравитационной и инертной массы**. В слабых гравитационных полях этот принцип не зависит от вида теории гравитации, а в сильных полях он может нарушаться и при этом по-разному для разных теорий. В ОТО масса играет роль гравитационного заряда. В ДФ **гравитационная и инертная массы равны по определению**, но гравитационным зарядом является не масса, а величина отличающаяся от массы космологически медленно изменяющимся коэффициентом по формуле (1.7.8)

$$q_g = \frac{3km_m u^0}{4\pi^2 q^2}. \tag{5}$$

Теория гравитации в ДФ строится в прямом пространстве-времени, но допускает геометризацию метрическим тензором. Поэтому ДФ позволяет легко пользоваться двумя метриками: плоской (с постоянным метрическим тензором) и искривлённой (с инвариантным, но переменным метрическим тензором). В обеих метриках выполняется принцип эквивалентности. Таким образом теория гравитации ДФ **биметрическая** (аналогично РТГ). Она не противоречит ОТО, но накладывает на неё **ограничение на вид тензора кривизны**. При этом в плоской метрике ДФ действуют все механические законы сохранения не только в дифференциальной но и в интегральной форме, чего нет в ОТО. Ясно, что ОТО было бы неверно называть неправильной теорией, но она избыточно общая, то есть допускает слишком широкий спектр метрик, выходя в нефизические области. ДФ в сильных гравитационных полях сохраняет все механические законы.

Для гравитационных зарядов, имеющих особые точки, кривизна пространства с геометризованной гравитацией в окрестностях особенностей отрицательна (типа граммофонной трубы в двумерной модели). В одномерной модели это демонстрирует рисунок. Постоянная составляющая плотности энергии влияет только на масштаб

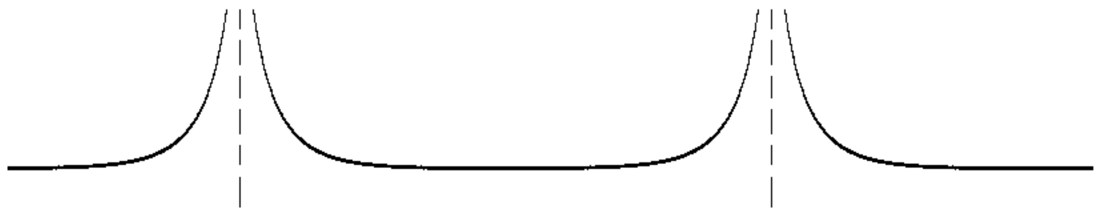


Рис. 207.2.

4-пространства. Кривизна пространства заключается лишь в локальных изменениях масштабного коэффициента, то есть в локальном **изотропном** сжатии или растяжении распределения энергии. Представление об изменении метрики по пространству даёт одномерная функция, изображённая на рисунке кривой линией, являющаяся лишь сечением 3-поверхности, изображающей полную 3-х-мерную функцию. Кривизна этой 3-поверхности отображает саму инвариантную кривизну пространства.

Нулевой кривизне соответствует плоское (**пустое**) пространство. Благодаря интегрируемости особенности гравитационного заряда и статистическому сглаживанию, непрерывное распределение плотности энергии может быть представлено множеством зарядов, распределённых в пространстве.

Как и в ОТО гравитация в ДФ геометризуется, но более просто формулой (4), которая даёт связь между инвариантной плотностью энергии (массы) e прогаза и кривизной некоторого **координатного пространства**, метрика которого определена как функция пространства времени, обеспечивающая совпадение ускорения геодезических линий координатного пространства с ускорением линий потока энергии (реализуемых простонами).

Причём эта теория гравитации не нуждается в геометризации пространства, то есть вполне описывается в плоском пространстве, хотя **геометрическое представление гравитации интересно методически**. В ДФ роль **уравнения гравитационного поля** исполняет волновое уравнение

$$\Box e = 0. \tag{6}$$

Умножая уравнение (1) на $8\pi G/c^4$ и записывая его в системе отсчёта, где δ_α^β преобразуется в метрический тензор g_α^β, получим (1) в форме **уравнения Эйнштейна**:

$$\underline{G}\,{}_\alpha^{\ \beta} + \Lambda g_\alpha^\beta = (8\pi G/c^4) T_\alpha^\beta, \tag{7}$$

где

$$\underline{G}\,{}_\alpha^{\ \beta} = 8\pi G G_\alpha^\beta / c^4 \quad \text{(\textbf{тензор Эйнштейна})}, \tag{8}$$

$$\Lambda g_\alpha^\beta = -8\pi G V_\alpha^\beta / c^4, \tag{9}$$

$$G = c^4/(8\pi), \tag{10}$$

хотя в ДФ G является константой лишь в космологическом смысле.

Решая уравнение (6) и найдя 4-ускорение $w = \nabla^\mu \ln e$ (1.3.5) геодезических линий, легко получим **геометрическое представление гравитации**.

Благодаря гравитационной неустойчивости движение всех тел во Вселенной принципиально нестационарно, однако сама же гравитация приводит к такой грандиозной конденсации вещества, когда возникают скопления тел огромных размеров с огромными и малыми расстояниями между ними, так что среди них долгое время могут существовать и почти замкнутые, в том числе почти стационарные, состояния вещества. Несмотря на грандиозность плотностей конденсированных космических масс, их величина ничтожна относительно почти ненаблюдаемой космологически постоянной плотности массы прогаза и электромагнитного вакуума.

§3. Гравитон.

В ДФ термин **гравитон** является общим для любой квантовой частицы, для которой гравитационное взаимодействие является главным. Сначала он используется для простейшей частицы этого типа, а далее это понятие усложняется по мере необходимости, в том числе используется для безмассовой квантовой частицы со спином $\leqslant 2\hbar$, переносящей только гравитационное взаимодействие.

1. Волновая функция гравитона. Рассмотрим произвольную волновую функцию возмущения вакуума (6.8.5.3). Её уравнение КГФ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = -\mu^2 \psi, \quad \mu^2 \leqslant k^2 \tag{1}$$

финитных решений без особенностей не имеет. Но существует простейшее финитное частное решение с особой точкой, имеющее вид

$$\psi = \psi_r \psi_t, \tag{2}$$

где

$$\psi_r = \mathrm{e}^{-br}/r, \quad \psi_t = \mathrm{e}^{i\nu t}, \tag{3}$$

$\mathrm{Re}\, b > 0$. Действительно. Вычислим оператор Лапласа для ψ_r в сферических координатах [Корн, (таб. 6.5-1)]

$$\Delta\psi_r = \Delta_r \psi_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi_r}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial r} = -\frac{b}{r}\mathrm{e}^{-br} - \frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-br},$$

$$\Delta\psi_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-br\mathrm{e}^{-br} - \mathrm{e}^{-br}) =$$
$$= \frac{1}{r^2}(-b\mathrm{e}^{-br} + b^2 r\mathrm{e}^{-br} + b\mathrm{e}^{-br}) = \frac{b^2}{r}\mathrm{e}^{-br} = b^2\psi_r.$$

Далее
$$\frac{\partial^2\psi_t}{\partial t^2} = -\nu^2\mathrm{e}^{i\nu t} = -\nu^2\psi_t,$$
$$\Box\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = \psi_r(-\nu^2\psi_t) - \psi_t\cdot b^2\psi_r.$$

Последнее выражение совпадает с (1) только при $\nu^2 + b^2 = \mu^2$, то есть с точностью до постоянного множителя имеем финитное решение
$$\psi = \psi_r\psi_t = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{-br+i\nu t}. \tag{4}$$

Так как 4-вектор μ^μ времени-подобный, то пару чисел ν, b в выражении $\nu^2+b^2=\mu^2$ нельзя рассматривать как квадраты временной и пространственной компонент этого 4-вектора, но в этом качестве можно рассматривать (в **системе, сопутствующей гравитону**) пару чисел ν, ib, то есть 4-вектор μ, в отличие от вещественного 4-вектора k^μ, в случае гравитона – комплексный: (6.1.2.10)
$$\mu^\mu = (\nu, ib), \quad \mu^2 = \nu^2 + b^2. \tag{5}$$

Это решение демонстрирует возможность существования **финитных стационарных волновых функций** на фоне постоянной составляющей $\check{c}_q$ квадрата модуля единого поля. Оно имеет особую точку $r = 0$. В этой точке оно не ограничено. В качестве простейшего ограниченного финитного решения можно использовать решение (4), обнуляя его внутри шара произвольного радиуса r_g, где оно остаётся решением уравнения (1), а точечная особенность обращается в особенность на сфере, сохраняя нулевой объём. При этом **функция на особенности ограничена, что позволяет удовлетворить условию нормальной гравитации** (6.2.2.4). Следовательно **гравитон – гравитационно нормальная частица**. Любая другая форма особенности, кроме **особой сферы**, нарушает условия разделения переменных для уравнения (1). Поэтому простейшее стационарное финитное решение имеет вид
$$\psi = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-br+i\nu t}/r, & r \geqslant r_g \\ 0, & r < r_g \end{cases}, \quad \psi\psi^* = \begin{cases} a\mathrm{e}^{-2br}/r^2, & r \geqslant r_g \\ 0, & r < r_g \end{cases}, \tag{6}$$
где
$$a = AA^*. \tag{7}$$

Такую волновую функцию будем называть **волновой функцией гравитона**. Заметим, что волновая функция гравитона, записанная в виде (6) во всяком случае **не ограничивает общности**, так как (6) включает в себя и (4) при $r_g = 0$. Наличие особенности, совместимой со статистическим смыслом волновой функции,

превращает её в **обобщённую функцию**. Ниже выяснится (3.4.8), что эта **особенность не нарушает неразрывности 4-тока** (6.1.1.2), необходимой для квантовых множеств.

Принцип суперпозиции позволяет на основе функций (6) получить множество других финитных волновых функций, механическая реализация которых зависит от их устойчивости.

Найдём нормирующий множитель a гравитона из условия нормирования

$$\int \psi\psi^*\, dv = 1 = 4\pi \int_{r_g}^{\infty} \psi\psi^*\, r^2\, dr = 4\pi \frac{a}{2b} \mathrm{e}^{-2br_g}, \tag{8}$$

откуда

$$a = \frac{b}{2\pi} e^{2br_g}. \tag{9}$$

Система волновых функций нормона полна при любом значении заряда и цвета, поэтому **любая простая квантовая частица, в том числе гравитон имеет тот же спектр заряда и цвета, что и нормон**. (10)

Волновая функция гравитона является простейшим финитным решением уравнения КГФ, и поэтому она универсальна для построения любых финитных решений этого уравнения. **Наблюдаемость финитных волновых функций** в качестве **элементарных частиц** определяется их устойчивостью к возмущениям.

Заметим, что определённый здесь гравитон не является элементарным точечным гравитационным зарядом (каковым является протистон), но он является простейшим квантовым стационарным финитным возмущением вакуума. **Из гравитонов строятся все наблюдаемые элементарные частицы**. (11)
При $\nu = 0$ волновая функция гравитона не имеет никаких осцилляций, что позволяет соответствующее (незаряженное) состояние гравитона рассматривать как основное состояние квантовых частиц [Ландау 3,§20].

2. Локально-волновое уравнение гравитона. Подставим волновую функцию гравитона в локально-волновое уравнение (6.1.2.1)

$$\nabla^\mu \psi = i\mu^\mu \psi, \tag{1}$$

чтобы найти 4-вектор μ^μ этого уравнения, соответствующий волновой функции гравитона. Учитывая (1.4),(1.5), будем искать его в виде

$$\mu^\mu = (\nu, ib), \quad \mu^2 = \mu\mu^* = \nu^2 + b^2 = \nu\nu^* + bb^* \tag{2}$$

где компоненты ν, b – комплексные. Производные по r будем обозначать штрихом, а по t – точкой. Так как из (1.6)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \dot{\psi} = (-\dot{b}r + i\dot{\nu}t + i\nu)\psi,$$

$$\nabla\psi = \psi' = (-b'r - b + i\nu' t - 1/r^2)\psi,$$

то

$$\nabla^\mu\psi = (\partial/\partial, -\nabla)\psi =$$
$$= i((i\dot{b}r + \dot{\nu}t + \nu), (-ib'r - ib - \nu' t - i/r^2))\psi = i((f_t + \nu), (f_r - ib - i/r^2))\psi,$$

где

$$f_t = i\dot{b}r + \dot{\nu}t, \quad f_r = -ib'r - \nu' t, \tag{3}$$

тогда, сравнивая с (1) и учитывая обращение волновой функции внутри радиуса r_g в 0, находим

$$\mu^\mu = \begin{cases} (f_t + \nu, f_r - i/r^2 - ib), \ r \geqslant r_g \\ 0, \ r < r_g \end{cases}, \tag{4}$$

откуда для удовлетворения локально волнового уравнения (1) необходимо (2):

$$\mu^2 = \mu^\mu\mu_\mu = \mu^\mu\mu^*_\mu = \nu^2 + b^2 = \nu\nu^* + bb^* =$$

$$= \begin{cases} (f_t + \nu)(f^*_t + \nu^*) + (f_r - i/r^2 - ib)(f^*_r + i/r^2 + ib^*), \ r \geqslant r_g \\ 0, \ r < r_g \end{cases}, \quad \ll k^2, \tag{5}$$

где условие $\mu^2 \ll k^2$ означает гравитационную нормальность гравитона. Вещественность μ^2 очевидна.

Подразумевыая условие $r < r_g$, можно записать, сокращая μ^2:

$$f_t f^*_t + \nu f^*_t + \nu^* f_t + (f_r - i/r^2)(f^*_r + i/r^2) - ib(f^*_r + i/r^2) + ib^*(f_r - i/r^2) = 0. \tag{6}$$

Это **локально волновое условие для гравитона**, записанное в наиболее общем виде.

Для обеспечения **стационарности гравитона** положим в (3) $f_t = 0$, $\nu' = 0$, тогда локально волновое условие (6) примет вид

$$(-ib'r - i/r^2)(ib'^*r + i/r^2) - ib(ib'^*r + i/r^2) + ib^*(-ib'r - i/r^2) = 0,$$

откуда очевидно, что оно выполняется при

$$b' = -1/r^3, \quad f_r = -ib'r = i/r^2$$

или

$$b = \frac{1}{2r^2} + b_0, \quad f_r = i/r^2, \tag{7}$$

где b_0 – константа интегрирования. Тогда из (4)

$$\mu^\mu = \begin{cases} (\nu, -i(b_0 + 1/2r^2), \ r \geqslant r_g \\ 0, \ r < r_g \end{cases}. \tag{8}$$

При таком выборе μ^μ для гравитона, волновое уравнение КГФ и локальное волновое уравнения соответствуют друг другу с погрешностью $1/2r^2$ относительно величины b, что может быть достаточно при

$$r_g \gg 1/\sqrt{2b}. \tag{9}$$

Согласно (1.6) влияние члена $1/2r^2$ в выражении (7) на волновую функцию гравитона сводится к умножению её на $\mathrm{e}^{-1/2r}$, что изменяет её форму, но тем меньше, чем больше r.

3. Дробные зарядовые состояния и частота гравитона. Так как нормон является плоской волной, то система нормонов при каждом допустимом для них значении заряда полна и позволяет построить из них гравитон с таким же значением заряда. Поэтому вакуум, который можно рассматривать как суперпозицию всех нормонов, содержит с определённой вероятностью **гравитоны с электрическим зарядом** q_{gr}, определяемым зарядом нормона, имеющего спектр заряда (6.3.6.6), то есть

$$q_n = 0, \pm q/3, \pm 2q/3, \pm q. \tag{1}$$

Но значение заряда q или $-q$ означает неизменный при метаболизме знак волнового 4-вектора нормона который при этом является времени-подобным и суперпозиция таких нормонов не может образовать волновую функцию с пространственно-подобным (как у гравитона) локальным 4-вектором μ^μ. При других значениях заряда это возможно, так как при этом знаки компоненты μ^0 зарядовых множителей нормона могут быть разными (6.3.6.2). Тогда для гравитона остаётся спектр заряда вида

$$q_{gr} = 0, \pm q/3, \pm 2q/3, \tag{2}$$

то есть единственным целочисленным значением заряда гравитона является нулевой заряд. Заряд стационарного состояния гравитона распределён центрально симметрично с плотностью (1.6)

$$\varrho = q_{gr}\psi\psi^* = \frac{bq_{gr}}{2\pi}\mathrm{e}^{-2br}/r^2, \quad r \geqslant r_g; \qquad \varrho = 0, \quad r < r_g. \tag{3}$$

Так как эта плотность стационарна, то **излучение отсутствует**.

В случае **единичного заряда** $(\pm q)$ метаболирующего нормона его волновой 4-вектор μ^μ ультра-релятивистский, то есть его временна́я компонента μ^0 практически равна модулю пространственной компоненты $\mu^0 = |\boldsymbol{\mu}|$. Если же заряд не единичный, то метаболирующий нормон имеет чередующийся знак временно́й компоненты, так что средняя величина этой компоненты пропорциональна заряду нормона, знак которого чередуется вместе со знаком этой компоненты, тогда

$$\frac{\mu^0}{|\boldsymbol{\mu}|} = \frac{q_{gr}}{|q|}, \tag{4}$$

а так как гравитон является суперпозицией метаболирующих нормонов, отличающихся только знаком 3-вектора $\boldsymbol{\mu}$, но не его модулем, то используя (2.2) для гравитона получим

$$\frac{\mu^0}{|\boldsymbol{\mu}|} = \frac{\nu}{b} = \frac{q_{gr}}{|q|}, \tag{5}$$

тогда из (2) для частоты гравитона ν имеем спектр значений

$$\nu = 0, \pm b/3, \pm 2b/3 = bz_q, \tag{6}$$

где

$$z_q = 0, \pm 1/3, \pm 2/3 \tag{7}$$

– **зарядовое квантовое число**. А для модуля локального волнового 4-вектора согласно (1.5) имеем спектр

$$\mu = b\sqrt{z_q^2 + 1} = (1, \quad 1,035744169\ldots, \; 1,130403814\ldots)b. \tag{8}$$

4. Гравитационный потенциал, локальный темп и радиус гравитона. Гравитационный потенциал движущегося точечного гравитационного заряда (простона) (1.8.4) в реликтовой системе отсчёта можно записать в виде

$$\varphi_u = -\frac{q_g u_q^0}{r}, \tag{1}$$

где согласно (1.7.8)

$$q_g = \frac{3|k|m_m}{4\pi^2 q^2} = \frac{|k|\beta}{2\pi^2}. \tag{2}$$

Внутри гравитона **локальный темп** u_q^0 является функцией расстояния r:

$$u_q^0 = u_r^0(r). \tag{3}$$

Согласно (3.3.6.6), опуская акцент осреднения темпа, имеем

$$\beta = \frac{|k|S_J}{\pi}u^0. \tag{4}$$

Тогда гравитационный потенциал (1) имеет вид

$$\varphi_u = -\frac{q_g u_r^0}{r} = -\frac{k^2 S_J u^0 u_r^0}{2\pi^3 r}. \tag{5}$$

В силовом поле гравитона, метаболирующий простон имеет темп $u_r^0(r)$, растущий в направлении центра гравитона. То есть линии тока ускоряются в направлении центра гравитона, но это не значит, что все скорости направлены к центру.

Метаболирующие звенья с равной вероятностью имеют скорость, направленную в любую сторону.

Вдали от этого центра темп метаболирующих звеньев протистонов равен u^0. Разность $u_r^0 - u^0$ темпов звеньев в поле гравитона на расстоянии r и на большом расстоянии ($r \to \infty$) от гравитона равна соответствующей разности гравитационных потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_u(r_r) - \varphi_u(\infty)$, взятой с противоположным знаком (1.3.8)

$$u_r^0 - u^0 = -\Delta\varphi, \tag{6}$$

тогда, принимая $\varphi_u(\infty) = 0$ и учитывая (5), имеем уравнение относительно u_r^0

$$u_r^0 = u^0 - \Delta\varphi = u^0 - \varphi_u(r) = u^0 + \frac{k^2 S_J u^0 u_r^0}{2\pi^3 r},$$

решая которое, получим

$$u_r^0 = \frac{u^0}{1 - \frac{k^2 S_J u^0}{2\pi^3 r}}. \tag{7}$$

Так как темп величина положительно определённая, то необходимо условие

$$r > \frac{k^2 S_J u^0}{2\pi^3},$$

что естественно определяет нижнее предельное значение r_g **области доступности** простона в волновой функции гравитона

$$r_g = \frac{k^2 S_J u^0}{2\pi^3} < r. \tag{8}$$

При этом минимальном значении r темп простонов гравитона имеет бесконечно большое значение ($u_r^0 \to \infty$, $r \to r_g$), которое, однако, никогда не достигается, то есть u_r^0 всегда конечно. Существование **области недоступности** для потока плотности вероятности метаболирующего в гравитоне простона можно интерпретировать как его **отражение от особой сферы гравитона**. При этом **4-ток остаётся неразрывным**.

Если гравитон находится в среде, которая не является однородной и изотропной, например, в электромагнитном поле других частиц (к собственному полю он не чувствителен в силу корпускулярной калибровки), то изменить свою сферическую форму в гравитационно нормальных областях он не может (в силу изотропности μ^2). Это может случится только в экзотически неоднородных гравитационных полях. Но возможно изменение радиуса r_g, если внешние электромагнитные поля локально изменяют осреднённое значение u^0. Возмущение u^0 обычно происходит в сторону его увеличения, чему соответствует увеличение r_g. Электромагнитные поля способны увеличить осреднённый вакуумный темп протистонов без изменения их концентрации.

Носителем функции называется часть области её определения, где функция отлична от нуля. **Носителем волновой функции гравитона** является не всё

3-пространство, а только его часть, внешняя по отношению к сфере радиуса r_g (**радиуса гравитона**).

Выражение (7), используя (8), можно записать в виде

$$u_r^0 = \frac{u^0}{1 - r_g/r} = \frac{u^0 r}{r - r_g}, \quad r \geqslant r_g \tag{9}$$

а (5) – в виде

$$\varphi_g = -\frac{r_g}{r} u_r^0 = -\frac{u^0 r_g}{r - r_g} = -u_r^0, \quad r \geqslant r_g. \tag{10}$$

5. Квантовая теорема вириала. (Сравните с [Ландау 2, с. 114].) Пусть j-тая квазиточечная частица с определёнными средним темпом и средней массой является частью связанной замкнутой системы (несущей частицы), определённой её стационарной волновой функцией над j-той частицей (и возможно другими). Поэтому механические законы сохранения понимаются в статистическом смысле. Связанность такого состояния движения выражается в финитности волновой функции. В частности такая система может содержать только одну квазиточечную самосвязанную частицу.

Рассмотрим движение такой частицы на составных интервалах $(a, b)_i$ её мировой линии, которым соответствует отрезок времени $\Delta t = t(b) - t(a)$ в сопутствующей несущей частице системе отсчёта. Пусть этот отрезок достаточно велик для всех условий этой задачи.

Закон сохранения 3-импульса

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 \tag{1}$$

осредним **по времени**. При этом среднее значение производной $\partial T^{i0}/\partial t$, как и вообще производной от всякой величины, значения которой меняются в конечном интервале, равно нулю. Действительно, пусть f – такая величина. Тогда среднее значение производной df/dt за интервал времени Δt есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_0^{\Delta t} \frac{df}{dt}\, dt = \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t}.$$

Поскольку значения $f(t)$ меняются только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении Δt это среднее значение стремится к нулю. Тогда из (1)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \bar{T}_i^k = 0. \tag{2}$$

Умножим это уравнеие на x^i и проинтегрируем по всему пространству. Интеграл преобразуем по теореме Гаусса, имея в виду, что (благодаря финитности движения) на бесконечности $T_i^k = 0$, и поэтому интеграл по поверхности исчезает:

$$0 = \int x^i \frac{\partial \bar{T}_i^k}{\partial x^k}\, dv = -\int \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \bar{T}_i^k\, dv = -\int \delta_k^i \bar{T}_i^k\, dv, \tag{3}$$

откуда

$$\int \bar{T}_i^i \, dv = 0. \tag{4}$$

На основании этого равенства мы можем написать для интеграла от $\bar{T}_\alpha^\alpha = \bar{T}_i^i + \bar{T}_0^0$ (где $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3$):

$$\int \bar{T}_\alpha^\alpha \, dv = \int \bar{T}_0^0 \, dv = \mathcal{E}, \tag{5}$$

где $\mathcal{E}$ – полная энергия системы. Подставляя сюда (I.11.5.2.4), что предполагает **использование электродинамического лагранжиана**, который является основой **всей** теории, имеем

$$\mathcal{E} = \sum_j \overline{m_j(s_j)\sqrt{1 - v_j^2}} = \sum_j \overline{\mathcal{E}_j(s_j)}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{E}_j(s_j) = m_j(s_j)\sqrt{1 - v_j^2} = \frac{m_j}{u_j^0} \tag{7}$$

– энергия j-той квазиточечной частицы, связанной в несущей частице.

В системе координат, сопутствующей центру инерции рассматриваемой системы, её энергия $\mathcal{E}$ является энергией покоя, то есть массой m этой системы.

При достаточно постоянных массах связанных частиц (чему удовлетворяют простоны) можно писать с учётом (I.8.5.2.7)

$$\mathcal{E} = m = \sum_j m_j \overline{\sqrt{1 - v_J^2}} = \sum_j \frac{m_j}{\breve{u}_j^0}, \quad m_j \to \text{const}, \quad \frac{1}{\breve{u}_j^0} = \overline{\sqrt{1 - v_j^2}}. \tag{8}$$

Откуда видно, что коэффициент дефекта массы каждой квазиточечной частицы, связанной в системе пропорционален среднему обратному темпу частицы

$$g_j = 1/\breve{u}_j^0. \tag{9}$$

То есть её **дефектная масса** согласно (8) равна

$$m_{(j)} = m_j/\breve{u}_j^0, \tag{10}$$

где $1/\breve{u}_j^0$ – средний обратный темп, связанной частицы, m_j – масса свободной частицы. **Вириальная статистика темпа** по правилу (I.8.5.2.7) обеспечивает универсальную определённость понятия массы связанных частиц.

6. Средний темп простона (нормона) в гравитоне. Вакуумный (свободный) гравитон. Средний темп простона (или соответствующего нормона) u_g^0, зная волновую функцию гравитона, можно искать в виде (используя (1.6),(1.9),(4.9) и плотность вероятности $w = u_r^0 w_0 = u_r^0 \psi\psi^*$)

$$u_g^0 = 4\pi \int\limits_{r_g}^{\infty} u_r^0 \psi\psi^* \, u_r^0 \, r^2 \, dr = 2bu^{02} \mathrm{e}^{2br_g} \int\limits_{r_g}^{\infty} \frac{r^2 \mathrm{e}^{-2br}}{(r - r_g)^2} \, dr = 2bu^{02} I, \tag{1}$$

где

$$I = \int\limits_{r_g}^{\infty} \frac{r^2 \mathrm{e}^{-2b(r-r_g)}}{(r-r_g)^2}\, dr, \tag{2}$$

$$r_g = \frac{k^2 S_J u^0}{2\pi^3}, \quad (4.8). \tag{3}$$

Сделаем замену

$$r - r_g = x,\ dr = dx,\ x_{|r=r_g} = 0,\ x_{|r=\infty} = \infty,$$

тогда

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+r_g)^2 \mathrm{e}^{-2bx}}{x^2}\, dx = I_1 + 2r_g I_2 + r_g^2 I_3, \tag{4}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2bx} dx = 1/(2b), \quad I_2 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-2bx} dx, \quad I_3 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{e}^{-2bx} dx. \tag{5}$$

Последние два интеграла расходятся. То есть средний темп нормона в гравитоне имеет неопределённо большое значение, ограниченное только значением массы гравитона, которое он приобретает в результате очень большого дефекта массы нормона, гравитационно **самосвязанного** в гравитоне. Поэтому **средний темп простона (или соответствующего) нормона в гравитоне** согласно (5.10) связан с массой гравитона выражением:

$$u_g^0 = m_n/m_g = u^0, \tag{6}$$

где последнее равенство определяет **вакуумный (свободный) гравитон**. Параметры вакуумного гравитонов эволюционируют вместе с возрастом Вселенной, стремясь к статистически равновесным (**вакуумным**) значениям.

Поток концентрации метаболирующего простона испытывает в системе центра инерции гравитона радиальное ускорение

$$a_r = \frac{-G m_m}{r^2}. \tag{7}$$

В системе центра инерции гравитона эту формулу можно рассматривать и как релятивистскую, так как в числителе стоит инвариант, а r можно рассматривать инвариантом в силу ортогональности радиус вектора $\mathbf{r}$ и его тангенциальной скорости.

Простон метаболирует во всех тангенциальных направлениях симметрично, поэтому осреднённая по времени тангенциальная скорость равна нулю, но в каждый момент времени эта скорость v_t не равна нулю и связана с радиальным (центростремительным) ускорением известной формулой

$$a_r = \frac{-v_t^2}{r}. \tag{8}$$

Так как радиус-вектор **r** ортогонален скорости v_t, то он не испытывает лоренцева сокращения, поэтому релятивистское обобщение формулы (8) примет вид

$$a_r = \frac{-u_t^2}{r} \to \frac{-u_t^{02}}{r}, \tag{9}$$

где стрелочка указывает на ультрарелятивистский случай. Тогда, сравнивая (7) и (9), имеем

$$u_t^0 = \sqrt{\frac{Gm_m}{r}}. \tag{10}$$

Однако этот темп не означает никакого макроскопического движения простона гравитона, так как микроскопические скорости статистически уравновешены по направлениям метаболизмом простона.

7. Суперсимметрия гравитонов и гравитационное происхождение их массы. Гравитон в вакууме можно представить как метаболирующее состояние одного простона (нормона), все квантовые числа которого статистически уравновешены. То есть это состояние, вырожденное (суперсимметричное) по всем квантовым числам. Свободный (вакуумный) гравитон статистически равновесен в максимальной степени, так что весь вакуум можно представить как сплошную среду вакуумных гравитонов так же как и сплошную среду нормонов или вообще простонов. При этом, согласно определению нормона, **средний темп свободных нормонов** u_n^0 равен среднему темпу u^0 свободных простонов.

С квантовой точки зрения вакуум удобно представлять как среду вакуумных гравитонов, с **нерелятивистским** средним темпом относительно реликтовой системы координат, так как **реликтовое излучение тормозит вакуумные гравитоны**. В каждом таком **вакуумном гравитоне** нормоны метаболируют, распределяясь по значениям темпа u_r^0 согласно (4.7) при среднем значении $\check{u}_r^0 \to u^0$, что по теореме вириала даёт значение **вакуумной массы гравитона**:

$$m_{g0} = m_n/u^0, \quad u^0 = m_n/m_{g0} = u_n^0 = 1/g_g. \tag{1}$$

Статистически вакуум однороден лишь при равномерном заполнении его вакуумными гравитонами. В общем гравитационном поле гравитон стремится занять положение, минимизирующее гравитационный потенциал (**гравитон адаптируется к гравитационному полю**). Коэффициент g_g, уменьшающий в гравитоне массу нормона до **массы вакуумного гравитона** m_{g0}, назовём **глобальным гравитационным коэффициентом дефекта массы**, определяющим **массу вакуумного гравитона** и его частоту μ_g

$$m_{g0} = g_g m_n = g_g \hbar |k| = \hbar |k|/u^0 = \hbar \mu_g. \tag{2}$$

Согласно (6.5.5.10) абстрактно определённый вакуумный гравитон может иметь любой спин из спектра $s = 0, \hbar/2, \hbar$ с нулевым значением его средней проекции на любую ось. В нём метаболируют простоны с любым зарядом из спектра

$q_{gr} = 0, \pm q/3, \pm 2q/3$ (3.2) с нулевым средним значением. Масса такого гравитона определяется значением m_{g0}, а дискретные квантовые числа s, q_{gr} не определены (в среднем нулевые). Если же их определить, то значение массы изменится за счёт электромагнитного взаимодействия. Но в силу большого значения радиуса гравитона ($r_g \approx 0,7$см (6.6.7)) это изменение ($\Delta m \sim q_{gr}^2/2r_g \sim 10^{-6}$эв) составляет лишь сто тысячную часть массы $m_{g0} \approx 0,14$эв (6.8.10). Поэтому с хорошей точностью можно полагать, что **гравитон суперсимметричен** (вырожден по всем своим дискретным квантовым числам) и нейтрален. Слабое возмущение вакуума реликтовым излучением допускает рассматривать отдельно **собственные состояния гравитона** и их взаимодействие. Массу m_{g0} назовём **гравитационной массой гравитона**, так как электромагнитное происхождение имеют лишь её малые поправки Δm, а в основном **масса гравитона имеет гравитационное происхождение**.

Одинокий гравитон не имеет электрической энергии, так как энергия электрического поля одинокого простона скомпенсирована энергией его сплошного 4-тока. Поэтому **массы одиноких гравитонов не зависят от электрических зарядов**, то есть имеют только гравитационное протсхождение.

Зная массу гравитона m_{g0} (2) и квадрат модуля его волновый функции, легко найти плотность покоя его энергии e_{g0} как произведение этих величин

$$e_{g0} = m_{g0}\psi\psi^*. \tag{3}$$

Коэффициент дефекта массы g_g зависит от темпа газа в реликтовой системе отсчёта. Все реальные на сегодняшний день наблюдатели (лаборатории) находятся в нерелятивистских системах отсчёта относительно изначальной (реликтовой) системы, поэтому для них выражение (1) достаточно точное. Однако, даже для них существует отклонение от этого выражения, вызываемое движением Солнечной системы относительно реликтового излучения со скоростью около 600км/с, а также движением Земли вокруг Солнца со скоростью около 30км/с. Эти движения вызывают измеримые вариации g_g. Но если вариации от движения Солнца имеют очень длинный период, то вариации от движения Земли – годичные. Они изменяют скорость на 60км/с, чему соответствует $u^0 \sim 1,00000002$. Это может отражаться на точности измерения g_g. В конечном счёте все эти вариации можно отнести к вариациям какой-то одной фундаментальной константы, что практически и происходит, выражаясь в трудности **измерения гравитационной постоянной**.

8. Рекомбинация вакуумных гравитонов. Виртуальные и реальные гравитоны. Согласно (I.12.4.8.2) можно переопределить знак массы простона (а следовательно и гравитона), если одновременно переопределить знак его электрического заряда, что эквивалентно инверсии времени (и знака частоты). Тогда при подходящем таком переопределении для каждого гравитона с данными квантовыми числами (в том числе массы) существует противоположный гравитон, имеющий все квантовые числа противоположные данным. Эти гравитоны притягиваются **практически только гравитационно** и в результате становятся ненаблюдаемой

нейтральной парой гравитонов с высвобождением энергии в виде пренебрежимого фотона (при наличии заряда) и в виде **рекомбинационной гравитационной волны**, то есть компоненты гравитационного поля с энергией

$$\mathcal{E} > 2m_{g0} \tag{1}$$

и целымым спином

$$s \leqslant 2\hbar, \tag{2}$$

расходящейся со скоростью света. Такая волна требуется законами сохранения и отсутствием массы нейтральной пары. В силу обратимости механики вероятности процессов нейтрализации пар гравитонов и их рождения одинаковы при прочих равных условиях. Такие компоненты гравитационного поля обобщаются в гравитационном поле, аналогичная компонента которого в другом месте может вновь родить пару **свободных гравитонов**. Следовательно вся энергия всех нейтральных пар гравитонов (которые назовём **виртуальными гравитонами**) переходит в энергию гравитационного поля, плотность которой гигантская, но практически не наблюдается за исключением **радиационных поправок**.

По формуле (7.1), масса гравитона зависит от темпа u^0 его простонов, а этот темп имеет гэп, то есть очень слабое расщепление в зависимости от пара-заряда простона $\Delta u^0 = 1/u^0$ (I.8.1.11.6). Это вызывает соответствующее **пара-расщепление массы вакуумных гравитонов**:

$$\Delta m_{g0} = \Delta\frac{m_n}{u^0} = \Delta\frac{k\hbar}{u^0} = -\frac{k\hbar}{u^{02}}\Delta u^0 = -\frac{k\hbar}{u^{03}}, \tag{3}$$

то есть **асимметрию вещества и антивещества**. Откуда с учётом (7.2)

$$-\frac{\Delta m_{g0}}{m_{g0}} = \frac{1}{u^{02}}. \tag{4}$$

Заметим, что паразаряд нарушает равенство масс гравитонов космологически мало, что допускает нейтрализацию энергии пары гравитонов как с одинаковыми так и с противоположными пара-зарядами (при подходящих электрических зарядах). Весьма небольшая вакуумная масса m_{g0} гравитонов при их гигантской концентрации могла бы соответствовать невообразимо гигантской плотности массы гравитонов. Но подавляющее их число нейтрализуется в нейтральные пары превращаясь в энергию безмассового гравитационного поля. **Реальными гравитонами** являются лишь те, которым не хватило партнёра для нейтрализации. В подавляющем числе это оказываются пара-гравитоны, так как их масса в любом большом объёме, благодаря гэпу, больше массы анти-гравитонов, а гравитоны в каждой нейтральной паре далжны иметь в среднем равные по модулю массы. Кроме реальных пара-гравитонов могут существовать и реальные анти-гравитоны, но согласно (4) **почти все реальные гравитоны – пара-гравитоны** (5)

9. Наблюдаемые состояния гравитонов.

Физический вакуум всегда заполнен электромагнитным излучением, которое своим полем расщепляет суперсимметричное вырожденное состояние гравитона на отдельные чистые состояния, то есть поляризует суперсимметричный гравитон.

С учётом (1.9), квадрат модуля (1.6) волновой функции гравитона примет вид

$$\psi\psi^* = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-2b(r-r_g)}/r^2, & r \geqslant r_g \\ 0, & r < r_g \end{cases}, \tag{1}$$

откуда видно, что при больших br_g волновая функция гравитона сосредоточена в тонком слое вблизи сферы радиуса r_g. В этом случае **гравитон похож на пузырь**. При малых br_g внутренность пузыря остаётся нулевой, но волновая функция экспоненциально расползается вовне.

Эти пузыри-**гравитоны чрезвычайно жёсткие**, так как могут деформироваться только гравитационным полем вместе с изменением концентрации прогаза, которая космологически постоянна и очень велика ($c_q = 1$). Поэтому **в электромагнитном поле гравитон практически недеформируем**. (2)
Вместо деформации в электромагнитном поле возможно **расслоение волновой функции гравитона**. (3)
Действительно. Финитной волновой функцией является не только волновая функция гравитона удовлетворяющая единому волновому уравнению КГФ, но и различные её свёртки с финитными функциями, в том числе суммы её экземпляров, сдвинутые друг относительно друга, которые и назовём **расслоениями волновой функции** (это разновидность **смешанных состояний**).

Гравитон является простейшей финитной квантовой инфра-частицей, находящейся в универсальном гравитационном взаимодействии с вакуумом и через него – со всеми другими частицами. Единственной макроскопически наблюдаемой термодинамической характеристикой вакуума является температура реликтового излучения, которая в гравитационно нормальных областях должна выравниваться с температурой газа заряженных реальных гравитонов. Реальный гравитон является основным состоянием любой простой квантовой частицы. Это состояние не имеет внутрених степеней свободы, но имеет 3 кинетических степени свободы, ответственных за температуру.

Гравитон по определению является особенностью концентрации прогаза, которая стремится к объединению с другими такими особенностями, чему препятствует взаимная кинетическая энергия гравитонов. Чтобы истратить взаимную кинетическую энергию, которая может быть велика, **кинетически возбуждённым системам реальных гравитонов** требуется время. Если в такой системе гравитоны заряжены, то их обмен энергией резко увеличивается и ускоряется их релаксация (остывание).

Холодные реальные гравитоны находяться в термодинамическом равновесии с реликтовым излучением, то есть имеют температуру реликтового излучения. Также могут существовать **переохлаждённые гравитоны** в качестве некоторой фракции **равновесного гравитонного газа**.

Энергия вакуума физически наблюдается только в виде реальных гравитонов и составленных из них частиц, так как волновые функции реальных гравитонов и их комбинации являются единственно возможными финитными волновыми функциями. Нормоны же связаны в едином вакууме и их энергия проявляет себя только в виде энергии гравитонов, масса которых является результатом дефекта массы нормонов при их вакуумном связывании. А это связывание естественно очень сильное, поскольку волновые функции всех нормонов инфинитны и интерферируют друг с другом во всём пространстве Вселенной. Таким образом всё **вещество** Вселенной представимо реальными гравитонами. Все излучения можно представить как волновые возмущения вакуума относительно его статистически равновесного состояния.

Обычно в квантовой механике волновая функция описывает состояние движения частицы, но не содержит полной информации о частице. То есть, вообще говоря это **внешняя** характеристика частицы, содержащая также и её внутренние особенности. Напротив, волновые функции реальных гравитонов, описывая состояния движения самых элементарных (точечных) частиц – простонов, являются полным описанием реальных гравитонов, то есть в сопутствующей системе отсчёта они являются **внутренними** волновыми функциями.

10. Гравитоны как продукты гравитационной неустойчивости. Причиной существования скалярного тензора плотности энергии-импульса является сугубо ультрарелятивистская скорость движения простонов, благодаря которой этот тензор почти не изменяется даже при релятивистских изменениях скорости системы отсчёта, то есть практически (хотя и не абсолютно) инвариантен. А давление для такого тензора отрицательно.

Свойственное скалярному метрическому полю **отрицательное давление** вызывает потоки импульса в направлении градиента плотности энергии e, что означает существование силы притяжения масс (то есть **гравитационного поля**). **Гравитацию масс** можно рассматривать как **неустойчивость прогаза**, приводящую к структурированию вещества. Можно говорить как о гравитации массы так и о гравитации энергии, так как величина e в тензоре плотности энергии-импульса прогаза инвариантна. Согласно (1.3.3) ускорение плотности потока энергии при **отрицательном давлении**, действующем в гравитационном поле, происходит в сторону увеличения плотности энергии. Поэтому плотность энергии стремится к увеличению и тем больше, чем она больше. Этому самоподдерживающимуся процессу (называемому **гравитационной неустойчивостью** препятствует ультрарелятивистское самоускоряющееся движение протистонов. Инерция движущихся протистонов препятствует потере энергии любого образовавшегося сгустка, но расширение Вселенной понижает её среднюю температуру и способствует конденсации сгустков, пока наконец некоторые из них не достигнут стационарного состояния в виде гравитонов.

11. Макро наблюдаемость и гравитационный заряд гравитонов. Масса протистона является элементарным точечным гравитационным зарядом, который

можно рассматривать как **доквантовый точечный гравитон** со спином, соответствующим полю тензора плотности энергии-импульса. Но гравитоном мы называем другую частицу (3.1.*), которая более непосредственно формирует массы наблюдаемых квантовых частиц.

Все свободные простоны (нормоны) имеют гравитационный заряд. Однако газ этих простонов имеет очень большую концентрацию и макроскопически настолько однороден и изотропен, при ультрарелятивистской скорости простонов, что проктически не наблюдаем, как например, слабо наблюдаем неподвижный воздух, окружающий человека. Прогаз можно представлять как газ или простонов или нормонов или гравитонов. Все эти частицы имеют одинаковые концентрации, но разные массы и скорости.

Согласно (1.8.9) роль грвитационного заряда движущегося источника гравитационного поля играет его энергия. Тогда инвариантным гравитационным зарядом такого источника будет его масса. Ниже будет ясно, что гравитон в реликтовой системе осчёта имеет нерелятивистский темп, поэтому гравитацию гравитона удобно характеризовать именно инвариантным зарядом, то есть массой (7.2)

$$m_{g0} = g_g m_n = g_g \hbar |k| = \hbar |k| / u^0 = \hbar \mu_g. \tag{1}$$

Гравитационный потенциал такого заряда может проявить себя на расстояниях от центра не меньше, чем r_g, что делает его чрезвычайно слабо наблюдаемым, так как r_g имеет макроскопическую величину (ниже выяснится, что $r_g \sim 0,7$см).

В среде с постоянной осреднённой концентрацией и скоростью гравитонов каждый отдельный гравитон в среднем себя вообще гравитационно не проявляет. **Гравитационное возмущение вакуума** проявляется в отклонении от среднего значения как концентрации гравитонов так и их среднего темпа.

Гравитоны являются **простейшими инфрачастицами**. Остальные инфрачастицы являются системами гравитонов. Гравитоны можно рассматривать как самосвязанные состояния ультрачастиц (нормонов). Концентрация свободных гравитонов практически равна концентрации нормонов, однако концентрация связанных гравитонов очень мала по сравнению с концентрацией простонов (а следовательно и нормонов). Равновесная среда нормонов находится в ненаблюдаемом состоянии. Очень слабую (радиационную) наблюдаемость нормонов обеспечивает лишь взаимодействие с гравитонами. В силу сохранения различных квантовых чисел, возможны различные стационарные состояния связанных гравитонов. Время их жизни определяется квантовыми вероятностями переходов в более низкие состояния.

12. Пара-заряд простона и гравитона. Стабильные связанные системы метаболирующих пара- и анти-простонов существуют как гравитоны и их античастицы. Гравитоны рекомбинируют (8.*), образуя собой главным образом статистически однородную и изотропную слабо наблюдаемую, но очень плотную среду (состоящую из виртуальных пар противоположных гравитонов) – физический вакуум. В этой почти однородной и изотропной среде, благодаря гэпу (I.8.1.11.*),

остаётся небольшое число гравитонов (частиц вещества) и ничтожное число антигравитонов, не нашедших партнёров по рекомбинации.

Простоны с бо́льшим темпом мы назовём пара-простонами, соответственно параволнам (I.8.1.9.*). Пара-простону присвоим положительный паразаряд, а антипростону – отрицательный (и аналогично для гравитонов)

$$q_p = \pm 1. \tag{1}$$

§4. Взведённые состояния гравитонов.

1. Фурье-образ гравитона. Волновая функция гравитона $\psi(x_\mu)$ (1.6) **центрально симметрична**. Показатель экспоненты плоской волны разложения Фурье запишем в виде

$$x_{k\mu}\ x^\mu = x_k^\mu\ x_\mu = x_{k0}\ x^0 - \mathbf{r}_k \mathbf{r} = x_{k0}\ x^0 - r_k\ r\ \cos(\mathbf{r}_k^\wedge \mathbf{r}),$$

где $x_{k\mu}$ – волновой вектор. Так как $\psi(x_\mu)$ не зависит от угловых координат ϑ, φ, то интеграл в преобразовании Фурье не зависит от ориентации вектора $\mathbf{r}_k$. Выберем ориентацию $\mathbf{r}_k$ так, чтобы $\mathbf{r}_k || \mathbf{z}$, тогда

$$\cos(\mathbf{r}_k^\wedge \mathbf{r}) = \cos(\vec{z}^\wedge \mathbf{r}) = \cos\vartheta.$$

Тогда для волновой функции гравитона (1.6),(1.9)

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{a}\, \mathrm{e}^{-br + i\nu x_0}/r, & r \geqslant r_g \\ 0, & r < r_g \end{cases}, \quad x_k^0 = \nu \geqslant 0 \tag{1}$$

получим фурье-образ (I.5.3.1.1), при $A_F = 1(I.5.3.1.1)$:

$$S(x_k^\mu) = \int \psi(x^\mu) \mathrm{e}^{-i x_k^\mu x_\mu} d\Omega =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \int_{r_g}^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi \mathrm{e}^{-i x_{k0}\, x^0 + i r_k r\ \cos\vartheta}\, r^2 \sin\vartheta\ dx^0\, dr\, d\vartheta. \tag{2}$$

Если интегрировать по времени от $-\infty$ до ∞, то **временна́я компонента спектра**, согласно (I.5.2.1.2), обращается в функцию

$$S_t(x_k^0) = 2\pi\delta(x_k^0 - \nu) = 2\pi\delta(\nu - x_k^0).$$

Однако квадрат модуля такой функции, выражающейся через δ-функцию, не имеет смысла. По смыслу 4-х-мерной волновой функции, которая определяется на конечном интервале (6.2.6.1)

$$\Delta t = \Delta T = \pi/k,$$

интегрирование надо производить по этому интервалу. Тогда **временна́я компонента спектра** имеет вид

$$S_t(x_k^0) = \int\limits_t^{t+\pi/k} \mathrm{e}^{i(\nu - x_{k0})t} dt = \frac{-i}{\nu - x_{k0}} \mathrm{e}^{i(\nu - x_{k0})t}\Big|_t^{t+\pi/k} =$$

$$= \frac{-i}{\nu - x_{k0}} \mathrm{e}^{i(\nu - x_{k0})t} \left(\mathrm{e}^{i(\nu - x_{k0})\pi/k} - 1\right). \qquad (3)$$

Тогда (2) можно записать в виде

$$S = S_g(r_k) \cdot S_t(x_k^0) = 2\pi\sqrt{a}\ I_{r\vartheta} \cdot S_t(x_k^0), \qquad (4)$$

где

$$I_{r\theta} = \int\limits_{r_g}^{\infty} I_\vartheta\, \mathrm{e}^{-br}\, r\, dr, \qquad (5)$$

$$I_\vartheta = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{ir_k r \cos\vartheta}\ \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Сделаем замену

$$\cos\vartheta = x,\ d\vartheta = -dx/\sin\vartheta,\ x_{|\vartheta=0} = 1,\ x_{|\vartheta=\pi} = -1,$$

тогда

$$I_\theta = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ir_k r x}\, dx = \frac{1}{ir_k r} \mathrm{e}^{ir_k r x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{ir_k r}(\mathrm{e}^{ir_k r} - \mathrm{e}^{-ir_k r}),$$

$$I_{r\vartheta} = \frac{1}{ir_k} \int\limits_{r_g}^{\infty} (\mathrm{e}^{(-b+ir_k)r} - \mathrm{e}^{(-b-ir_k)r})\, dr =$$

$$= \frac{1}{ir_k} \left(\frac{1}{-b+ir_k} \mathrm{e}^{(-b+ir_k)r} - \frac{1}{-b-ir_k} \mathrm{e}^{(-b-ir_k)r} \right) \Big|_{r_g}^{\infty} =$$

$$= \frac{i}{r_k} \left(\frac{1}{-b+ir_k} \mathrm{e}^{(-b+ir_k)r_g} - \frac{1}{-b-ir_k} \mathrm{e}^{(-b-ir_k)r_g} \right).$$

Подставляя найденное выражение $I_{r\vartheta}$ (5) в (4), получаем центрально симметричный **спектр гравитона**

$$S(r_k, x_k^0) = \frac{i2\pi\sqrt{a}}{r_k} \left(\frac{\mathrm{e}^{(-b+ir_k)r_g}}{b - ir_k} - \frac{\mathrm{e}^{(-b-ir_k)r_g}}{b + ir_k} \right) \cdot S_t(x_k^0). \qquad (6)$$

Заметим, что если параметр r_g определён формулой (3.4.8), то параметр ν (вместе с b) пока ничем не определён.

Выделяя **спектр волнового 3-вектора**, получаем

$$S_g(r_k) = \frac{i2\pi\sqrt{a}}{r_k}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-b+ir_k)r_g}}{b-ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{(-b-ir_k)r_g}}{b+ir_k}\right). \tag{7}$$

По теореме Парсеваля нормы координатного и спектрального представлений должны быть одинаковы как для временной так и для пространственной компонент волновой функции, а их общая норма, равная их произведению, должна быть 1. **Квадрат пространственной нормы** [Корн, (15.2-2)] определяется выражением

$$N_r = 4\pi\int\limits_0^\infty S_g S_g^* r_k^2\, dr_k, \tag{8}$$

где

$$S_g S_g^* r_k^2 = 4\pi^2 a\mathrm{e}^{-2br_g}\left(\frac{\mathrm{e}^{ir_gr_k}}{b-ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{-ir_gr_k}}{b+ir_k}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{-ir_gr_k}}{b+ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{ir_gr_k}}{b-ir_k}\right) =$$

$$4\pi^2 a\mathrm{e}^{-2br_g}\left(\frac{2}{b^2+r_k^2} + \frac{\mathrm{e}^{i2r_gr_k}}{(b-ir_k)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-i2r_gr_k}}{(b+ir_k)^2}\right) = 4\pi^2 a\mathrm{e}^{-2br_g}\times$$

$$\times\left(\frac{2}{b^2+r_k^2} + \frac{b^2-r_k^2+2ibr_k}{(b^2+r_k^2)^2}\mathrm{e}^{i2r_gr_k} + \frac{b^2-r_k^2-2ibr_k}{(b^2+r_k^2)^2}\mathrm{e}^{-i2r_gr_k}\right) =$$

$$= 2\pi b\left(\frac{2}{b^2+r_k^2} + \frac{2(b^2-r_k^2)}{(b^2+r_k^2)^2}\cos 2r_gr_k - \frac{4br_k}{(b^2+r_k^2)^2}\sin 2r_gr_k\right), \tag{9}$$

где в последнем равенстве учтено, что $a = (b/2\pi)\mathrm{e}^{2br_g}$ (3.1.9).

2. Вычисление параметров спектра гравитона. Выражение (1.8), используя (1.9), можно записать в виде

$$8\pi^2 b(2I_1 + 2b^2 I_2 - 2I_3 - 4bI_4) = N_r, \tag{1}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{dr_k}{r_k^2+b^2} = \quad [\text{Прудников}, 1.2.10.14]$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{r_k}{b}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2b},$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \frac{\cos 2r_gr_k}{(r_k^2+b^2)^2}\, dr_k = \quad [\text{Прудников, 2.5.6.6,m=1}]$$

$$= \frac{\pi\mathrm{e}^{-2r_gb}}{8b^3}(2+4r_gb) = \frac{(1+2r_gb)\pi}{4b^3}\mathrm{e}^{-2r_gb},$$

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \frac{r_k^2}{(r_k^2+b^2)^2}\cos 2r_g r_k\ dr_k = \qquad [\text{Прудников, 2.5.9.6}, \delta = 0]$$

$$= \frac{1-2r_g b}{4b}\pi \mathrm{e}^{-2r_g b},$$

$$I_4 = \int\limits_0^\infty \frac{r_k}{(r_k^2+b^2)^2}\sin 2r_g r_k\, dr_k = \qquad [\text{Прудников, 2.5.9.8,m=2}]$$

$$= \frac{2r_g \pi \mathrm{e}^{-2r_g b}}{4b}.$$

Тогда (1) принимает вид

$$\frac{N_r}{8\pi^2 b} =$$

$$= \frac{\pi}{b} + \frac{(1+2r_g b)\pi}{2b}\mathrm{e}^{-2r_g b} + \frac{2r_g b - 1}{2b}\pi \mathrm{e}^{-2r_g b} - 2r_g \pi \mathrm{e}^{-2r_g b}.$$

Умножая на $8\pi^2 b$, имеем

$$N_r = 8\pi^3 + 4\pi^3(1+2r_g b + 2r_g b - 1 - 4r_g b)\mathrm{e}^{-2r_g b} = 8\pi^3 = (2\pi)^3. \tag{2}$$

Временна́я норма N_t очевидно определяется из (1.3) в виде

$$N_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t S_t^* dx_{k0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\nu - x_{k0})^2}\left(2 - \mathrm{e}^{i(\nu - x_{k0})} - \mathrm{e}^{-i(\nu - x_{k0})}\right) dx_{k0} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2-2\cos x}{x^2}dx = 8\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}dx = 4\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx =$$

$$[\text{Прудников 2.5.3.13},\ I_{-1,2}] \qquad = 2\pi, \tag{3}$$

таким образом 4-норма

$$N_4 = N_t N_r = (2\pi)^4 \tag{4}$$

и она не равна единице, очевидно, вследствие выбора для преобразования Фурье (и обратного) коэффициентов $A_F = 1$ ($B_F = 1/(2\pi)$) (I.5.2.2.4), а для 4-х-мерного преобразования Фурье $A_F^4 B_F^4 = 1/(2\pi)^4$ (I.5.2.2.2). Поэтому для интерпретации спектра гравитона как **волновой функции в представлении Фурье**, 4-спектр надо умножить на коэффициент $1/(2\pi)^4$. Учитывая это, найдём **среднее значение модуля волнового 3-вектора**

$$\bar{r}_k = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^4} S_g S_g^* r_k^3\, dr_k = \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty S_g S_g^* r_k^3\, dr_k.$$

Используя (1.9), имеем

$$\bar{r}_k = \frac{b}{\pi^2} \mathrm{e}^{-2br_g} (I_5 + b^2 I_6 - I_7 - 2bI_8),$$

где

$$I_5 = \int\limits_0^\infty \frac{r_k\, dr_k}{r_k^2 + b^2} = \quad [\text{Прудников}, 1.2.10.17]$$

$$= \frac{1}{2} \ln |r_k^2 + b^2| \Big|_0^\infty \to \infty.$$

Этот интеграл расходится. Его подинтегральная функция линейно независима от подинтегральных функций интегралов I_6, I_7, I_8, которые осциллируют. Тогда

$$\bar{r}_k \to \infty. \tag{5}$$

В силу линейности локально-волнового уравнения и уравнения $\Box \psi \psi^* = 0$, квадрат модуля волновой функции гравитона можно рассматривать как нормированное возмущение (отклонение от среднего значения) концентрации прогаза (своего рода **стоячие гравитационные волны** (6.2.5.*))

$$\psi_g = \psi - \bar{\psi}, \quad \psi_g \psi_g^* = \psi\psi^* - \overline{\psi\psi^*}, \quad \mu_g < \mu$$

(при этом вероятностный смысл $\psi_g \psi_g^*$ сохраняется). Такое возмущение, как мы видели (4.*), связано с ускорением нормона, метаболирующего в гравитоне, то есть оно связано с возрастанием средней скорости и средней частоты, этого нормона, что можно выразить как среднее приращение $\Delta\mu = \mu_g$ модуля локального волнового 4-вектора μ^μ в окрестности гравитона. При этом энергия гравитона является лишь приращением энергии метаболирующего в нём нормона.

3. Нормирование расслоения волновой функции гравитона. Квадрат модуля 4-волновой функции имеет смысл плотности (концентрации) простонов, а её норма инвариантна (имеет смысл числа простонов). То есть эта норма не зависит от состояния движения волновой функции. По теореме Парсеваля норма квадрата модуля спектра равна норме квадрата модуля волновой функции. Говорят, что спектр волновой функции является **спектральным представлением волновой функции**.

Финитной волновой функцией является не только волновая функция гравитона удовлетворяющая единому волновому уравнению КГФ, но и различные её свёртки с финитными функциями, в том числе суммы её экземпляров, сдвинутые друг относительно друга, которые названы **расслоениями волновой функции** (3.9.3). Прстейшее такое расслоение, состоящее из двух экземпляров (**слоёв**) одной волновой функции будем называть **слойкой** этой функции. Полезно обобщение понятия **слойки** на слои с взаимно инвертированными волновыми функциями.

Сдвиги слоёв друг относительно друга можно характеризовать **4-вектором сдвига**, модуль которого будем также называть просто **сдвигом** слоёв. Существенно, что норма расслоения, вообще говоря, не равна сумме норм слоёв.

Сдвигу состояния гравитона в 4-пространстве на величину 4-вектора a^μ соответствует умножение его спектра на экспоненту $\mathrm{e}^{ia^\mu x_{k\mu}}$ (I.5.4.1.1). Поэтому спектр взаимно неподвижной пары (слойки) состояний гравитона, сдвинутых относительно начала координат в противоположных направлениях на расстояние $\pm a_d$ по оси z_k, будет отличаться от спектра (1.7) одного (исходного) состояния только множителем (**шифт-волна**):

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\cos(a_d z_k) = 2\cos(a_d r_k \cos\vartheta_k) \\ 2\sin(a_d z_k) = 2\sin(a_d r_k \cos\vartheta_k) \end{array} \right. , \tag{1}$$

где второй (нижний) случай соответствует инверсии знака спектра (и самой волновой функции) одного из слоёв, то есть такие слои взаимно уничтожаются при совмещении (при $a^\mu = 0$). В этом случае слойку назовём **нечётной слойкой** в отличие от **чётной слойки**. Полное совмещение слоёв нечётной слойки невозможно, так как необходимое условие нормирования интеграла её квадрата модуля на 1 при этом не выполнимо. Так как заряд нормированной волновой функции не зависит от инверсии её знака, то нечётная слойка как и чётная может иметь любой заряд, разрешённый вообще для гравитонов.

Таким образом, используя (1.7), спектр слойки надо записать в виде

$$S_{ga}(r_k, a_d) = S_g(r_k) \cdot 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right. (a_d r_k \cos\vartheta_k) =$$

$$= \frac{i\sqrt{2b}}{r_k} \left(\frac{\mathrm{e}^{(-b+ir_k)r_g}}{b - ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{(-b-ir_k)r_g}}{b + ir_k} \right) \cdot 2\cos(a_d r_k \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right. \vartheta_k). \tag{2}$$

В таком виде спектр, вообще говоря, не нормирован. Поэтому его необходимо нормировать на определённое число $N_r = (2\pi)^3$ (2.2)

$$\int S_{ga} S_{ga}^* \, dv = \int S_g S_g^* 4 \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \\ \sin^2 \end{array} \right. (a_d r_k \cos\vartheta_k) \, dv = N_r = (2\pi)^3. \tag{3}$$

Это число (после интегрирования в сферических координатах по φ) примет вид

$$N_r = 2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi S_g S_g^* 4 \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \\ \sin^2 \end{array} \right. (a_d r_k \cos\vartheta_k) \, r_k^2 \sin\vartheta_k \, d\vartheta_k \, dr_k.$$

Требуемое нормирование возможно лишь для некоторых (**собственных**) значений **сдвига** a_d и чётности слойки. Сделаем замену переменной

$$\cos\vartheta_k = x, \;\; d\vartheta_k = -dx/\sin\vartheta_k, \;\; x_{|\vartheta_k=0} = 1, \;\; x_{|\vartheta_k=\pi} = -1,$$

тогда

$$N_r = 2\pi \int\limits_0^\infty 4S_g S_g^* r_k^2 I_x \, dr_k,$$

где

$$I_x = \int\limits_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \cos^2 \\ \sin^2 \end{Bmatrix} (a_d r_k x) \, dx = \frac{1}{a_d r_k} \int\limits_{-a_d r_k}^{a_d r_k} \begin{Bmatrix} \cos^2 \\ \sin^2 \end{Bmatrix} x \, dx =$$

$$[\text{Прудников}, 1.5.3.8; 1.5.2.8]$$

$$= \frac{1}{4a_d r_k} (\pm \sin 2x + 2x) \Big|_{-a_d r_k}^{a_d r_k} = \pm \frac{\sin 2a_d r_k}{2a_d r_k} + 1.$$

Теперь **условие нормированности слойки** (3) можно записать в виде

$$N_r = 2\pi \int\limits_0^\infty (\pm 4S_g S_g^* r_k^2 \frac{\sin 2a_d r_k}{2a_d r_k} + 4S_g S_g^* r_k^2) dr_k$$

или, учитывая, что второе слагаемое при интегрировании даёт значение $2N_r$ (1.8), его можно записать в виде

$$-N_r = 2\pi \int\limits_0^\infty (\pm 4S_g S_g^* r_k^2 \frac{\sin 2a_d r_k}{2a_d r_k}.$$

Заметим, что интеграл сходится при $a_d = 0$. Тогда, умножая на ± 1, получим следующее уравнение относительно неизвестных a_d, b

$$\mp N_r = N_f = \tag{4}$$

$$= \int\limits_0^\infty 8\pi \, S_g S_g^* r_k^2 \frac{\sin 2a_d r_k}{2a_d r_k} \, dr_k = I_N = \frac{8\pi^2 b}{a_d} \, I, \tag{5}$$

где в интеграле I используется выражение (1.9) для $S_g S_g^* r_k^2$, то есть

$$I = \int\limits_0^\infty \left(\frac{2}{b^2 + r_k^2} + \frac{2(b^2 - r_k^2)\cos 2r_g r_k}{(b^2 + r_k^2)^2} - \frac{4br_k \sin 2r_g r_k}{(b^2 + r_k^2)^2} \right) \frac{\sin 2a_d r_k \, dr_k}{r_k}. \tag{6}$$

Если разница величин a_d и r_g значительна по отношению к r_g, то тригонометрические члены под интегралом очень быстро осциллируют вдоль оси r_k, совершая на интервале величиной r_g порядка 10^{33} осцилляций. При этом интеграл от них не может накопить большую величину, оставаясь пренебрежимо малым по сравнению со значением, которое он может накопить при **резонансном расстоянии**

$$|a_d| \approx r_g. \tag{7}$$

Вычислим интеграл (6), разбивая его в виде

$$I = 2I_1 + b^2 I_2 - I_3 - 2bI_4, \tag{8}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(2a_d r_k)}{r_k(r_k^2+b^2)}\,dr_k = \quad [\text{Прудников, 2.5.9.2}, \alpha=0]$$

$$= \frac{\pi}{2b^2}\cdot 1\cdot \operatorname{sh} 2a_d b - \Gamma(\alpha-2)\sin(\alpha\pi/2) 4a_d^2\, {}_1F_2(1;3/2,2,;a_d^2 b^2),$$

так как согласно [Прудников 1, II.1],[Корн, 21.4-8]

$$\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{\Gamma(z) z \sin \pi z},$$

то

$$\Gamma(\alpha-2)\sin(\alpha\pi/2) = \frac{-\pi}{\Gamma(2-\alpha)\,(2-\alpha)\sin(\pi(2-\alpha))}\sin(\alpha\pi/2) =$$

$$= \frac{-\pi\sin(\alpha\pi/2)}{\Gamma(2-\alpha)\,(2-\alpha)\sin(-\alpha\pi)},$$

что в пределе $\alpha \to 0$ даёт $\pi/4$. Тогда учитывая, что ${}_1F_2(1;3/2,2;z^2) = (\operatorname{ch} 2z - 1)/2z^2$ [Прудников 3, 7.14.2.78], получаем

$$I_1 = \frac{\pi}{2b^2}\operatorname{sh} 2a_d b - \frac{\pi}{4} 4a_d^2(\operatorname{ch} 2a_d b - 1)/(2a_d^2 b^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2b^2}\operatorname{sh} 2a_d b - \frac{\pi}{2b^2}(\operatorname{ch} 2a_d b - 1) = \frac{\pi}{2b^2}(1 - \mathrm{e}^{-2a_d b}),$$

$$I_2 = I_{2-} + I_{2+},$$

$$I_{2\mp} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin((2a_d \mp 2r_g) r_k)}{r_k (r_k^2+b^2)^2}\,dr_k = \quad [\text{Прудников, 2.5.9.10}]$$

$$= \frac{\pi}{2b^4}(1 - 0,5\mathrm{e}^{-(2a_d \mp 2r_g)b}(2 + (2a_d \mp 2r_g)b)) =$$

$$= \frac{\pi}{2b^4}(1 - (1 + (a_d \mp r_g)b)\mathrm{e}^{-2(a_d \mp r_g)b}),$$

$$I_3 = I_{3-} + I_{3+},$$

$$I_{3\mp} = \int\limits_0^\infty \frac{r_k \sin((2a_d \mp 2r_g) r_k)}{(r_k^2+b^2)^2}\,dr_k = \quad [\text{Прудников, 2.5.9.8,m=2}]$$

$$= \frac{\pi(2a_d \mp 2r_g)\mathrm{e}^{-(2a_d \mp 2r_g)b}}{4b} = \frac{\pi(a_d \mp r_g)\mathrm{e}^{-2(a_d \mp r_g)b}}{2b},$$

$$I_4 = I_{4-} - I_{4+},$$

$$I_{4\mp} = \int\limits_0^\infty \frac{\cos((2a_d \mp 2r_g)r_k)}{(r_k^2+b^2)^2}\,dr_k = \quad [\text{Прудников, 2.5.9.5,m=2,n,}\delta\text{=0}]$$

$$= \frac{-\pi}{4b}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-2(a_d\mp r_g)b}\right) = \frac{\pi}{4b^3}(1+2b(a_d\mp r_g))\mathrm{e}^{-2(a_d\mp r_g)b}.$$

Выражение (8) умножим на $2b^2/\pi$, то есть используем в виде

$$(2b^2/\pi)I = (2b^2/\pi)(2I_1 + b^2I_2 - I_3 - 2bI_4). \tag{9}$$

Раскрывая (9), используя (5), имеем

$$(2b^2/\pi)\frac{a_dN_f}{8\pi^2 b} = 2 - 2\mathrm{e}^{-2a_db} +$$

$$+1-(1+(a_d-r_g)b)\mathrm{e}^{-2(a_d-r_g)b} + 1 - (1+(a_d+r_g)b)\mathrm{e}^{-2(a_d+r_g)b} -$$

$$-b(a_d-r_g)\mathrm{e}^{-2(a_d-r_g)b} - b(a_d+r_g)\mathrm{e}^{-2(a_d+r_g)b} -$$

$$-(1+2b(a_d-r_g))\mathrm{e}^{-2(a_d-r_g)b} + (1+2b(a_d+r_g))\mathrm{e}^{-2(a_d+r_g)b}$$

Приводя подобные члены, получим

$$\frac{a_dbN_f}{4\pi^3} = 4 - 2\mathrm{e}^{-2a_db} - 2\mathrm{e}^{-2(a_d-r_g)b} - 4b(a_d-r_g)\mathrm{e}^{-2(a_d-r_g)b}$$

или, умножив на $(1/2)\mathrm{e}^{2(a_d-r_g)b}$, найдём:

$$\frac{a_dbN_f\mathrm{e}^{2(a_d-r_g)b}}{8\pi^3} = 2\mathrm{e}^{2(a_d-r_g)b} - \mathrm{e}^{-2r_gb} - 1 - 2b(a_d-r_g)$$

или в виде неявной функции

$$f_1(a_d,b) =$$

$$= (a_dbc_f - 2)\mathrm{e}^{2(a_d-r_g)b} + \mathrm{e}^{-2r_gb} + 1 + 2b(a_d-r_g) = 0, \tag{10}$$

где обозначено (с учётом (4) и (2.2))

$$c_f = N_f/(8\pi^3) = \mp N_r/8\pi^3 = \mp 1. \tag{11}$$

Число $(-c_f)$ назовём **чётностью** P **расслоеной волновой функции** (см.(1)))

$$P = -c_f \tag{12}$$

(контекст позволяет не путать эту величину с модулем импульса P).

Уравнение (10) назовём **уравнением нормы**. Оно как и (3), выражает **условие нормированности расслоения волновой функции гравитона**.

Дифференцирование этого уравнения по расстоянию a_d позволяет найти силу взаимодействия слоёв волновой функции гравитона в зависимости от $a_d - r_g$, что позволяет искать устойчивые состояния расслоений волновой функции гравитона и массу этих состояний, которые, оказывается, существуют. Их будем называть **взведёнными состояниями гравитона**. Такие состояния имеют единственный непрерывный параметр a_d, и различаются квантовым числом c_f, имеющим 2 значения.

4. Сила взведения гравитона. Рассмотрим активную силу (I.9.6.5.7) взаимодействия пары слоёв волновой функции гравитона

$$F_s = u^0 dm/ds.$$

Эта сила, действующая на каждый из двух одинаковых слоёв, при нерелятивистской скорости характеризуется производной **массы (b) слоя гравитона** по координате a_d каждого из них. Для вычисления используем формулу дифференцирования неявной функции f_1 [Корн, 4.5-16]:

$$F = \hbar \frac{db}{da_d} = -\hbar \frac{f'_{1a_d}}{f'_{1b}}. \tag{1}$$

Из (6.1),(3.10) имеем силу

$$F = \frac{-\hbar b((c_f + 2a_d b c_f - 4)\mathrm{e}^{2b(a_d - r_g)} + 2)}{(a_d c_f + 2(a_d - r_g)a_d b c_f - 4(a_d - r_g))\mathrm{e}^{2b(a_d - r_g)} - 2r_g \mathrm{e}^{-2r_g b} + 2a_d}. \tag{2}$$

Заметим, что **сила взведения не зависит ни от электрического ни от гравитационного зарядов**, но зависит от параметров расслоения волновой функции.

Для теории элементарных частиц представляет интерес возможность существования состояний гравитонов со стационарными значениями числа b, что заранее не очевидно. Ниже мы покажем конкретными вычислениями, что для устойчивого взведения гравитона существуют разные значения квантового числа b.

5. Равновесные состояния взведённого гравитона. Для равновесия состояния системы, сила F должна быть равна нулю. То есть, кроме необходимого уравнения (3.10), такие состояния должны удовлетворять уравнению

$$F = 0. \tag{1}$$

Так как массы фундаментальных частиц соответствуют их малым размерам по сравнению с радиусом гравитона, то для них перекрытие сфер взведённого гравитона должно быть относительно мало. Поэтому вместо a_d удобно ввести величину

$$l = \frac{r - a}{r}, \quad a_d = a = r - rl = (1 - l)r, \tag{2}$$

характеризующую это относительно малое перекрытие.

Тогда при условии $z \neq 0$, где z – знаменатель уравнения (4.2), уравнение (1) можно записать в виде

$$f_2 = (c + 2abc - 4)\mathrm{e}^{2b(a-r)} + 2 = (c + 2(1-l)rbc - 4)\mathrm{e}^{-2lbr} + 2 = 0, \quad z \neq 0, \tag{3}$$

где **временно используются упрощённые обозначения**:

$$a = a_d, \ c_f = -1 = c, \ r_g = r, \ e = \mathrm{e}. \tag{4}$$

В этих обозначениях уравнение (3.10) имеет вид

$$f_1 = (abc - 2)\mathrm{e}^{2(a-r)b} + \mathrm{e}^{-2rb} + 1 + 2b(a - r) =$$

$$= ((1-l)rbc - 2)e^{-2lbr} + e^{-2rb} + 1 - 2blr = 0, \tag{5}$$

откуда

$$e^{2b(a-r)} = \frac{2b(r-a) - e^{-2rb} - 1}{abc - 2}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3) и умножая на $abc - 2$, получаем

$$(c + 2abc - 4)(2br - 2ba - \mathrm{e}^{-2rb} - 1) + 2abc - 4 = 0$$

или

$$c(2br - 2ba - e^{-2rb} - 1) + (2abc - 4)(2br - 2ba - e^{-2rb}) = 0,$$

откуда имеем квадратное уравнение относительно a:

$$-4cb^2a^2 + (-2cb + 4cb^2r - 2bce^{-2rb} + 8b)a + 2cbr - ce^{-2rb} - c - 8br + 4e^{-2br} = 0,$$

или

$$Aa^2 + Ba + C = 0, \tag{7}$$

где

$$A = -4cb^2, \quad B = 2b(2cbr - \mathrm{c}e^{-2br} - c + 4), \quad C = 2rb(c-4) - (c-4)e^{-2br} - c, \tag{8}$$

откуда

$$a = \frac{-B + z_1\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{9}$$

где $z_1 = \pm 1$. Подставляя это выражение в (5), получаем уравнение только относительно b

$$f_1(b) = 0, \tag{10}$$

решая которое численно (методом последовательных приближений), находим возможные дискретные значения b и, используя (9), находим соответствующие дискретные значения a. Результаты см. в (6.10.1).

Заметим, что уравнение $f_1 = 0$ (5) имеет решение: $b = 0, a$-любое, которое, однако, не удовлетворяет уравнению $f_2 = 0$ (3).

Масса взведенных равновесных состояний гравитонов отличается от их свободных состояний. Такие состояния будем называть **тонусными состояниями гравитонов** или коротко – **диронами** (в честь Дирака).

6. Гравитационный коллапс волновой функции тонусного гравитона. Энергия волновой функции зависит как от частоты так и от волнового вектора. Большая энергия тяжёлого тонусного гравитона обязана большому волновому 3-вектору при малой частоте. В **линзе пересечения** двух особых сфер тяжёлого гравитона волновая функция совершает локальную 3-пространственную осцилляцию почти точечных размеров, которой соответствует очень большая плотность энергии. В остальных частях этих сфер плотность энергии много меньше. Окрестность поверхности линзы пересечения можно рассматривать как группу плоских волн с длинами порядка толщины этой линзы. Середина этой линзы ограничена двумя почти параллельными дискообразными поверхностями диаметром много бо́льшим толщины линзы. Эти поверхности хорошо коррелируют с преобладающей волной в спектре группы.

Большой плотности энергии соответствует многократно увеличенный ультрарелятивистский темп метаболирующего простона в области линзы пересечения и относительно малое изменение темпа вне этой области. То есть происходит резкое повышение концентрации энергии в области массивного **линзообразного ядра тонусного гравитона** по сравнению с вакуумным гравитоном. Такое перераспределение плотности энергии, вызванное перераспределением темпа гравитонов в пользу концентрирования энергии у ядра тонусного гравитона, будем называть **гравитационным коллапсом вакуумного гравитона**. При коллапсе особые сферы гравитона сохраняют свои размеры (так как относительные изменения плотности вакуума, определяющей волновую функцию, ничтожны), но на них меняется распределение энергии в пользу ядра, что будем называть **выхолащиванием особых сфер** при коллапсе.

Коллапс является процессом, который может произойти при возмущении вакуумного гравитона деформирующими напряжениями, вызванными внешними полями. Для коллапса нужно не только преодолеть потенциальный барьер попадания в потенциальную яму по параметру a_d, для чего нужна огромная энергия, но и удержаться в этой яме, то есть сбросить (рассеять) лишнюю энергию, что для гравитационного процесса излучения мало вероятно. Поэтому тяжёлых гравитонов во Вселенной относительно мало. Коллапс является элементарным гравитационным процессом. Для лёгких гравитонов он более вероятен, чем для тяжёлых.

Размер образованного при коллапсе массивного **линзообразного ядра тонусного гравитона** можно оценить согласно соотношению неопределённости как комптоновская характерная длина волны, обратно пропорциональная величине b и соответствующая массе этого гравитона. При этом практически **ядро тяжёлого гравитона точечно**.

В мире элементарных частиц гравитон имеет гигантские размеры (6.7.7). Его масса распределена в окрестности сферы радиуса $r_g \approx 0,7$см, внутри которой массы нет. Чем больше масса тонусного гравитона, тем сильнее её распределение тяготеет к ядру такого гравитона. Механически тяжёлый гравитон почти точечная частица, масса которой сосредоточена в его тяжёлом ядре. Ядра лёгких тонусных гравитонов во много раз больше. Особые сферы тонусного гравитона перекрываются тем меньше, чем больше b. Огромныее размеры выхолощенных особых сфер тяжёлых гравитонов могут быть причиной редких **дистанционных взаимодействий** частиц.

7. Условие стационарности пары разных гравитонов. В предыдущем параграфе мы полагали равенство параметра b для слоёв взведённого гравитона. Теперь мы рассмотрим пару гравитонов с заранее независимыми значениями b_1 и b_2 параметра b.

Сдвигу гравитона в 4-пространстве на величину 4-вектора a^μ соответствует умножение его спектра на экспоненту $\mathrm{e}^{ia^\mu x_{k\mu}}$ (I.5.4.1.1). Поэтому спектр взаимно неподвижной пары гравитонов, сдвинутых относительно начала координат в противоположных направлениях на расстояние $\pm a_d$ по оси z_k, будет суммой двух спектров (2.5.7) одного гравитона, взятых с множителями

$$\mathrm{e}^{ia_d z_k} = \mathrm{e}^{ia_d r_k \cos\vartheta_k}, \quad \mathrm{e}^{-ia_d z_k} = \mathrm{e}^{-ia_d r_k \cos\vartheta_k} \tag{1}$$

и с разными значениями b.

Таким образом, используя (2.5.7), спектр такой пары гравитонов надо записать в виде

$$\begin{aligned} S_{ga}(r_k, a_d) &= S_{1g}(r_k)\cdot \mathrm{e}^{ia_d r_k \cos\vartheta_k} + S_{2g}(r_k)\cdot \mathrm{e}^{-ia_d r_k \cos\vartheta_k} = \\ &= \frac{i\sqrt{2b_1}}{r_k}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-b_1+ir_k)r_g}}{b_1 - ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{(-b_1-ir_k)r_g}}{b_1 + ir_k}\right)\mathrm{e}^{ia_d r_k \cos\vartheta_k} + \\ &+ \frac{i\sqrt{2b_2}}{r_k}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-b_2+ir_k)r_g}}{b_2 - ir_k} + \frac{\mathrm{e}^{(-b_2-ir_k)r_g}}{b_2 + ir_k}\right)\mathrm{e}^{-ia_d r_k \cos\vartheta_k}. \end{aligned} \tag{2}$$

В таком виде спектр, вообще говоря, не нормирован. Поэтому его необходимо нормировать на два гравитона условием

$$2N_r = \int S_{1g}S_{1g}^* + S_{2g}S_{2g}^* + S_{1g}S_{2g}^*\mathrm{e}^{i2a_d r_k \cos\vartheta_k} + S_{2g}S_{1g}^*\mathrm{e}^{-i2a_d r_k \cos\vartheta_k}\, dv.$$

Так как интеграл от первых двух членов равен $2N_r$, то имеем уравнение

$$\int S_{1g}S_{2g}^*\mathrm{e}^{i2a_d r_k \cos\vartheta_k} + S_{2g}S_{1g}^*\mathrm{e}^{-i2a_d r_k \cos\vartheta_k}\, dv = 0,$$

которое в сферических координатах (после интегрирования по φ) примет вид

$$\int (S_{1g}S_{2g}^*\mathrm{e}^{i2a_d r_k \cos\vartheta_k} + S_{2g}S_{1g}^*\mathrm{e}^{-i2a_d r_k \cos\vartheta_k}) r_k^2 \sin\vartheta_k\, d\vartheta_k\, dr_k = 0.$$

Сделаем замену переменной

$$\cos\vartheta_k = x,\ d\vartheta_k = -dx/\sin\vartheta_k,\ x_{|\vartheta_k=0} = 1,\ x_{|\vartheta_k=\pi} = -1,$$

тогда

$$\int\limits_0^\infty S_{1g}S_{2g}^* r_k^2 I_{1x} + S_{2g}S_{1g}^* r_k^2 I_{2x}\, dr_k = 0,$$

где

$$I_{\{{}^1_2 x} = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\pm 2ia_d r_k x} = \mp\frac{i}{2a_d r_k}\mathrm{e}^{\pm 2ia_d r_k x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sin 2a_d r_k x}{a_d r_k}.$$

Теперь условие нормирования пары гравитонов можно записать в виде

$$\int\limits_0^\infty (S_{1g}S_{2g}^* + S_{2g}S_{1g}^*) r_k^2 \frac{\sin a_d r_k}{2a_d r_k}\, dr_k = 0.$$

Заметим, что интеграл сходится при $a_d = 0$. Тогда, умножая это равенство на фиксированное значение a_d, получим уравнение

$$\int\limits_0^\infty (S_{1g}S_{2g}^* + S_{2g}S_{1g}^*) r_k^2 \frac{\sin a_d r_k}{r_k}\, dr_k = 0$$

или (сокращая на множитель 2)

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}\, S_{1g}S_{2g}^* r_k^2 \frac{\sin a_d r_k}{r_k}\, dr_k = 0. \tag{3}$$

Очевидно, это уравнение имеет тривиальное решение

$$a_d \to \infty, \tag{4}$$

то есть пара гравитонов может быть стационарной при разведении их на бесконечное растояние. А общее решение задачи интегрирования (3) пока не известно.

8. Гравитационный механизм изменения наблюдаемой массы гравитона. Значение b гравитона постоянно в статистически однородной среде. Оно определяет **наблюдаемую массу гравитона**. Являясь частицей, метаболирующей с вакуумными нормонами, гравитон может реагировать на гравитационные возмущения изменением своей единственной внутренней степени свободы – энергетическим параметром b, что требует обмена энергией с вакуумом. В силу инвариантности вакуума, этот обмен должен быть инвариантным, то есть

независимым от скорости гравитона. Обмен может зависеть только от ускорения гравитона.

Гравитацию характнризует единственный энергетический параметр вакуума – инвариантная плотность его энергии. Поэтому процесс обмена энергией гравитона с вакуумом равновесен при любой скорости гравитона. Нарушить его может только ускорение. Все энергетические процессы, в том числе и изменение массы гравитона, идут со скоростью, зависящей от осреднённого темпа u^0 протистонов. В однородной среде характер изменения (уменьшения с возрастом Вселенной) массы гравитона будем называть **нормальным процессом изменения массы гравитона**.

Аналогично "парадоксу близнецов" ход собственного времени в системе отсчёта, подвергавшейся ускорению, замедляется и соответственно замедляются нормальные процессы уменьшения массы гравитона, следовательно, выйдя из процесса аномального ускорения гравитон окажется с большей массой, чем бы он имел без этого ускорения.

Отсюда ясно, что средняя скорость процесса изменения наблюдаемой массы гравитона определяется относительной скоростью изменения возраста Вселенной, которая очень мала. То есть при умеренно релятивистских скоростях гравитона и относительно малых его ускорениях, **нормальный процесс изменения массы гравитона медленный**. Он может ускоряться или замедляться только большими локальными возмущениями вакуума.

§5. Различные состояния гравитонов.

1. 4-векторная волновая функция гравитона. До сих пор мы рассматривали волновую функцию гравитона как скалярную. Встаёт вопрос: чем отличается её 4-векторный вариант?

В сопутствующей гравитону системе координат определим 4-векторную волновую функцию гравитона в (пока ненормированном) виде

$$\psi^\mu = (\psi^0, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\psi} = i\psi^0\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\psi}^* = -\psi^0\psi^{0*}, \tag{1}$$

где, как и в (3.1.3),

$$\psi^0 = |\boldsymbol{\psi}| = \psi = \psi_r\psi_t = \frac{A}{r}\mathrm{e}^{-br+i\nu t}, \tag{2}$$

$$\psi_r = \mathrm{e}^{-br}/r, \quad \psi_t = \mathrm{e}^{-i\nu t}. \tag{3}$$

Выражение (1) можно записать также в виде

$$\psi^\mu = (1, i\mathbf{e})\psi^0 = (1, i\mathbf{e})\psi, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}$ – единичный радиус-вектор. В сопутствующей сферической системе координат функция ψ^μ не зависит от направления вектора $\mathbf{e}$, поэтому при её дифференцировании 4-вектор $(1, i\mathbf{e})$ можно считать постоянным. Тогда волновая

функция ψ^μ будет удовлетворять тому же волновому уравнению (3.1.1), что и скалярная волновая функция ψ

$$\frac{\partial^2\psi^\mu}{\partial t^2} - \Delta\psi = -\mu^2\psi^\mu, \quad \mu^2 \leqslant k^2. \tag{5}$$

И все следствия остануться аналогичными, за исключением вдвое большего квадрата нормы:

$$\psi^\mu\psi_\mu = \psi^0\psi^{0*} - \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\psi}^* = 2\psi^0\psi^{0*} = -2\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\psi}^*. \tag{6}$$

Спектральное представление 4-векторной волновой функции аналогично (4.1.2):

$$S^\mu(x_k^\mu) = 2\pi(1, i\mathbf{e})\int\limits_0^\pi\int\limits_{r_g}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \psi \mathrm{e}^{-ix_{k0}\,x^0 + ir_k r\,\cos\vartheta}\, r^2\sin\vartheta\; dx^0\, dr\, d\vartheta. \tag{7}$$

При этом за счёт множителя $(1, i\mathbf{e})$ выражение $S^\mu S^*_\mu$ вдвое больше, чем выражение SS^*. Поэтому **квадрат нормы** N'_r **для 4-векторной волновой функции** вдвое больше чем (4.1.8)

$$N'_r = 4\pi\int\limits_0^\infty S_g^\mu S^*_{g\mu} r_k^2\, dr_k = 2N_r = 4\pi\int\limits_0^\infty S_g S_g^* r_k^2\, dr_k, \tag{8}$$

что требует соответствующего двукратного перенормирования $S_g^\mu S^*_{g\mu}$, после чего $N'_r = N_r$ и тогда $c'_f = c_f = \mp 1$.

Это ещё раз подтверждает **эквивалентность различных тензорных представлений 4-волновой функции в стационарном случае** (6.3.5.6).

(9)

2. Квантовые состояния взведённых гравитонов. Волновая функция вакуумного гравитона 5-кратно вырождена по заряду и 5-кратно – по спину, то есть всего вакуумный гравитон имеет 25 вырожденных состояний. Волновая функция тонусного гравитона является стационарной линейной комбинацией сдвигов волновой функции вакуумного гравитона одного тензорного типа, поэтому, как и для вакуумного гравитона, **спектр зарядов взведённого гравитона** имеет значения $0, \pm q/3, \pm 2q/3$ (3.3.2), а **спектр спинов суперсимметричен** и имеет в проекциях значения $0, \pm\hbar/2, \pm\hbar$ (6.5.6.2). Так как значения заряда и спина не входят в волновую функцию взведённого гравитона, то **каждое взведённое состояние гравитона 25-кратно вырождено**, хотя по **квантовым числам взведения** a_d и c_f взведённый гравитон не вырожден.

3. Массы тонусных гравитонов. Согласно (3.3.8),(3.3.7), вычислив возможные значения величины b тонусных гравитонов, легко найти весь спектр их масс по формуле

$$m = \hbar b\sqrt{z_q^2 + 1}, \quad z_q = 0, \pm 1/3, \pm 2/3. \tag{1}$$

где z_q – зарядовое квантовое число.

4. Условно замкнутые системы гравитонов. Квантовая механическая система может быть полностью механически замкнутой если она как целое статистически равновесна, то есть нейтральна по всем квантовым числам (они все должны быть равны нулю). При этом на неё по определению не действуют (в статистическом смысле) никакие внешние силы. Если же допустить отличие от нуля только одного квантового числа (массы), то система будет испытывать действие гравитационных сил. В силу относительной слабости гравитации, квантовую систему со всеми нулевыми квантовыми числами, кроме массы, будем называть **вакуумно-замкнутой** или даже просто **замкнутой** (в зависимости от существенности для неё гравитации).

В частности вырожденный гравитон является вакуумно-замкнутой системой. Любое снижение степени его вырождения нарушает вакуумную замкнутость и суперсимметрию гравитона. Это может происходить как во внешнем макроскопическом поле, так и спонтанно, вследствие внутреннего напряжения суперсимметричного гравитона, которое будет ниже рассмотрено.

Слабо-незамкнутой будем называть систему, имеющую не нулевые спины и/или целочисленные электрические заряды. Систему, имеющую дробные электрические заряды, будем называть **сильно-незамкнутой**.

§6. Основные константы и физические единицы.

Этот параграф даёт нам возможность ориентироваться в масштабах изучаемых величин. Связи между определёнными в этой теории величинами позволяют однозначно найти статистические значения этих величин для любого возраста Вселенной.

1. Безразмерные единицы измерения интервала. Приравнивая к единице **релятивистский предел скорости (скорость света)**

$$C = 1 = A_c\,\text{см/с}, \tag{1}$$

где

$$A_c = 2,99792458 \cdot 10^{10} = \text{const}(\text{T}), \tag{2}$$

имеем связь единиц см, с.

$$\text{см} = \text{с}/A_c. \tag{3}$$

Представим гравитационную постоянную (7.1.7.5) в виде

$$G = \frac{3|k|}{4\pi^2 q^2} = \frac{3|k|}{4\pi^2 \alpha_0 \hbar} = A_G\,\text{г}^{-1}\text{см}^3 c^{-2} = A_G A_c^{-3}\,\text{с}\cdot\text{г}^{-1}, \tag{4}$$

где

$$A_G = 6,675(45)\cdot 10^{-8}, \quad \alpha_0 = 0,159526852. \tag{5}$$

Нам понадобится выражение единицы энергии в виде ([Яворский, с.904])

$$\text{дж} = \text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2 = 10^7 \text{см}^2 \cdot \text{г}/\text{с}^2, \tag{6}$$

Используя экспериментальное значение постоянной Планка

$$\hbar = 1,054571596 \cdot 10^{-34} \text{дж} \cdot \text{с} = 1,054571596 \cdot 10^{-27} \text{см}^2 \cdot \text{г}/\text{с} = A_h \ \text{г} \cdot \text{с}, \tag{7}$$

где

$$A_h = (1,054571596 \cdot 10^{-27}/A_c^2) = 1,17336915 \cdot 10^{-48}. \tag{8}$$

Из (4) имеем:

$$\frac{3|k|}{4\pi^2 \alpha_0 A_h \, \text{г} \cdot \text{с}} = A_G A_c^{-3} \, \text{с} \cdot \text{г}^{-1},$$

откуда

$$\text{с}^2 = A^2 |k|, \quad A^2 = \frac{3A_c^3}{4\pi^2 \alpha_0 A_h A_G}, \quad \text{с} = A|k|^{1/2} \approx 1,2800805834 \cdot 10^{43} |k|^{1/2}, \tag{9}$$

$$\text{см} = \text{с}/A_c = A|k|^{1/2}/A_c \approx 0,42698892 \cdot 10^{33} |k|^{1/2}, \tag{10}$$

откуда получаем **безразмерную единицу интервала**, выраженную в секундах и сантиметрах

$$1 = 0,781201 \cdot 10^{-43} |k|^{-1/2} \text{с} = 2,34198 \cdot 10^{-33} |k|^{-1/2} \text{см}. \tag{11}$$

Эта единица при $|k| \sim 1$ близка к **планковской длине** [Википедия].

2. Безразмерный возраст Вселенной. Сравним определённый в нашей теории фактор Хаббла для (**настоящей эпохи**) с результатами астрономических измерений [Википедия]

$$H = \frac{1}{T_0} = (67,80^{+0,77}_{-0,77}) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпс}} = A_H \, \text{с}^{-1}, \tag{1}$$

где

$$\text{Мпс} = 3,0856776 \cdot 10^{19} \text{км} \quad \text{[Википедия]},$$

$$A_H = (2,19725^{+0,025}_{-0,025}) \cdot 10^{-18}, \tag{2}$$

чему соответствует **современный возраст Вселенной**

$$T_0 = A_T \, \text{с} \approx 14,42 \cdot 10^9 \text{лет}, \tag{3}$$

где

$$A_T = \frac{1}{A_H} = (4,551 \pm 0,052) \cdot 10^{17}, \tag{4}$$

$$1\text{год} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{с} = 365,256 \text{сут} \tag{5}$$

(звёздный год). В безразмерных единицах (1.9) из (3) получаем

$$T_0 = \sqrt{\frac{3|k|A_c^3 A_T^2}{4\pi^2 \alpha_0 A_h A_G}} = A_0 |k|^{1/2} \approx 4,384 \cdot 10^{17} \cdot 1,280315551 \cdot 10^{43} k^{1/2} \approx$$

$$\approx 5,8258347821 \cdot 10^{60} |k|^{1/2}, \tag{6}$$

где

$$A_0 = A \cdot A_T = \sqrt{\frac{3A_c^3 A_T^2}{4\pi^2 \alpha_0 A_h A_G}} \approx 5,8258347821 \cdot 10^{60}. \tag{7}$$

Величина T_0 является универсальным эталоном измерений. Из (3.3.2.6)

$$S_J = 2 \int\limits_{-\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3}}^{0} \operatorname{ch}(2\operatorname{arc\,tg} \mathrm{e}^x - \pi/2)\, dx, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{ar\,ch}\sqrt{|k|T/3} = \ln(\sqrt{|k|T/3} + \sqrt{|k|T/3 - 1}).$$

Из (I.8.5.5.3),(6.8.2.10).

$$u^{02} = \frac{8\pi T}{3k^2}, \quad u_N^0 = u^0. \tag{9}$$

Из (I.8.5.3.2),(1.1.9)

$$q = \frac{\varepsilon_q k_q}{T^3}, \quad \hbar = \frac{k_q^2}{\alpha_0 T^6} \sim 1/k^6, \tag{10}$$

где (I.8.5.5.2)

$$k_q = \frac{1}{2^7 \pi^5}. \tag{11}$$

3. Безразмерные единицы энергии. Из (1.7),(1.8),(1.9) имеем

$$\text{г} = \frac{\hbar}{A_h\ \text{c}}, \tag{1}$$

$$\hbar = A_h\,\text{г} \cdot \text{c} = A_h \text{г} \cdot A|k|^{1/2} = 1,50228277 \cdot 10^{-5} |k|^{1/2} \text{г}. \tag{2}$$

Безразмерное значение $\hbar$ найдём из (6.8.1.9),(2.10),(2.11),(2.6)

$$\hbar = c_R |k| = \frac{k_q^2}{\alpha_0 T_0^6} = \frac{1}{2^{14}\pi^{10}\alpha_0 T_0^6} = \frac{1}{2^{14}\pi^{10}|k|^3 \alpha_0 A_0^6}, \tag{3}$$

откуда, сравнивая с (2), находим значение грамма в безразмерных единицах (используя (2.6))

$$\text{г} = \hbar/(A_h\,\text{c}) = \frac{k_q^2}{\alpha_0 A_h\,\text{c}\, T_0^6} = \frac{1}{2^{14}\pi^{10}\alpha_0 A_h\ \text{c}\, T_0^6}. \tag{4}$$

Отметим следующие связи практических единиц измерения энергии [Вихман, с.402].

$$1\text{эв} = (11604,9 \pm 0,5) \cdot K = (2,41804 \pm 0,00002) \cdot 10^{14}\text{гц} = 1,78258 \cdot 10^{-33}\text{г}, \qquad (5)$$

$$1\text{Гэв} = 1,78258 \cdot 10^{-24}\text{г}. \qquad (6)$$

Заметим, что из (5) температуре реликтового излучения отвечает средняя частота реликтовых фотонов согласно цепочке соответствий:

$$A_K K = 2,72548\,K \to 0,00023485596601\text{эв} \to 5,6789112006 \cdot 10^{10}\text{гц}, \qquad (7)$$

где A_K – реликтовая температура в кельвинах. Этой частоте соответствует период и длина волны:

$$T_r = (1/5,6789112006 \cdot 10^{10})\text{с} \approx 0,528\text{см}. \qquad (8)$$

Удобно использовать постоянную Планка, выраженную из (2) в граммах:

$$\hbar_g = \hbar/\text{г} = A_h\text{с}. \qquad (9)$$

Тогда любой квантовой частице с энергией $\mathcal{E}_g$, выраженной в граммах соответствует угловая частота

$$\omega = 2\pi f = \mathcal{E}_g/\hbar_g, \qquad (10)$$

выраженная в безразмерных единицах.

4. Космологическое ускорение свободных протистонов.

Так как значение m_m космологически медленно убывает, а скорость протистона испытывает почти постоянное **космологическое ускорение**, то кроме силы Лоренца на протистон действует почти постоянная **космологическая реактивная сила**, которую можно рассматривать как результат осреднения силы реакции излучения по **астрономически большим интервалам** (много большим лабораторных интервалов, характерных для силы Лоренца).

Локальные статистические неоднородности электромагнитного поля проявляются силой Лоренца и соответствующим излучением. Космологическая же реактивная сила является глобальной и поэтому вызывает статистически равномерное ускорение протистонов.

Свободный протистон характеризуется внешней скоростью своего почти прямолинейного движения. Таким образом, двигаясь в изначальной системе отсчёта практически прямолинейно, свободный протистон испытывает ускорение, выражающееся лишь в изменении модуля (а не направления) компоненты скорости $\mathbf{u}$. При этом должно выполняться **условие однонаправленности скорости и ускорения**

$$[\mathbf{av}] = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Так как модуль 4-ускорения

$$w = \sqrt{-w_\mu w^\mu} = \sqrt{a^2 - [\mathbf{va}]^2}\; u^{03}, \qquad (2)$$

то с учётом (1)

$$w = au^{03}. \tag{3}$$

Компонента 4-скорости u^0 выражается через модуль скорости по формуле

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{4}$$

откуда

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{u^{02}}}. \tag{5}$$

Тогда, с учётом условия $[\mathbf{av}] = \mathbf{0}$, имеем

$$w = au^{03} = \left|\frac{dv}{dT}\right| u^{03} = \frac{dv}{dT} u^{03} = \frac{\frac{du^0}{dT}}{u^{03}\sqrt{1-\frac{1}{u^{02}}}} u^{03}, \tag{6}$$

что с космологической точностью можно записать в виде

$$w = \frac{du^0}{dT}, \tag{7}$$

откуда

$$u^0 w = \frac{1}{2}\frac{du^{02}}{dT} = \frac{1}{2}\frac{du^{02}}{u^0 ds} = \frac{du^0}{ds} = w^0, \tag{8}$$

таким образом

$$w = \frac{w^0}{u^0}, \qquad w^0 = wu^0. \tag{9}$$

Исходя из космологического темпа свободного протистона (I.8.5.5.3)

$$u^0 = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2}T^{1/2}}{3^{1/2}|k|}, \tag{10}$$

находим из (7) инвариантное ускорение (модуль 4-ускорения) свободного протистона

$$w = \sqrt{-w^\mu w_\mu} = \frac{2^{1/2}\pi^{1/2}}{3^{1/2}|k|T^{1/2}}. \tag{11}$$

5. Излучение Унру свободных протистонов. Согласно (4.11) космологическое ускорение свободного протистона, как и нормона, определяется выражением

$$-w^\mu w_\mu = \frac{2\pi}{3k^2T}. \tag{1}$$

Такое **космологическое ускорение свободного нормона** изменяется космологически медленно с возрастом Вселенной. Это представляет интерес с точки зрения применения к нему, а следовательно и к любой квантовой частице, понятия

температуры Унру. Температура Унру [Гинзбург 3] характеризует тепловое возбуждение некоторого физического детектора, движущегося равноускоренно в физическом вакууме. При этом возникает реальный теплообмен детектора с вакуумом, **зависящий только от ускорения, но не от скорости детектора**, поэтому температуру этого обмена можно относить к любой инерциальной системе, то есть **температура Унру – релятивистский инвариант**, что однако не относится к любым температурам. Реальные **фотоны Унру** отождествимы (благодаря их тепловому спектру) с **реликтовыми фотонами** (6.11.7.*)

Энергия возбуждения детектора происходит от работы силы, ускоряющей детектор и распределяется по состояниям детектора как при его нагревании при торможении.

Температура измеряется в единицах энергии, определяемых постоянной Больцмана. Измеряя температуру в тех же единицах, что и энергию [Ландау 5, (9,3)], надо принять постоянную Больцмана равной 1

$$k_B = 1. \tag{2}$$

Тогда для температуры Унру T_U° космологического ускорения свободных протистонов, согласно [Гинзбург 3, (1.3)],[Фролов, с.7,18] получаем, учитывая (4.11),(2.6)

$$T_U^\circ = \frac{\hbar\sqrt{-w^\mu w_\mu}}{2\pi k_B} = \frac{\hbar}{6^{1/2}\pi^{1/2}|k|T^{1/2}} = \frac{\hbar}{6^{1/2}\pi^{1/2}|k|^{5/4}A_0^{1/2}}. \tag{3}$$

Эта величина имеет смысл средней энергии реликтового фотона.

Заметим, что данная интерпретация реликтового излучения отличается от общепринятой, где это излучение происходит от раннего этапа развития Вселенной, а затем свободно распространяется до современности. А в ДФ реликтовое излучение формируется и в современную эпоху. Обе интерпретации реликтового излучения в достаточной степени совместимы при подходящем выборе искажения основной метрики ДФ (I.3.5.5.*). **В такой метрике Вселенная расширяется ускоренно**.

6. Номер нашей Вселенной. Из (3.2) можно выразить $\hbar$ в граммах

$$\hbar = A_h\,\text{г}\cdot A\,|k|^{1/2}, \tag{1}$$

тогда и температура Унру (5.3) выражается в граммах

$$T_U^\circ = \frac{A_h A}{3^{1/2}\pi^{1/2}|k|^{3/4}A_0^{1/2}}\,\text{г} = A_{Ug}\,\text{г}, \tag{2}$$

откуда вычисляется безразмерное значение $|k|$

$$|k|^{3/4} = \frac{A_h A}{3^{1/2}\pi^{1/2}A_0^{1/2}A_{Ug}}. \tag{3}$$

Интерпретируя A_{Ug} как **температуру реликтового излучения**, выраженную в граммах, получим (3.5)

$$A_{Ug} = A_K \cdot 1,78258 \cdot 10^{-33}/11604,9, \tag{4}$$

где $A_K = 2,725(48)$ – реликтовая температура в градусах Кельвина.
Подставляя безразмерное значение A_{Ug} в (3), получим

$$|k| = 8,1911007733 \quad k^2 = 67,094131878. \tag{5}$$

Температура (2) является средней по Вселенной, однако гравитация распределяет эту температуру неравномерно согласно термодинамическому соотношению [Ландау 5, (27,2)]

$$T^\circ = \mathrm{const} \cdot \frac{dx^0}{ds}, \tag{6}$$

где $dx^0/ds = u^0$ – темп тела, – безразмерная величина,

const – постоянная величина с размерностью температуры. Понимая $u^0 = u^0_G$ как темп гравитона, а const как температуру T°_0 неподвижного потока гравитонов, имеем

$$T^\circ = T^\circ_0\, u^0_G. \tag{7}$$

Найденное значение $k^2 = 67,094131878$ по своему смыслу должно быть целым. Его округление до ближайшего целого значения $k^2 = 67$ находится в пределах поля погрешности измерения фактора Хаббла (определяющего общую погрешность), в то время как округление до следующих ближайших целых значений выходит за пределы этого поля. Поэтому с хорошей вероятностью допустимо принять

$$k^2 = N = 67. \tag{8}$$

Это позволяет получить реликтовую температуру со значительно большей точностью. Методом последовательных приближений подбираем значение

$$A_K = 2,726(9153), \tag{9}$$

обеспечивающее значение $k^2 = 67,00000$. При этом погрешность значения A_K определяется погрешностью наиболее неточной используемой величины, какой является гравитационная постоянная G.
Далее для A_K используется значение (9)**!** При этом (4),(2)

$$A_{Ug} = 4,188(7) \cdot 10^{-37}, \quad T^\circ_U = A_{Ug}\text{г} = 234,9(8)\mu eV. \tag{10}$$

Обратим внимание, что значение $|k|$ не зависит от α_0.

Зная $|k|$, из (2.6),(2.8),(2.9),(3.3.6.6) найдём

$$S_J = 538,9931, \quad u^0 = 1,443(645) \cdot 10^{30}, \quad \beta = |k| S_J u^0/\pi = 2,027(361) \cdot 10^{33}. \tag{11}$$

7. Безразмерные и размерные значения основных величин. Определив k, используя (6.9), мы получаем возможность выразить в безразмерном виде физические единицы измерения интервала

$$\text{с} = 3,662(318)\cdot 10^{43}, \quad (1.9), \quad \text{см} = 1,221(618)\cdot 10^{33} \quad (1.10) \tag{1}$$

и энергии, используя (3.1),(3.3)

$$\text{г} = \frac{1}{2^{14}\pi^{10}|k|^3\alpha_0 A_h\ c\,A_0^6} = 4,433(9998)\cdot 10^{-372} = 1,524(914)\cdot 10^{24} Gev, \tag{2}$$

а также возраст Вселенной в безразмерном и размерном виде (2.6)

$$T_0 = 1,666(775)\cdot 10^{61} = 4,551(147)\cdot 10^{17}\text{с} = 1,364(3995)\cdot 10^{28}\text{см} =$$

$$= 14,42(1477)\cdot 10^{9}\text{лет}. \tag{3}$$

Из (6.1) находим постоянную Планка в граммах, а затем, её можно перевести в безразмерный вид с помощью (3) (здесь возможно переполнение разрядной сетки компьютера)

$$\hbar = 1,905(4008)\cdot 10^{376} = 4,297(25054)\cdot 10^{-5}\text{г} = 2,410(6915)\cdot 10^{19}\text{Гэв}, \tag{4}$$

откуда квадрат заряда простона

$$q^2 = \alpha_0\hbar = 0,303(9626)\cdot 10^{376} = 6,855(2685)\cdot 10^{-6}\text{г} = 3,845(7003)\cdot 10^{18}\text{Гэв}. \tag{5}$$

Из (5),(6.11) и (1.5.4.4) масса простона

$$m_m = 4,1083\cdot 10^{408} = 9,265\cdot 10^{27}\text{г} = 5,1977\cdot 10^{51}\text{Гэв}. \tag{6}$$

Из (3.4.8) радиус гравитона является космологической постоянной:

$$r_g = \frac{k^2 S_J u^0}{2\pi^3} = 8,406(95)\cdot 10^{32} = 0,6881(82)\text{см}. \tag{7}$$

Длительность шага протистона в реликтовой системе (3.1.5.6)

$$\Delta T = \pi/k = \pi/\sqrt{67} = 0,38380663 = 1,047988\cdot 10^{-44}\text{с}. \tag{8}$$

Вакуумные гравитоны находятся в тепловом равновесии с реликтовым излучении при температуре T_U°, поэтому среднюю скорость v_g гравитонов можно найти из соотношения

$$u_g^0 = \frac{T_U^\circ}{m_{g0}} + 1 = 1,00172, \quad v_g = \sqrt{1 - 1/u_g^{02}} = 0,0586 = 17570\text{км/с}. \tag{9}$$

8. Некоторые глобальные характеристики Вселенной. В каждый данный момент число протистонов, видимых из данной точки, неподвижной в реликтовой системе отсчёта, конечно и равно (I.10.2.6.2)

$$N_s = \frac{T^3}{2^8 3\pi^4 k_q} = 2,424(539)\cdot 10^{183}. \tag{1}$$

При этом в плоском пространстве возраста T в 8 раз больше простонов из-за его в 8 раз бóльшего объёма.

Независимо от теоретической модели гравитации, кинематика равномерного расширения нашей Вселенной в плоском 4-пространстве требует постоянного поддержания средней плотности энергии вещества Вселенной на уровне **критической плотности** [Гуревич, (1.2.25)]

$$\varrho_0 = \varrho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G T^2}, \tag{2}$$

где G – гравитационная постоянная. Подставляя в это выражение гравитационную постоянную из (1.7.5)

$$G = \frac{3|k|}{4\pi^2 q^2} = \frac{3|k|}{4\pi^2 \alpha_0 \hbar}, \tag{3}$$

получаем **среднюю плотность энергии вещества Вселенной**

$$\varrho_0 = \frac{\pi\alpha_0\hbar}{2kT^2} = \frac{\pi k_q^2}{2kT^8} = 4,735(362)\cdot 10^{-129}\text{г}/1^3 = 8,632(948)\cdot 10^{-30}\text{г}/\text{см}^3, \tag{4}$$

где постоянная Планка взята в граммах (7.4), а результат в граммах на безразмерную единицу объёма переведён в г/см^3.

Концентрация простонов обоих знаков (I.8.5.5.4)

$$2\check{c}_q = 2 = 3,646(1617)\cdot 10^{99}\text{см}^{-3}. \tag{5}$$

Из (6.8.2.9) коэффициент дефекта массы простона в нормоне

$$g_n = m_n/m_m = 3,796(328)\cdot 10^{-32}, \tag{6}$$

где

$$m_n = \hbar|k| = 3,517(451)\cdot 10^{-4}\text{г} = 1,973(236)\cdot 10^{20}\text{Гэв}. \tag{7}$$

Концентрация реликтовых фотонов (6.11.5.6),(6.11.4.9),(5.6)

$$c_r = \frac{2k_B^3 T_U^{\circ 3}\zeta(3)}{\pi^2\hbar^3} = 2,255(906)\cdot 10^{-97} = 411,2(70)\text{см}^{-3}. \tag{8}$$

Плотность энергии реликтового излучения (6.11.5.7)

$$\varrho_r = W_r = \frac{\pi^2 k_B^4 T_U^{\circ 4}}{15\hbar^3} = 2,552(428)\cdot 10^{-133}\text{г} = 4.653(283)\cdot 10^{-34}\text{г}\cdot\text{см}^{-3}. \tag{9}$$

Согласно (3.7.1) масса вакуумного (в том числе реального) гравитона

$$m_{g0} = m_n/u^0 = 0,1366(8)\text{эв} = 2,4365(1) \cdot 10^{-34}\text{г}. \tag{10}$$

Согласно (10.1) лёгкие гравитоны много легче этой величины, а тяжёлые – много тяжелее. В реликтовом излучении равновесны только реальные гравитоны, поэтому их концентрация подавляюще велика относительно гораздо более лёгких и гораздо более тяжёлых тонусных гравитонов. Тогда получим среднюю **концентрацию реальных гравитонов** во Вселенной в виде:

$$c_g = \varrho_0/m_{g0} = 35431\text{см}^{-3}. \tag{11}$$

А согласно (3.8.2), имеем пара-расщепление массы вакуумных гравитонов

$$-\Delta m_{g0}/m_{g0} = 1/u^{02} = 4,7982092 \cdot 10^{-61}. \tag{12}$$

При **нуклеосинтезе** ранней Вселенной это число было много больше.

9. Влияние возраста Вселенной на измеряемые величины. Согласно (8.4) плотность энергии, создающей гравитационное поле, обратно пропорциональна 8-й степени возраста Вселенной, в то время как сохранение энергии Вселенной при её равномерном расширении требует обратной пропорциональности средней плотности энергии кубу возраста Вселенной.

Это противоречие снимается, только если вся энергия Вселенной состоит из двух частей, одна из которых (**гравитационная**) создаёт гравитационное поле, имеющее необходимые градиенты гравитационного потенциала (1.7.6), а другая (**вакуумная**) не создаёт такого поля. Тогда подавляющая часть энергии Вселенной имеет **плотность вакуумной энергии**, пропорциональную $1/T^3$ и только космологически малая часть энергии Вселенной имеет **гравитационную плотность энергии**, пропорциональную $1/T^8$.

Выражение (3.2)

$$\hbar = A_h\, \text{г} \cdot \text{с} \sim 1/T^6 \tag{1}$$

подставим в (8.4), получим

$$\varrho_0 = \frac{\pi \alpha_0 A_h \cdot \text{г} \cdot \text{с}}{2|k|T^2} \sim 1/T^8, \tag{2}$$

где изменение величины A_h противоречит опытным данным, получаемым с достаточно высокой точностью. Поэтому следует отказаться от неизменности одной из единиц г или с. При этом следует допустить изменение единицы г, так как изменение единицы интервала нарушит метрику пространства, на которой основана вся механика. Тогда согласно (2) необходимо принять, что единица энергии г, а вместе с ней и любые другие единицы энергии должны изменяться обратно пропорционально шестой степени возраста Вселенной

$$\text{г} \sim \text{Гэв} \sim \text{дж} \sim \text{К} \sim \ldots \sim 1/T^6 \sim q^2. \tag{3}$$

Таким образом единственной зависящей от возраста Вселенной единицей измерения можно выбрать единицу элементарного заряда. Являясь **естественным эталоном** как электрических так и энергетических величин, она обеспечивает прорпорциональное изменение масс и зарядов элементарных частиц, то есть неизменность их свойств в эталонных единицах. Тогда в эталонных единицах

$$A_h = \text{const},\ A_c = \text{const},\ A_G = \text{const},\ A = \text{const}, \tag{4}$$

но согласно (2.1),(2.3),(2.6)

$$A_H = A_{H0}T_0/T,\ A_T = A_{T0}T/T_0,\ A_0 = A \cdot A_T, \tag{5}$$

где $A_{H0},\ A_{T0},\ T_0$ – значения величин $A_H,\ A_T,\ T$ в момент измерения, величина S_J имеет логарифмический характер зависимости от T согласно (2.8).

Величины A_K, A_{Ug} в разных единицах выражают температуру T_U° реликтового излучения, которая снижается с возрастом Вселенной согласно (5.3), то есть

$$T_U^\circ \sim \hbar/A_0^{1/2} \sim \hbar/T^{1/2}. \tag{6}$$

10. Тонусные состояния гравитонов. Вычисления по формулам (7.4.5.*) на персональном компьютере обнаруживают решения:

Бозоны ($s = 0, \hbar$) и **фермионы** ($s = \hbar/2$):

$$\begin{cases} 1)\ c_f = 1 = -P(7.4.3.2);\ z_1 = 1; \\ \underline{a_d = -9,4978514270 \cdot 10^{32};\ b = 1,3635369574 \cdot 10^{-34} (\hbar b = 3,287 \mu eV);} \\ 2)\ P = -1;\ z_1 = -1; \\ \underline{a_d = 8,4069562548 \cdot 10^{32};\ b = 1,2364313402 \cdot 10^{-16} (\hbar b = 2980,65 GeV);} \\ 3)\ P = 1;\ z_1 = 1; \\ \underline{a_d = -6,5601689525 \cdot 10^{32};\ b = 2,8055503586 \cdot 10^{-34} (\hbar b = 6,7633 \mu eV);} \\ 4)\ P = 1;\ z_1 = -1; \\ \text{решений не обнаружено.} \end{cases} \tag{1}$$

Из таблицы (1) значения масс тонусных гравитонов можно найти по формуле (7.5.3.1), учитывающим электрический заряд

$$m = \hbar b \sqrt{z_q^2 + 1} = (2980,65;\ 3141,9;\ 3295,2)\text{Гэв}, \quad z_q = 0,\ \pm 1/3,\ \pm 2/3, \tag{2}$$

где значение $\hbar b$ назовём **основной массой тонусного гравитона**.

Обратим внимание на очень широкий спектр масс, тонусных состояний гравитона, покрывающий весь спектр наблюдаемых элементарных частиц. Кроме **лёгких гравитонов** с основными массами 3,287мкв и 6,7633мкв, имеется тяжёлый гравитон (**тяжелон**) с основной массой 2980,65Гэв. Согласно (8.10) **масса вакуумного гравитона** $m_g = 0,1366(8)$ эв. Основные массы определяются импульсной компонентой $\hbar b$, а не частотой волновой функции.

11. Размеры тонусных гравитонов. Согласно (3.1.6), волновая функция гравитона экспоненциально убывает с ростом радиуса, поэтому приращение радиуса слоя тяжелона на относительно малую величину порядка в $\sim 10^{18}$ раз меньше радиуса гравитона практически обнуляет волновую функцию этого слоя. Это с большой точностью превращает квадрат модуля слоя волновой функции тяжелона в обобщённую функцию вида

$$\psi^{\nu}\psi_{\nu}^{+} = \frac{1}{4\pi r_g^2}\delta(r - r_g). \tag{1}$$

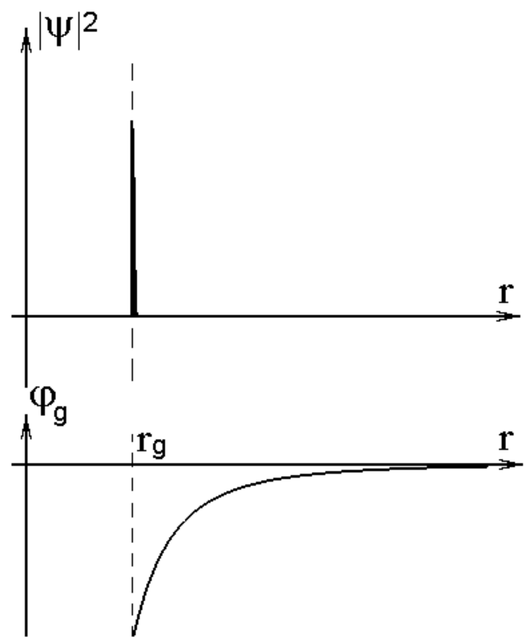


Рис. 207.3.

То есть слои тяжелона выглядят как жёсткие сферы с радиусом r_g и очень тонкой стенкой, вблизи касания которых сила взведения может быть велика и резко обрываться вне касания. Это говорит о возможности **слипания сфер этих слоёв гравитона** (рис.207.4).

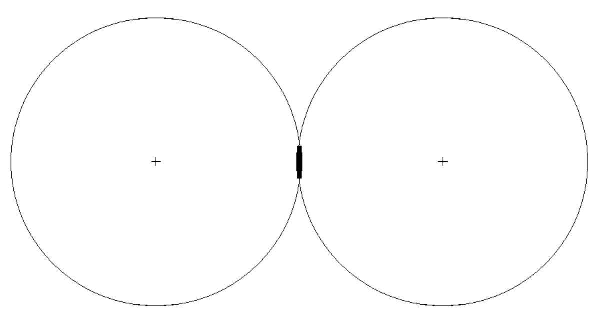


Рис. 207.4.

В местах касания стенок двух слоёв волновой функции стационарного взведённого гравитона (тяжелона) образуется практически точечный объект (4.6.*).

Его размер можно грубо оценить как комптоновскую длину волны, что для массы 3000 Гэв даёт около $4\cdot10^{-17}$см. А при массе лёгкого тонусного гравитона этот размер гораздо больше – порядка радиуса r_g вакуумного гравитона.

§7. Гравитоны в вакууме.

1. Нулевые колебания вакуума. Абстрактный (в смысле квантовых чисел) нормон имеет нулевой (в среднем) электрический заряд. То есть **нормон в вакууме вырожден по всем квантовым числам – суперсимметричен** и его можно рассматривать как равновесную **смесь** всех его зарядовых состояний. Эта смесь не может быть основным состоянием никакого оператора [Ландау 3, §20]. Её средний заряд и спин равны нулю.

Находясь в вакууме во всевозможных состояниях по 4-импульсу нормоны делают **вакуум микроскопически не стационарным**, то есть их интерференция создаёт **нулевые колебания вакуума** на фоне постоянной средней плотности его энергии, которая ненаблюдаема именно благодаря её постоянству.

Если нулевые колебания вакуума осреднить во времени, то можно говорить о нормонах, находящихся в статистически однородной и изотропной среде (вакууме), в которой действуют все механические законы сохранения. То есть **в вакууме нормоны макроскопически свободны**. Независимо от величины зарядов их энергии и массы одинаковы (**вырождены**) и имеют дефект в силу взаимной связи всех нормонов. **Виртуальная энергия** колебаний вакуума обеспечивает все возможные превращения (**реакции**) элементарных частиц.

Нормоны не чувствуют разницы своих цветовых зарядов, так как они статистически равномерно распределены по пространству. В сравнении с концентрацией нормонов, реальные гравитоны имеют очень низкую концентрацию. Тяжелоны образут фундаментальные частицы, для которых цветовой заряд существен. Свободные же гравитоны безразличны к цветовому заряду благодаря огромным размерам. Электрические и цветовые заряды свободных гравитонов не существенны для их массы, так как свободный гравитон макроскопически велик и в идеальном гравитонном газе статистически обезличен. Напротив, связанные состояния гравитонов могут быть чувствительны (в смысле значения массы) к их различным зарядам, влияющим на энергию связи.

Лёгкие тонусные гравитоны – результат **гравитационного коллапса вакуумного гравитона**, который крайне редок из-за необходимости гравитационного излучения избытка энергии.

Волновая функция вакуумного гравитона сферически симметрична (2.1.3), поэтому **вакуумный гравитон не имеет моментов вращения**, хотя **вакуумный гравитон может иметь любое значение спина** $0, \hbar/2, \hbar$, как и метаболирующий в нём нормон. То есть как и нормон, **вакуумный гравитон суперсимметричен**.

Формально существуют **антигравитоны** с противоположным знаком концентрации простонов (относительно постоянной вакуумной составляющей), но такие

гравитоны сглаживаются самой гравитационной силой отталкивания и поэтому наблюдаемы только в виде флуктуаций физического вакуума.

Все **наблюдаемые частицы** являются связанными состояниями гравитонов.

Тяжёлые гравитоны образуют вещество, а лёгкие равномерно заполняют всю Вселенную, как и реликтовое излучение. Поэтому это излучение близко к термодинамическому равновесию с газом лёгких заряженных гравитонов, с которыми оно взаимодействует, что означает близость температур реликтового излучения T_r° и газа лёгких заряженных гравитонов, то есть вакуумные гравитоны **холодные**.

$$T_r^\circ \approx T_{glc}^\circ. \tag{1}$$

2. Рекомбинация и диссоциация гравитонов. Дискретные квантовые числа **вакуумного гравитона**, симметричные по знаку имеют нулевые средние значения, а ненулевой остаётся только среднее значение массы m_{g0}, определённой как положительная величина. Иначе говоря, **вакуумный гравитон суперсимметричен**. Определённое значение его энергии покоя (массы) можно рассматривать как **вырождение вакуумного гравитона по всем квантовым числам**.

Флуктуации вакуума рождают, то есть разводят друг от друга гравитоны пары с противоположными квантовыми числами, которые статистически стремятся снова сблизиться, чтобы нейтрализовать друг друга. Это **виртуальный процесс диссоциации и рекомбинации** пар гравитонов, которые вакуумными уже не являются, так как имеют по крайней мере по одному ненулевому квантовому числу. Разведение (**виртуальная диссоциация**) пары гравитонов повышает энергию пары, что не нарушает её статистическое равновесие только если не нарушается соотношение неопределённости (1).

Диссоциированные гравитоны могут быть всех **массовых типов**: почти вакуумные, 2 лёгких типа и тип тяжелонов. На диссоциацию лёгких типов требуется очень малая флуктуация плотности энергии, поэтому такие диссоциации имеют высокую вероятность, что создаёт большую концентрацию лёгких виртуальных гравитонов, при которой они так же быстро рекомбинируют как и диссоциируют. Среднее время существования Δt определяется соотношением неопределённости [Ландау 4, (1,3)]

$$\Delta t \sim \hbar/m, \tag{1}$$

где m – средняя масса **виртуальной пары**.

Диссоциированные заряженные тяжелоны должны быть легко наблюдаемы по своему электромагнитному взаимодействию, но этого не происходит по-видимому из-за их высокой реакционной способности, что приводит к их связыванию либо в нейтральные фундоны либо в наблюдаемое обычное вещество.

Диссоциированные пары лёгких гравитонов образуют **гравитационную плазму** с очень лёгкими и крупными противоположно заряженными частицами, которая легко поляризуется во внешних низкочастотных полях с длиной волны порядка сантиметра, но не реагирует на высокочастотные поля.

Диссоциация же тяжелонов требует очень большой энергии флуктуаций ($\sim$ 3000Гэв). Поэтому среднее время их свободного существования согласно (1) ничтожно. Хотя, если уже существует пара тяжелон – анти-тяжелон, разведённая на достаточно большое расстояние друг от друга и от других противоположно заряженных тяжелонов, то при достаточно большой кинетической энергии таких тяжелонов они могут просуществовать весьма долго прежде чем смогут рекомбинировать, так как рекомбтнация требует весьма малых расстояний.

Почти точечность тяжелонов и их ультрарелятивистские скорости во взаимно гравитационно связанных состояниях делают их рекомбинацию практически невозможной при большом возрасте Вселенной. Обратный процесс – диссоциация должен также иметь практически нулевую вероятность. Но в эпоху Начала Вселенной это было возможно. Расширение Вселенной **закаляет** рекомбинированные состояния. Поэтому существование таких состояний тяжелонов является уже не виртуальным, а **реальным**.

Разные виды диссоциации вакуумных гравитонов снимают их вырождение по разным квантовым числам. Сосчитаем число квантовых состояний свободного гравитона:
– суперсимметричный гравитон может принимать 3 значения спина 0, $\pm 1/2$, ± 1 (в единицах $\hbar$) (6.5.5.10), то есть в проекциях 5 спиновых состояний,
– 5 электрических зарядовых состояний (7.3.3.2),
– обнаруживаются 3 взведённых состояния,
таким образом (если не пропущены какие-то состояния типа взведённых, то) полное число квантовых состояний гравитона равно

$$n = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75. \qquad (2)$$

3. Космологическая концентрация гравитонов. Энергия вакуума физически наблюдается только в виде диссоциированных гравитонов и составленных из них частиц, так как волновые функции гравитонов и их комбинации являются единственно возможными финитными волновыми функциями. Нормоны же связаны в едином вакууме и их энергия проявляет себя только в виде энергии гравитонов, масса которых является результатом дефекта массы нормонов при их вакуумном связывании. А это связывание естественно очень сильное, поскольку волновые функции всех нормонов инфинитны и интерферируют друг с другом во всём пространстве Вселенной.

Энергия реликтового фотона (6.11.5.3),(6.6.10):

$$\mathcal{E}_r = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} T_U^\circ \approx 2,70117804 \ldots T_U^\circ = 0,2349 \cdot 10^{-3}\text{эв}, \qquad (1)$$

а масса вакуумного гравитона (6.8.10)

$$m_{g0} = 0,1366(8)\text{эв} = 2,4365(1) \cdot 10^{-34}\text{г}, \qquad (2)$$

откуда видно, что находясь в термодинамическом равновесии с реликтовым излучением, **вакуумный гравитон им тормозится**, так как имеет нерелятивистскую скорость, поэтому при известной средней плотности энергии Вселенной ϱ_0 (6.8.4)

$$\varrho_0 = 8,632948 \cdot 10^{-30} \text{г/см}^3, \tag{3}$$

и массы вакуумного гравитона (2), **глобальную концентрацию** c_g **вакуумных гравитонов**, можно вычислить в виде

$$c_g = \frac{\varrho_0}{m_{g0}} = \frac{8,632948 \cdot 10^{-30} \text{г/см}^3}{2,4365 \cdot 10^{-34} \text{г}} = 35432 \text{см}^{-3}, \tag{4}$$

что в $86,15$ раз больше глобальной концентрации (6.8.8) реликтовых фотонов $(411,27 \text{см}^{-3})$ и больше концентрации всех наблюдаемых частиц.

Электрически заряженные гравитоны входят в состав наблюдаемого вещества, которое по современным предсавлениям составляет 5% массы Вселенной. Достаточно свободные гравитоны могут наблюдаться только гравитационно. Эти наиболее равновесные частицы составляют основную часть массы **тёмного вещества** Вселенной, превышая массу электромагнитно наблюдаемого вещества в 20 раз.

4. Движение свободных тонусных гравитонов. Массы лёгких тонусных гравитонов и тяжёлых гравитонов (тяжелонов) можно рассматривать как статистические отклонения от массы свободных вакуумных гравитонов либо в сторону уменьшения, либо в сторону увеличения. Большая величина массы тяжелонов компенсируется малостью их концентрации.

Имея постоянную массу, гравитоны могут двигаться с различными темпами, равновесными только в среднем по космологически большим областям. Локально же энергия гравитонов может быть как много выше среднего значения так и много ниже за счёт дефекта массы в локально связанном состоянии. То есть энергия гравитонов зависит как от выбора системы координат, влияющего на их скорость так и от выбора масштаба квази-замкнутой механической системы, влияющего на само понятие замкнутости системы, с чем связан дефект её масс.

Термодинамически связывание гравитона означает понижение степени его статистического равновесия, характеризуемой энтропией. Статистическое равновесие Вселенной, хотя и слабо, но постоянно нарушено её непрерывным расширением. Глобальные градиенты статистик убывают с возрастом Вселенной по степенным законам.

Свободный тяжелон на много порядков тяжелее свободного вакуумного гравитона, поэтому его движение далеко не релятивистское. Связанные же в фундаментальных частицах, тяжелоны должны иметь ультрарелятивистскую скорость, так как имеют в них большой дефект массы.

Лёгкие тонусные гравитоны, напротив, имея массу много меньше энергии реликтовых фотонов и взаимодействуя с ними, в термодинамическом равновесии имеют ультрарелятивистские скорости.

Широкий спектр кинетической энергии гравитонов и их столкновения допускают согласно законам сохранения возникновение различных возбуждённых состояний гравитонов, в том числе – взведённых состояний, среди которых возможно и самое тяжёлое состояние – тяжелон, хотя его вероятность минимальна.

Основной частицей, необходимой для построения вещества является тяжёлый гравитон (тяжелон). Малая вероятность рождения тяжелонов объясняет огромное преобладание во Вселенной объёма вакуума по сравнению с объёмом вещества.

5. Эфемероны. Тонусные гравитоны, кроме тяжелонов будем называть **эфемеронами**. Их принципиальное различие от тяжелонов заключается в макроскопических характерных размерах эфемеронов порядка 1 см, что соответствует электрической ёмкости $C \sim 1$пф, которая, заряженная элементарным зарядом e, имеет потенциал $\varphi \sim e/C \sim 0,1$мкв. То есть энергия диссоциации противоположно заряженных электрически связанных эфемеронов имеет порядок $\sim 0,1$мкэв, что много меньше энергии (~ 250мкэв) фотонов реликтового излучения. Поэтому суперсимметричные эфемероны в поле реликтового излучения находятся в диссоциированном состоянии, то есть образуют подобие плазмы, но с очень низкой температурой, равной температуре реликтового излучения.

6. Возможность взаимодействия тяжелонов. Существование гравитационно связанных состояний нейтральных тяжелонов маловероятно. Если один из двух тяжелонов электрически заряжен, то образование связанной пары несравненно более вероятно, так как движущийся с ускорением заряженный тяжелон излучает и достаточно быстро теряет кинетическую энергию. Их сближение может закончиться столкновением.

Если два тяжелона заряжены с одинаковым знаком, то их сближение тормозиться электрическим полем, однако, если они уже имели достаточную кинетическую энергию, то они могут столкнуться. При разных знаках зарядов обоих тяжелонов их сближение ускоряется гравитационным и, главным образом, электрическим полем. Сближение заканчивается столкновением.

Результатом столкновения является взаимное перекрытие волновых функций двух тяжелонов. Тогда произведение этих функций перестаёт быть равным нулю, как это было до этого. Возникает конечная вероятность существования новой (двух-частичной) волновой функции связанной пары тяжелонов, то есть возникает **вероятность перехода** в связанное состояние пары тяжелонов, которое будем называть **фундаментальной частицей**. Если переход произошёл, то продуктом реакции будет связанное стационарное состояние пары тяжелонов и возможно электромагнитное и гравитационное излучения, определяемые законами сохранения. **Гравитационное излучение** есть ничто иное как звук распространяющийся в прогазе.

7. Физические эталоны интервала. Размер гравитона является естественным эталоном интервала для измерения любых систем, построенных из фундаментальных частиц (**вещества**). **Физический эталон** для измерения

микроскопических частиц удобно выбрать как диаметр $D_g = 2r_g$ гравитона (6.7.7), который можно выразить через возраст Вселенной T

$$D_g = 2r_g = \frac{k^2 S_J u^0}{\pi^3} = 1,376\text{см}, \tag{1}$$

где (I.8.5.5.3)

$$u^0 = \sqrt{\frac{8\pi T}{3k^2}},$$

S_J (6.6.11) имеет логарифмический характер зависимости от T (6.2.8). Эталон $2r_g$ назовём 1**пуш** (в честь А.С.Пушкина)

$$1\text{push} = 1\text{p} = D_g = 2r_g = 1,376\text{см}. \tag{2}$$

Радиус Вселенной, выраженный в пушах

$$R_U = \int_0^T \frac{dT}{D_g} = \sqrt{\frac{3\pi^5}{8k^2}} \int_0^T \frac{dT}{S_J\sqrt{T}} \sim \sqrt{T}. \tag{3}$$

Таким образом физический эталон интервала не постоянен. Это приводит к искривлению метрики 4-пространства Вселенной в **физических единицах интервала** но не может изменить **модуль вакуумной скорости света**, так как расстояния и длительности изменяются пропорционально, хотя направление скорости света в этих единицах, вообще говоря, изменяется.

Изменение единиц интервала приводит к изменению значений длин волн волновых функций и соответствующих частот. Естественным эталоном частоты является частота нормона (6.8.2.5)

$$\mu = |k| = 2\pi/\lambda_k,$$

где λ_k – соответствующая длина волны. В физических единицах интервала этой длине соответствует длина λ_k/D_g. Тогда эталонная частота в физических единицах имеет значение

$$\mu_f = 2\pi D_g/\lambda_k = D_g\mu. \tag{4}$$

Аналогично волновое число гравитона b в физических единицах имеет значение

$$b_f = D_g b. \tag{5}$$

§8. Заряженные гравитоны в электромагнитном поле.

Взаимодействие лёгких гравитонов с высокочастотными электромагнитными полями (с длиной волны много меньше сантиметра) ничтожно в силу огромных размеров лёгких гравитонов. Зато эффективно их взаимодействие с волнами сантиметрового диапазона.

1. Гравитон во внешних полях. Весьма не микроскопический размер гравитонов позволяет им эффективно взаимодействовать с макроскопическими по длине волны электромагнитными полями при наличии электрического заряда. Если же этого заряда нет, то гравитационное взаимодействие с фотонами слишком слабое. Поэтому электромагнитное поле реликтового излучения отличает заряженные гравитоны от незаряженных.

Поскольку концентрация вакуумных гравитонов такова, что среднее расстояние между их центрами значительно меньше их размеров, то сепарация гравитонов по зарядам равновесным реликтовым излучением мало влияет на равномерность распределения заряда в вакууме. Но сильно неравновесное электромагнитное поле может оказывать на заряженные гравитоны магнито-гидродинамическое (**МГД**) влияние, особенно при близости длины волны к размеру гравитонов.

Гравитон во внешнем гравитационном поле ускоряется, причём испытывает те же геометрические деформации, что и само это поле, в соответствие с изменением концентрации прогаза. Эти деформации существенны только в очень сильных гравитационных полях, например, у чёрных дыр.

Электромагнитные же поля ускоряют лишь заряженные гравитоны, причём гравитоны относительно этих полей почти абсолютно жёсткие. Поэтому заряженный гравитон ускоряется в электромагнитных полях как одно целое жёсткое тело и взаимодействует с электромагнитной волной, если только её длина волны не мала по сравнению с размером гравитона. То есть **заряженные гравитоны эффективно взаимодействуют с волнами с длиной, близкой к двум диаметрам гравитона** (2,8см) и больше, а уже с реликтовыми волнами взаимодействуют гораздо слабее и тем слабее, чем короче волна. С более жёстким излучением гравитоны практически не взаимодействуют. В этом причина слабости взаимодействия даже заряженных гравитонов. С ростом длины волны взаимодействие тоже убывает, но не так быстро как с укорочением, то есть существует **резонансная длина волны** $\sim 2,8$см (не далёкая от длины волны 0,2см максимума энергии реликтового фотона [Гуревич, (2.1.7)]). Поэтому **заряженные гравитоны взаимодействуют с реликтовым излучением**.

Имея макроскопический радиус, заряженные гравитоны на больших расстояниях взаимодействуют как точечные заряды, но на расстояниях меньших, чем при их соприкосновении, электромагнитное взаимодействие между ними ослабевает.

Если гравитон связан или в среде существует макроскопическое электромагнитное поле в масштабах порядка резонансной длины волны, то вакуумное вырождение снимается и свойства гравитонов начинают зависеть от их зарядов и спинов.

В составе связанной системы гравитонов спин (как и заряд) не безразличен для их массы, поэтому связанный гравитон уже не является смесью зарядовых и спиновых состояний. Согласно вариационному принципу [Ландау 3, §20], наличие дискретного спектра энергии у связанного гравитона, отделяет собственные состояния этого спектра друг от друга **вариационными потенциальными барьерами** между экстремумами варьируемого функционала. Поэтому такие состояния

не смешиваются. Каждое из них имеет свой экстремум энергии относительно любых малых вариаций волновой функции при заданном гамильтониане. Таким образом свободный гравитон является статистически равновесной смесью всех своих зарядовых и спиновых состояний, которые могут обнаруживаться во внешних полях, **расщепляющих энергетические уровни** этих состояний.

Радиус сферической волновой функции гравитона

$$r_g = 0,6881(82)\text{см}, \quad (7.6.7.7) \tag{1}$$

(число значащих цифр завышено для удобства вычислений). Как видно, **гравитон огромен** в мире элементарных частиц. Но в таком виде он почти не наблюдаем, так как имеет энергию порядка энергии реликтового фотона, распределённую по макроскопически большой сфере.

Однако, тяжелоны и фундоны могут быть на много порядков меньше и тяжелее лёгкого гравитона. Вероятность их рождения очень мала, особенно тяжелонов, но они могут появляться виртуально. Реально рождение фундонов очень маловероятно и возможно только при экстремально высоких плотностях, характерных для Начала Вселенной и в чёрных дырах. В силу обратимости времени, столь же мала и вероятность распада этих частиц на гравитоны. Но если уж такие частицы образовались и пережили стадию остывания (**закалились**), то их дальнейшее существование может быть очень долгим. Это является причиной существования относительно стабильных составных частиц.

2. Гравитационная плазма. Заряженные гравитоны диссоциируются реликтовым излучением в плазму. **Гравитонная плазма** в среднем находится в тепловом равновесии с реликтовым излучением и, для лёгких гравитонов, она релятивистская, а её заряженные частицы очень подвижны в низкочастотных электромагнитных полях. Поэтому в этой плазме велики магнито-гидро-динамические **(МГД) эффекты**. Ими можно объяснить работу **двигателя Шоера** и не исключено, что с ними связаны **магнитные поля астрономических объектов**. Действительно, легко представить существование замкнутого потока (контура) заряженных гравитонов, электрически уравновешенного таким же противоположно направленным потоком противоположно заряженных гравитонов. При этом их магнитные поля одинаковы и суммируются, а электрические – взаимно уничтожаются.

Во внешних полях конечно появляется зависимость массы гравитона от электрического заряда. Если лёгкий гравитон заряжен, то напряжённость поля, создаваемого такой **огромной**, но слабо заряженной частицей очень мала и мала вероятность взаимодействия даже при ультрарелятивистских скоростях. Поэтому **свободные гравитоны практически не наблюдаемы**, проявляя себя лишь вместе с реликтовым шумом. Однако заряженные гравитоны могут себя проявлять и синхротронным излучением в макроскопических полях, которое представляет собой просто излучение ускоренного квази-точечного заряда, распределённого на сфере макроскопического радиуса.

3. Гравитационный двигатель. Гравитационную плазму можно эффективно ускорять переменным электромагнитным полем в сантиметровом диапазоне ($\sim$ 3см), создавая направленный поток, что реализует **гравитационный двигатель**. Такой двигатель до сих пор не признан, поскольку его возможность не очевидна. Его достоинством является возможность получить релятивистскую скорость истечения струи, как у фотонного двигателя, но при много большей тяге, так как гравитоны имеют массу. КПД такого двигателя можно сделать близким к 100%, что трудно сделать для лазера.

Ускоряя гравитоны до энергий, много больших, чем энергия реликтовых фотонов, можно избежать взаимодействия гравитонной струи с реликтовым излучением, сделав тем самым гравитационный двигатель "чистым" относительно среды. Такой гравитационный двигатель уже существует в зачаточном виде (**двигатель Шоера**). Несмотря на ошибочность описания работы этого двигателя самим автором, он получил положительный результат, подтверждённый многими другими энтузиастами и существуют попытки объяснения его работы взаимодействием с вакуумом.

Неприятие этих попыток в научном мире вполне закономерно, так как на основании современных физических представлений трудно предполагать существование таких **экзотических частиц** как поляризуемые пары вакуумных гравитонов, хотя они могли бы претендовать на роль искомой **тёмной массы**.

Давление, оказываемомое солнечным излучением в окрестности Земли составляет единицы мг на квадратный метр при потоке энергии около 1,5 квт. То, что демонстрируют первые попытки реализации двигателя Шоера много эффективнее и можно ожидать многократного улучшения результатов, применяя высоко добротные резонаторы, использующие сверхпроводимость и оптимизируя частоту.

Существующий EMdrive использует градиент давления в резонаторе шумоподобного электромагнитного (ЭМ) поля на вакуумные гравитоны. Сила этого давления имеет магнито-гидро-динамическое (МГД) происхождение и ускоряет гравитоны против градиента давления подобно архимедовой силе выталкивания. Так как **гравитон жёсткий относительно ЭМ-поля** (7.3.9.2), то действие поля на гравитон наиболее эффективно при длине волны $\sim$ 3см, близкой к двум диаметрам гравитона, резко убывая с уменьшением длины. Ускоряемые гравитоны образуют направленную реактивную струю, свободно покидающую резонатор. Реакция струи передаётся полем резонатору.

Способом повышения тяги такого двигателя является приближение длины волны к $\sim$ 3см, увеличение объёма резонатора и его добротности вплоть до использования сверхпроводимости и вакуумирования полости. Кроме того МГД ускорение может быть более организованным, чем просто градиент давления.

Основная проблема такого МГД-устройства – низкая концентрация гравитонов, что требует от ускоряющих полей очень большой напряжённости или большого рабочего объёма. Очень большие напряжённости полей можно получить, используя высоко добротные вакуумные объёмные резонаторы со

сверхпроводящими поверхностями. При этом гравитационный двигатель мог бы обеспечить зависание (**левитацию**) или инерционное движение объекта в гравитационном поле без затраты энергии. Но это возможно только при достаточно большой концентрации гравитонов, которая в среднем по Вселенной мала. Однако, вблизи астрономических тел, в том числе планет, их концентрация может быть намного больше, поэтому интересен вопрос её **оценки**, что можно сделать с помощью самого гравитационного двигателя. Серьёзные исследования гравитационного двигателя и его модификаций могут дать полезную информацию о тёмном веществе.

§9. Элементарные частицы.

1. Квантовые частицы. Квантовая теория элементарных частиц является статистической теорией коротко живущих сверх-тяжёлых сингулярностей (простонов) детерминированного единого вакуумного поля. Квантовая элементарная частица является статистически стационарным самосвязанным состоянием одного простона, обмениваемого (метаболирующего) с вакуумом согласно волновой функции частицы.

Основными частицами будем называть частицы с полуцелым спином (**фермионы**). Они подчиняются **принципу Паули** [Ландау 3, §61], порождающему **статистику Ферми**, в отличие от частиц с целым спином (**бозонов**), подчиняющихся **статистике Бозе**. В одном квантовом состоянии не может быть больше одного фермиона, в отличие от бозонов, которые могут накапливаться в одном квантовом состоянии.

Переносчиками взаимодействий обычно называют векторные бозоны. Но в превращениях стационарных состояний друг в друга (**реакциях**) могут участвовать вообще любые частицы, а не только векторные бозоны.

2. Переходные (промежуточные) частицы (бозоны).
Основные частицы имеют дискретный спектр масс, электрических зарядов, протозарядов, спинов (моментов), гравитонных чисел. Каждый набор этих **квантовых чисел** характеризует **состояние основной частицы**, если оно вообще возможно. Превращение основной частицы из одного состояния в другое называется квантовым **переходом** между состояниями основной частицы. Основная частица существует в некоторой внешней среде, которая влияет на потенциал, в котором определена волновая функция основной частицы. Этот потенциал вблизи его минимума (**центра основной частицы**) испытывает некоторую **вариацию**, влияющую на распределение энергетических уровней стационарных состояний. По самому вариационному смыслу стационарного состояния, оно является минимумом уровня энергии стационарного состояния относительно любых малых вариаций потенциала. Поэтому для перехода между любыми разными стационарными уровнями существует **потенциальный барьер перехода** относительно любых вариаций потенциала.

Эти вариации могут быть самого различного вида. Под видом вариации мы имеем в виду её форму с точностью до постоянного вещественного коэффициента, который мы будем называть **амплитудой вариации** потенциала. Потенциальный барьер перехода для каждого вида вариации с данной амплитудой (для данного **возмущения**) имеет свою **высоту потенциального барьера**, пропорциональную амплитуде. Каждое возмущение увеличивает энергию стационарного состояния **накачивает состояние энергией**.

Если энергия этого **возмущённого состояния** не достигает высоты потенциального барьера перехода, то после снятия возмущения частица перейдёт в исходное состояние, излучая **энергию накачки** в виде гравитационных и электромагнитных волн. В этом случае энергия возвращается полю, хотя импульс может измениться, то есть **взаимодействие является упругим**.

Если энергия возмущённого состояния превышает высоту ближайшего по энергии потенциального барьера перехода, то после снятия возмущения может произойти как возврат в исходное состояние (**упругое взаимодействие**), так и **квантовый переход** в новое стационарное состояние. При этом полю возвратится не вся энергия накачки, а лишь **избыток энергии накачки**, который излучится обратно в поле.

В процессе перехода частица излучает не только при возврате энергии полю, но и при накачке её энергии полем, но если при возврате энергии интерференция излучения с полем является **конструктивной интерференцией** (энергия поля возрастает), то при накачке энергии интерференция излучения с полем является **деструктивной интерференцией** (энергия поля уменьшается в той же инерциальной системе отсчёта).

Если энергия возмущённого состояния превышает высоту нескольких ближайших потенциальных барьеров переходов, то после снятия возмущения может произойти как возврат в исходное состояние так и любой из этих переходов.

Согласно квантовой теории возмущений все переходы имеют резонансный характер [Ландау 3, §42]. То есть в обмене энергией поля с частицей участвует только определённая по частоте компонента поля. Этим полем может быть не только электромагнитное или гравитационное поле, но и подходящие по обмену квантовыми числами волновые функции. Изначально волновые функции определяются над простонами. Но они могут быть представлены как волновые функции над гравитонами или над любыми другими частицами. Согласно определению, основные частицы являются гравитонами или их связанными состояниями, то есть волновыми функциями над простонами.

Таким образом частицы и поля в переходах равноправны. Переходной частицей электромагнитного поля является **фотон** (квант электромагнитного поля). Любая переходная частица может быть представлена волновой функцией над любыми основными частицами. Степенью объективности таких представлений является их вероятность. Все переходы можно представить как **реакции между несколькими основными частицами**. Их вероятность сильно зависит от взаимной энергии и

концентрации взаимодействующих частиц.

3. Безмассовые и массивные переходные частицы. Для того чтобы переходная частица была **наблюдаемой**, она как минимум должна изменять энергию состояния, то есть иметь свою энергию. При этом она может быть как **массивной переходной частицей** так и **безмассовой переходной частицей**. Могут использоваться оба этих **представления**, так как представление массивной частицей можно однозначно представить как суперпозицию двух безмассовых представлений. Безмассовое представление переходной частицы однозначно описывает упругие взаимодействия (комптоновский эффект в случае фотонов), то есть переход основной частицы самой в себя, но в случае изменения массы основной частицы, одной безмассовой переходной частицы не достаточно (как минимум нужны две таких частицы).

Ясно, что безмассовые частицы могут двигаться только с темпом равным 1. Взаимодействия переносятся переходными частицами, поэтому темп 1 характеризует максимальную скорость любых взаимодействий. Все взаимодействия можно свести к электромагнитному и гравитационному как к наиболее фундаментальным. Однако, в среде, в том числе в вакууме, скорость этих взаимодействий может понижаться при невозможности переноса энергии одним фотоном или нейтрино на любые расстояния, так как эти переносчики могут упруго переизлучаться при взаимодействии со средой. Такие переизлучения, хотя и сохраняют прозрачность среды, но ведут к замедлению скорости распространения излучения и к рефракции на неоднородностях.

Все частицы, включая переходные, которые достаточно полно описаны своими механическими параметрами будем называть **элементарными частицами**.

4. Квантовые числа переходных частиц. Распады Так как энергитические уровни основных частиц характеризуются своими **квантовыми числами**, определяющим свойством которых является их сохранение, то переходные частицы сами должны характеризоваться квантовыми числами, равными разности квантовых чисел уровней основной частицы, между которыми происходит переход. Если переход частицы происходит в себя (например, частица изменяет лишь скорость, или изменяется её потенциал во внешнем поле), то квантовые числа переходной частицы все, кроме энергии равны нулю. Энергия же равна уровню накачки. Каждому переходу можно сопоставить одну переходную частицу, но можно её представить и подходящей по законам сохранения суперпозицией несколких переходных частиц, среди которых при достатке энергиии могут быть и основные частицы. Переход в этом случае будем называть **распадом основной частицы** по крайней мере в две основных частицы.

5. Прямые и обратные переходы и реакции. Любой переход как процесс можно представить в обратном направлении во времени. Поэтому каждому **прямому переходу** из одного состояния основной частицы в другое её состояние можно поставить в соответствие **обратный переход** из второго состояния в первое.

При этом, если переход является распадом, то обратный переход не единственный. Обратную распаду реакцию называют **синтезом**.

При любом переходе из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией переходная частица **излучается** основной частицей. При обратном переходе переходная частица **поглощается** основной частицей. Аналогично в реакциях между основными частицами одни из них могут рассматриваться как **излучаемые**, а другие как **поглощаемые**. Наглядным способом графического изображения различных перехедов (в том числе реакций) являются **диаграммы Фейнмана**.

6. Виртуальные частицы. Законы квантовой механики статистические. Поэтому законы сохранения этой механики точны лишь в пределе стремящейся к 1 вероятности. Поэтоиу в достаточно малых элементах 4-пространства возможны отклонения от законов сохранения, определяемые **соотношениями неопределённости квантовой механики**. Это допускает кратковременное существование квантовых частиц, запрещённое механическими законами сохранения. Эти **виртуальные частицы** могут осуществлять реальные переходы, которые без их участия не были бы возможны, но исходные и конечные частицы в этих реакциях механические законы сохраняют.

7. О нарушении симметрии в слабых взаимодействиях. Поясним, почему **нарушения симметрии пространства-времени** отражаются именно на слабых взаимодействиях. Разница масс античастиц и частиц очевидно является результатом космологической несимметрии времени. При этом влияние сравнительно большой разницы этих масс у верхних поколений частиц на первое поколение частиц осуществляется в максимальной мере на нейтрино, так как нейтрино всех поколений связаны между собой **нейтринными осцилляциями**, отражающими малость различия масс нейтрино разных поколений, обеспечивающую лёгкость перехода их друг в друга под действием вакуумного шума. Важно заметить, что слабые взаимодействия, осуществляемые нейтрино, как известно, могут изменять ароматы кварков, в том числе их поколения. Это связано с минимальным числом квантовых чисел именно у нейтрино.

8. Логическое замыкание теории. На этом теория достигла такого уровня развития, когда установлено однозначное соответствие между основными величинами теории и физическими величинами, а также их значениями. Интерпретированы все основные физические константы и единицы измерения. Построено множество частиц, взаимодействующих между собой. Массы гравитонов имеют порядок энергии реликтовых фотонов, но их взведённые (тонусные) состояния реализуют тяжелоны с массами порядка $\sim$ 3000Гэв. Поэтому их связанные состояния могут найти соответствие в спектре наблюдаемых частиц. Внутренняя связность и однозначность логической структуры теории позволяет говорить о её **логическом замыкании** на данном этапе. Кроме того получены **основные положения квантовой механики** и следовательно мы можем использовать многие известные её выводы.

§10. Аннигиляция.

1. Анти-частицы. При нерелятивистских темпах частиц их гравитационное взаимодействие очень слабое относительно других взаимодействий. Однако тяжелоны, имея размеры порядка 10^{-19}см, на таких малых расстояниях, при ультрарелятивистских относительных темпах могут гравитационно взаимодействовать много сильнее других взаимодействий.

Как мы увидим ниже, пара таких тяжелонов может связываться с образованием состояния (фундона), имеющего массу многократно меньшую, чем сумма масс свободных тяжелонов, охватывая весь спектр масс фундаментальных частиц. Такую прямую (**слияние**) и обратную (**распад**) реакцию связывания пары тяжелонов будем называть **гравитационно сильным взаимодействием**.

Дефект масс частиц, связанных с участиес гравитационно сильного взаимодействия, будем называть **аннигиляцией** этих частиц в продукт этой связи. Если продуктом такой связи являются только фотоны, то аннигиляцию будем называть **полной** (8.3.5.*) или **взаимоуничтожением** исходных частиц. Также к **полной аннигиляции** будем относить рекомбинацию вакуумных гравитонов (3.8.*).

Частицу, способную к полной аннигиляции со второй частицей, будем называть **анти-частицей** второй, также как и вторую будем называть анти-частицей первой. В этом смысле определение анти-частицы относительно.

Полная аннигиляция такой пары частиц возможна только при взаимной нейтрализации всех квантовых чисел этой пары, кроме энергии, которая в форме фотонов и (или) гравитационной волны быстро рассеивается в окружающую среду.

Кроме полной аннигиляции будем различать **слабую аннигиляцию**, продуктами которой являются только нейтрино и возможно фотоны и (или) гравитационные волны. Например, электроны и позитроны могут аннигилировать по этому мало вероятному каналу посредством слабых нейтральных токов.

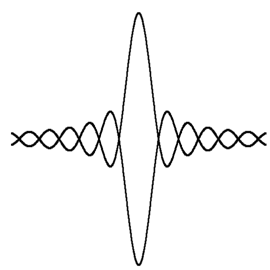
2. Анти-вещество. Физический вакуум плотно заполнен реликтовыми продуктами аннигиляции, средняя плотность энергии которых гигантская, но почти ненаблюдаемая и образует 4-инвариантный тензор. Наблюдаемо только неравновесное электромагнитное излучение вещества, в том числе его термодинамически почти уравновешенная часть – **реликтовое излучение**.

Полному уравновешиванию вакуума препятствует расширение Вселенной, следствием которого является существование гэпа масс вакуумных гравитонов и анти-гравитонов, что после **тотальной рекомбинации** (3.8.*) породило **вещество**, почти лишённое **анти-вещества**. Практика показывает, что основой стабильного вещества являются **протоны** и **электроны**, число которых одинаково. Масса протона тысячекратна массе электрона.

⋆⋆⋆

Чтобы поверить в добро – надо начать его делать.

Л.Н.Толстой



Глава 8. СИЛЬНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И МАССЫ ЧАСТИЦ

Гравитационная сила слаба, но не при малых расстояниях между очень тяжёлыми почти точечными частицами, движущимися с ультрарелятивистскими относительными скоростями. При этом, будучи сильной (**ультрарелятивистской**), гравитация может удовлетворять условиям нормальной гравитации.

§1. Взаимодействие гравитонов кулонова типа.

1. Тонусные заряды гравитонов. Таблица (7.6.10.1) показывает, что взведённый гравитон имеет 3 массовых стационарных состояния, из которых состояние 2) назовём **тяжёлым состоянием гравитона** (**тяжёлым гравитоном** – **тяжелоном**), а остальные – **лёгкими состояниями гравитона (лёгкими гравитонами)**. Иначе говоря, гравитон может иметь **тяжёлый заряд** или **лёгкий заряд** (но не оба вмести) или ни тот ни другой (**вакуумный гравитон**). Все эти заряды будем называть **тонусными зарядами**. Кроме тонусного заряда **тонусные гравитоны** могут иметь тот же спектр квантовых чисел, как и не тонусные (**вакуумные**) гравитоны, а также новые квантовые числа. Согласно (7.6.10.2) каждое массовое состояние тонусного гравитона расщепляется на 5 состояний с разными зарядами и тремя близкими значениями массы.

Тяжёлые гравитоны, согласно таблице (7.6.10.1) имеют очень большую массу, а лёгкие – на ~ 18 порядков меньше.

Согласно (7.4.3.1) две половинки (слои) волновой функции должны быть одинаковыми или отличаться только знаком. В первом случае **тонусный гравитон чётен**, а во втором – **тонусный гравитон нечётен**. Величина $\hbar b$ является (7.6.10.2) **собственной массой тонусного гравитона**. Она зависит только от тонусного заряда и не зависит от электрического заряда и дипольного момента. Но во внешнем поле (в возмущённом вакууме) **вырождение состояния гравитона** может сниматься, то есть его масса может **расщепляться** на несколько статистически равновероятных **подуровней** со своими квантовыми числами, в частности зарядами. Тяжёлые и лёгкие гравитоны имеют компактное ядро, где особые сферы их волновых функций пересекаются, имеющее линзообразную форму с характерными размерами, отличающимися согласно таблице (7.6.10.1) в $\sim 10^{18}$ раз.

2. Фундоны и фундаментальные частицы. Большая масса тяжёлых гравитонов (**тяжелонов**) делает их гравитационное притяжение значительным, хотя при нерелятивистских взаимных скоростях это притяжение остаётся очень слабым по сравнению с электромагнитным взаимодействием. Но если эти скорости достигают сугубо ультрарелятивистских значений, то гравитационное взаимодействие, может стать сильнее электромагнитного.

Согласно (7.1.8.6) гравитационная сила между двумя квази-точечными гравитационными зарядами (каковыми можно считать тяжёлые гравитоны на достаточно большом расстоянии друг от друга) равна:

$$\mathbf{F} = -G\frac{u_1^0 m_1 m_2}{r^2}\mathbf{i}_r, \tag{1}$$

где u_1^0 – темп первого гравитона в системе отсчёта, где мгновенно неподвижен второй гравитон (или наоборот),

m_1, m_2 – массы гравитонов,

величина Gu_1^0 играет роль константы взаимодействия.

Если два гравитона допустимо считать точечными, то взаимная гравитационная сила этих двух, связанных гравитонов, аналогично кулоновскому притяжению, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Для каждого из двух (в данном случае для 2-го) гравитационно связанных гравитонов такой потенциал имеет вид (7.1.8.5):

$$\varphi_{u2} = -\frac{G\mathcal{E}_1}{r} = -G\frac{m_1 u_1^0}{r}, \tag{2}$$

где потенциал φ_u, создаваемый первым гравитоном с энергией $\mathcal{E}_1$, рассматривается в точке, где находится второй (мгновенно неподвижный) гравитон с массой m_2 на расстоянии r от первого. Длина отрезка r не зависит от положения на нём неподвижного **центра вращения**, так как отрезок ортогонален скоростям гравитонов при любом положении этого центра.

При $r = \text{const(t)}$ потенциал (2) является постоянной скалярной функцией времени и поэтому имеет смысл понятие потенциальной энергии для движения в этом потенциале квази-точечных тяжелонов при постоянном r, то есть по окружностям. При этом модуль их силы взаимодействия остаётся постоянным, что будем называть **стационарным взаимодействием** этих тяжелонов. С квантово-механической точки зрения стационарное взаимодействие тяжелонов допускает стационарные собственные волновые функции для их взаимного движения, несмотря на их ультрарелятивистскую скорость.

Потенциальная энергия стационарного взаимодействия двух точечных тяжелонов зависит лишь от расстояния между ними, то есть от абсолютной величины разности их радиус-векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r_2}$. Поэтому лагранжева функция такой системы [Ландау 1,(13,1)]

$$L = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{3}$$

Вводя вектор взаимного расстояния пары точек

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

и помещая начало координат в центре инерции, имеем

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0. \tag{4}$$

Из двух последних равенств находим:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{5}$$

Подставляя эти выражения в (3), получим:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где обозначено

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \tag{7}$$

величина m называется **приведённой массой**. Функция (3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой m, движущейся во внешнем поле $U(r)$, симметричном относительно неподвижного начала координат.

Таким образом, задача о движении двух стационарно взаимодействующих тяжелонов сводится к решению задачи о движении одной материальной точки (с приведённой массой) в заданном стационарном поле $U(\mathbf{r})$, которое может быть только **центральным**. По решению $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ этой задачи траектории (окружности) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ каждого из тяжелонов m_1 и m_2 в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (5), при этом если $r \to 0$, то и $r_1 \to 0$, $r_2 \to 0$. В случае $m_1 = m_2$ из (7) имеем

$$m = m_1/2 = m_2/2, \quad m_1 = m_2, \quad r_1 = r_2 = 2r. \tag{8}$$

Если оба тяжелона можно рассматривать как точечные, то градиент потенциала φ_{u2} имеет радиальное направление. Этот градиент определяет силу F_g, действующую на тяжелоны, которая обратно пропорциональна r^2 и имеет вид

$$\mathbf{F}_{g2} = -m_2 \operatorname{grad} \varphi_{u2} = -Gu_1 \frac{m_2 m_1}{r_1^2}\mathbf{i}_r. \tag{9}$$

Понятие **кулонова потенциала** (2.1) можно использовать для решения квантово-механической задачи о движении пары связанных тяжёлых гравитонов (**тяжелонов**) при условии достаточно малых их размеров по сравнению со средним расстоянием между ними. Это условие назовём **условием точечности тяжелонов**. Ориентируясь на классический радиус электрона ($\sim\ 3 \cdot 10^{-13}$см) [Вихман, Таб.А] и на отношение масс тяжёлого гравитона и электрона, можно

оценить размер этого тяжелона как $\sim 5 \cdot 10^{-20}$ см. Тогда, чтобы удовлетворить условию точечности тяжёлых гравитонов, их размеры должны быть много меньше минимального расстояния $2r_{mg}$ между ними, то есть

$$2r_{mg} \gg 5 \cdot 10^{-20}\,\text{см} \sim 4 \cdot 10^{13}. \tag{10}$$

Обратим внимание, что соглачно (7.6.10.1) **тяжелон имеет нечётную волновую функцию**

$$P = -1 \ \ (\text{для тяжелона}), \tag{11}$$

а **лёгкие тонусные гравитоны могут быть как нечётные (самый лёгкий) так и чётные**. По определению, **инверсия 3-мерной системы координат изменяет знак нечётной волновой функции, но сохраняет знак чётной**. (12)

Пару гравитационно связанных тяжелонов назовём **фундоном**. Вместе с фотонами и гравитонами фундоны образуют множество **фундаментальных частиц**.

3. Момент импульса фундона. Итак потенциал можно выразить как центральное поле, центр которого совпадает с центром инерции

$$\varphi_{u2} = -Gu_1^0 \frac{m_1}{r_1}. \tag{1}$$

В системе центра инерции импульсы противоположны, то есть равны по модулю

$$\mathbf{P_1} = -\mathbf{P_2} = m_1\mathbf{u}_1 = -m_2\mathbf{u}_2, \tag{2}$$

где u_1, u_2 – **пространственные компоненты** 4-скоростей связанной пары материальных точек, тогда деля это равенство на равенство

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \tag{3}$$

вытекающее из (2.4), находим связь скоростей

$$\mathbf{u_1} r_2 = -\mathbf{u_2} r_1. \tag{4}$$

Векторно умножая слева равенство (2) на $\mathbf{r_1} r_2 = -\mathbf{r_2} r_1$, найдём связь моментов импульса

$$\mathbf{r}_1 r_2 \times m_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{r}_2 r_1 \times m_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{M_1} r_2 = \mathbf{M_2} r_1, \tag{5}$$

что при перекрёстном делении на (3) даёт также

$$\mathbf{M_1} m_1 = \mathbf{M_2} m_2. \tag{6}$$

Если массы двух связанных тяжелонов одинаковы, то из (6) следует

$$\mathbf{M_1} = \mathbf{M_2}, \ \ m_1 = m_2. \tag{7}$$

Теперь обратим внимание на потенциальную энергию $U(\mathbf{r})$ связанных тяжелонов. Она проявляет себя через влияние на массы связанных тяжелонов, то есть под

массами m_1, m_2 следует понимать массы m_{01}, m_{02}, свободных тяжелонов, испытавшие дефекты в поле $U(\mathbf{r})$, что согласно теореме вириала (7.3.5.8) означает, что

$$m_1 = m_{10}/u_1^0, \quad m_2 = m_{20}/u_2^0, \tag{8}$$

при этом равенство (2) можно переписать в виде

$$\mathbf{P_1} = -\mathbf{P_2} = m_{10}\mathbf{v_1} = -m_{20}\mathbf{v_2}, \tag{9}$$

где использована масса не связанных, а свободных тяжелонов. Ниже выяснится, что движение связанных гравитацией тяжелонов сугубо ультрарелятивистское. При этом

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}, \quad |\mathbf{v}| = v = 1. \tag{10}$$

Из понятия приведённой массы (2.7) следует понятие **приведённого момента импульса пары связанных тяжелонов**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \frac{m_{10}m_{20}}{m_{10} + m_{20}}\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m_0\,\mathbf{v}, \tag{11}$$

где в случае ультрарелятивистских тяжелонов

$$m_0 = m_| = \frac{m_{G1}m_{G2}}{m_{G1} + m_{G2}} \approx m_G/2, \quad (m_{G1} \approx m_{G2}) \tag{12}$$

– **приведённая масса пары свободных тяжелонов**. Обычно в квантовой теории, момент выражается в единицах $\hbar$.

Ниже мы увидим, что связанная пара тяжёлых гравитонов с приведённой массой (2.7) и приведённым моментом (3.11), имеет определённый дискретный спектр масс и моментов собственных стационарных состояний.

4. Спин фундонов. Определённый полный момент импульса фундона можно обеспечить, только если его волновая функция имеет тот же тензорный тип, что и оба её тяжелона (скалярный, спинорный (двузнаковый 4-векторный)), то есть

$$s = 0, \hbar/2, \hbar. \tag{1}$$

Принимая во внимание линейность волновых уравнений ДФ, их можно решать универсальным способом для всех этих типов волновых функций, хотя квадраты их модулей (плотности вероятности) будут, вообще говоря, различны.

5. Мультипликативность темпов в иерархии сложных материальных точек. Гравитоны состоят из метаболирующих простонов, сами гравитоны могут связываться в более сложные квази-точечные частицы, которые могут связываться в более сложные частицы и так далее, образуя последовательность – **иерархию сложных частиц**. Каждый член (**уровень**) этой иерархии характеризуется определённой массой частиц и дефектом этих масс по отношению к предыдущему уровню. Дефект масс определяется работой силы связи от не связанного до

раввновесного состояния. А равновесное состояние может быть как **статическим**, когда частицы неподвижны друг относительно друга, так и **динамическим**, когда частицы движуться друг относительно друга с определёнными средними темпами, уравновешивая силу связи своими ускорениями по 2-му закону Ньютона. Статический случай противоречит представлению о взаимодействующих частицах как о материальных точках.

Для материальных точек в (**динамическом**) случае дефект масс всегда определяется теоремой вириала (7.3.5.10), так как все взаимодействия (в том числе гравитационные) материальных точек в нашей теории, прямо или косвенно, определяются электродинамическим лагранжианом. Поэтому в динамическом случае коэффициент дефекта масс на каждом иерархическом уровне равен обратной величине среднего темпа. Тогда в **динамическом случае для нескольких соседних иерархических уровней материальных точек, общий коэффициент дефекта масс равен обратной величине произведения средних темпов на каждом из этих уровней**, откуда для материальных точек в динамическом случае следует **мультипликативность средних темпов материальных точек на соседних уровнях сложности**

$$\bar{u}^0 = \prod_i \bar{u}_i^0. \tag{1}$$

6. Разнообразие масс фундаментальных частиц. Масса лёгких гравитонов мала и от электрических зарядов и ориентации спинов практически не зависит. Как же гравитоны образуют большое разнообразие масс фундаментальных частиц? Дело в том, что масса тяжелона очень велика (порядка 3000Гэв) и зависит от зарядов. И тяжелоны очень малы, что позволяет им связываться гравитационно, причём дефект массы такого связывания огромен. Весь спектр масс связанных состояний простирается от 0 (случай полной аннигиляции) до нескольких сот Гэв.

§2. Фундоны и их спектр масс.

1. Уравнение на собственные значения массы нейтральных тяжелонов в гравитационно связанной паре. Для квази-точечной i-той квантовой частицы в составе замкнутой стационарной связанной системы с потенциальной энергией U (относительно этой частицы) имеем уравнение на собственные значения массы m связанной точечной частицы (6.8.7.8)

$$\hbar^2\Delta\psi + \left(m^2 - (U(\mathbf{r}) + m_\infty)^2\right)\psi = 0, \quad U_{|r\to\infty} \to -0, \tag{1}$$

где m_∞ – локальная масса **метаболирующей частицы на бесконечности**, то есть масса свободной частицы. По своему происхождению (6.8.7.*) это уравнение применимо в частности к самосвязанному простону, то есть к гравитону, потенциал

которого имеет вид (7.3.4.10):

$$\varphi_g = -\frac{r_g}{r} u_r^0 = -\frac{u^0 r_g}{r - r_g}, \quad r \geqslant r_g. \tag{2}$$

где u^0 – темп простона при $r \to \infty$,

r_g – радиус гравитона (минимальный радиус, достижимый метаболирующим простоном в гравитоне).

Гравитационный потенциал (2) безразмерен. Потенциальная энергия получается из него умножением на массу m частицы, на которую он действует

$$U = m\varphi_g = -\frac{m u^0 r_g}{r - r_g}, \quad r \geqslant r_g. \tag{3}$$

Движение пары гравитонов с приведённой массой, связанной гравитационной силой можно вычислить по тому же образцу, что и движение одного самосвязанного гравитацией простона. При этом темп при $r \to \infty$ тяжёлого свободного гравитона в реликтовой системе не определён, поэтому не определён и **минимальный радиус**

$$r_{mg} < r, \tag{4}$$

а масса приведённого тяжёлого гравитона при $r \to \infty$ равна его **приведённой свободной массе** $m_| = m_G/2$ (1.3.12) в рассматриваемой связанной паре. Соответствующая потенциальная энергия

$$U_g = -\frac{m_| u_r^0 r_{mg}}{r} = -\frac{m_| r_{mg}}{r - r_{mg}}, \quad r \geqslant r_{mg} \tag{5}$$

(r_{mg} – минимальный приведённый радиус вращения пары тяжелонов)
и получаем **уравнение на собственные значения массы пары нейтральных гравитационно связанных тяжелонов**:

$$\hbar^2 \Delta\psi + \left(m^2 - \left(m_| - \frac{m_| u_r^0 r_{mg}}{r}\right)^2\right)\psi =$$

$$= \hbar^2 \Delta\psi + \left(m^2 - \left(m_| - \frac{m_| r_{mg}}{r - r_{mg}}\right)^2\right)\psi = 0. \tag{6}$$

Заметим, что это уравнение имеет пока неопределённый параметр r_{mg}.

2. Общее уравнение на собственные значения массы тяжелонов гравитационно связанной пары. Найденное в предыдущем пункте уравнение справедливо только для пар электрически не заряженных гравитонов. Вообще говоря, эти гравитоны в фундаментальной частице могут иметь электрические заряды, влияние которых необходимо учесть. Так как гравитация тяжёлых

гравитонов приводит к их взаимному движению с ультрарелятивистскими скоростями, то необходимо учитывать магнитную компоненту силы Лоренца. При этом согласно (I.11.4.2.10) модуль напряжённости магнитного поля H равен модулю напряжённости электрического поля E и тогда электрическая сила Лоренца F между парой связанных точечных зарядов (5.1.2.10), удваивается по сравнению с такими же неподвижными зарядами

$$F = \frac{2e^2 Z}{r^2} = \frac{2\hbar\alpha Z}{r^2}, \tag{1}$$

где

$$Z = z_{q1} z_{q2}, \tag{2}$$

z_{q1}, z_{q2} – заряды гравитонов, выраженные в еденицах элементарного заряда e (притяжению соответствуют разные знаки зарядов).

Соответствующую этой силе потенциальную энергию можно найти, интегрируя эту силу по r:

$$U_e = \int \frac{2\hbar\alpha Z}{r^2} dr = -\frac{2\hbar\alpha Z}{r}, \tag{3}$$

где выбор постоянной интегрирования соответствует стремлению U_e к нулю на бесконечности. Суммируя эту потенциальную энергию с U_g, получаем **уравнение на собственные значения массы связанных тяжелонов** при любых их зарядах

$$\hbar^2 \Delta\psi + \left(m^2 - \left(m_| - \frac{m_| r_{mg}}{r - r_{mg}} - \frac{2\hbar\alpha Z}{r} \right)^2 \right) \psi = 0. \tag{4}$$

Гравитация влияет на это уравнение постоянными членами r_{mg} и $m_|$. Спектр решений зависит также от произведения электрических зарядов z_{q1}, z_{q2}. Спины волновых функций зависят от валентности тензоров, которыми эти функции представлены.

Тяжелоны имеют массу $m_G \approx 3000$ Гэв (7.6.10.1) и могут быть как фермионами так и бозонами. Связанное состояние двух таких тяжелонов с любыми зарядами обладает определённой приведённой свободной массой (1.3.12)

$$m_| = m_{G1} m_{G2} / (m_{G1} + m_{G2}) \approx m_G / 2 \approx 1500 \text{ Гэв}, \tag{5}$$

подставляя которую в (4) вместе с соответствующими значениями z_{q1}, z_{q2}, можно определить **волновую функцию и собственные значения массы** m **пары связанных тяжелонов**:

3. Разделение переменных уравнения (2.4). Выражая оператор Лапласа Δ в сферических координатах [Корн, Таб.(6.5-1)], запишем уравнение (2.4) (умножив его на $r^2/\hbar^2$) в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} +$$

$$+\frac{r^2}{\hbar^2}\left(m^2-\left(m_| - \frac{m_|\, r_{mg}}{r-r_{mg}} - \frac{2\hbar\alpha Z}{r}\right)^2\right)\psi = 0. \tag{1}$$

Пользуясь общим методом разделения переменных [Никифоров, с. 171], представим наше уравнение в виде

$$L\psi = 0,$$

где L – линейный оператор. Оператор L представим в виде

$$L = L_r L_\phi + M_r M_\phi,$$

где L_r, M_r зависят только от r, а L_ϕ, M_ϕ – только от φ, ϑ. Это можно сделать так:
$L_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{r^2}{\hbar^2}\left(m^2 - \left(m_| - \frac{m_|\, r_{mg}}{r-r_{mg}} - \frac{2\hbar\alpha Z}{r}\right)^2\right)$,
$L_\phi = 1$,
$M_r = 1$,
$M_\phi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.
Тогда решение уравнения можно искать в виде

$$\psi(\varphi,\vartheta,r) = \psi_\phi(\varphi,\vartheta)\psi_r(r). \tag{2}$$

Так как в силу линейности операторов
$L_r L_\phi(\psi_r \cdot \psi_\phi) = L_r\psi_r \cdot L_\phi\psi_\phi$,
$M_r M_\phi(\psi_r \cdot \psi_\phi) = M_r\psi_r \cdot M_\phi\psi_\phi$,
то уравнение $L\psi = 0$ можно переписать так

$$\frac{L_r\psi_r}{M_r\psi_r} = -\frac{M_\phi\psi_\phi}{L_\phi\psi_\phi} = \mathrm{const} = \mathbf{M}^2.$$

Равенство константе необходимо, поскольку функция$L_r\psi_r/(M_r\psi_r)$ не зависит от φ, ϑ, а функция $M_\phi\psi_\phi/(L_\phi\psi_\phi)$ не зависит от r. Эта **постоянная разделения** $\mathbf{M}^2$ является в квантовой механике **квадратом углового момента**. Таким образом получаются два уравнения. Первое зависит лишь от переменной r (его делим на r^2)

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \left(\frac{m^2}{\hbar^2} - \left(\frac{m_|}{\hbar} - \frac{m_|\, r_{mg}/\hbar}{r-r_{mg}} - \frac{2\alpha Z}{r}\right)^2 - \frac{\mathbf{M}^2}{r^2}\right)\psi_r = 0, \tag{3}$$

второе зависит лишь от переменных φ и ϑ

$$\hat{\mathbf{M}}^2\psi_\phi = \mathbf{M}^2\psi_\phi = M^2\psi_\phi, \tag{4}$$

где $\hat{\mathbf{M}}^2 = -M_\phi$ – **оператор квадрата углового момента** (I.4.2.2.4),

M – **модуль углового момента**,

Разделим теперь переменные в последнем уравнении. Пользуясь тем же методом, обозначим

$L_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$
$L_\vartheta = \frac{1}{\sin^2\vartheta},$
$M_\varphi = 1,$
$M_\vartheta = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \mathbf{M}^2,$
$\psi_\phi = \psi_\phi(\varphi,\vartheta) = \psi_\varphi(\varphi)\psi_\vartheta(\vartheta).$ (5)

Тогда

$$\frac{L_\varphi\psi_\varphi}{M_\varphi\psi_\varphi} = -\frac{M_\vartheta\psi_\vartheta}{L_\varphi\psi_\vartheta} = -M_z^2,$$

где константа разделения обозначена $-M_z^2$.

M_z^2 называется **квадратом проекции углового момента на ось z** ($\vec{x}^3$).

Таким образом получаются два уравнения. Первое зависит лишь от φ:

$$\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\varphi^2} = -M_z^2\psi_\varphi, \quad M_z = 0, \pm 1/2, \tag{6}$$

где M_z – **спиновое число** всех основных состояний (6.5.5.10) простой (так как $\mathbf{M}$ – приведённый момент) квантовой частицы с одно-знаковойой волновой функцией (скалярной или 4-векторной) при $M_z = 0$ или с двузнаковой волновой функцией (спинорной) при $M_z = \pm 1/2$,

а второе – лишь от ϑ:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial\vartheta}) + \mathbf{M}^2\psi_\vartheta = \frac{M_z^2}{\sin^2\vartheta}\psi_\vartheta. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) являются **уравнениями на собственные значения** квадрата углового момента $\mathbf{M}^2$. Спектр углового момента можно найти стандартным в квантовой механике способом. Но если волновая функция ψ рассматривается как двузнаковый 4-вектор, то необходимо расширить область значений угла φ до 4π. Тогда у спектра M_z появятся полуцелые значения (6).

Подставляя в уравнение (3) спектр значений $\mathbf{M}^2$ можно найти спектр масс m. Из этого уравнения видно, что в очень малой окрестности значения $r = r_{mg}$ сосредоточена бесконечно глубокая потенциальная яма, где локализуется волновая функция. Тогда, используя условие точечности тяжёлых гравитонов (1.2.10), в этой малой окрестности удобно сделать замену независимой переменной:

$$x = r - r_{mg} \to 0, \quad r = r_{mg} + x \to r_{mg} \tag{8}$$

и уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^2} + \frac{2}{r_{mg}}\frac{\partial\psi_r}{\partial x} + \left(\frac{m^2}{\hbar^2} - \left(\frac{m_|}{\hbar} - \frac{m_| r_{mg}}{\hbar x} - \frac{\alpha Z}{r_{mg}}\right)^2 - \frac{M^2}{r_{mg}^2}\right)\psi_r = 0, \quad x \to 0 \tag{9}$$

или

$$\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^2} + \frac{2x}{r_{mg}x}\frac{\partial\psi_r}{\partial x} + \frac{-ax^2 + bx - c}{x^2}\psi_r = 0, \quad x \to 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{cases} a = ((m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})^2 - m^2 + \hbar^2 M^2/r_{mg}^2)/\hbar^2 \geqslant 0 \\ b = 2m_| r_{mg}(m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})/\hbar^2 \\ c = r_{mg}^2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{11}$$

Это уравнение назовём **уравнением спектра масс фундаментальных частиц**.

Уравнение (10) имеет вид обобщённого уравнения гипергеометрического типа (4.1) и может быть приведено к уравнению гипергеометрического типа (4.9), решения которого выражаются через гипергеометрические функции и могут быть найдены, например, с помощью [Никифоров], [Прудников, 3].

Из (4) согласно теории сферических функций [Никифоров, §23]

$$\mathbf{M}^2 = L(L+1), \quad L = n + M_z \neq -1/2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad M_z = 0, \pm 1/2, \tag{12}$$

где $L = 0, +1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \pm 5/2, \ldots$ – полуцелое квантовое число собственного момента связанной пары тяжелонов, включающее значения M_z. Целые значения L соответствуют **главному квантовому числу** n.

4. Приведение уравнения спектра масс к гипергеометрическому типу. Сделаем это, используя образец (1.2.6.*). В соответствие с [Никифоров, с. 13] запишем уравнение в виде

$$\psi_r'' + \frac{\tilde\tau(x)}{\sigma(x)}\psi_r' + \frac{\tilde\sigma(x)}{\sigma^2(x)}\psi_r = 0. \tag{1}$$

Это **обобщённое уравнение гипергеометрического типа**.

Здесь $\sigma(x), \tilde\sigma(x)$ – полиномы не выше 2-й степени,

$\tilde\tau(x)$ – полином не выше 1-й степени.

Такой вид наше уравнение имеет при

$\tilde\tau = 2x/r_{mg} = 2x/\sqrt{c}$,

$\sigma(x) = x$,

$\tilde\sigma(x) = -ax^2 + bx - c$.

Попытаемся с помощью замены

$\psi_r = \varphi(x)\ y$

привести уравнение (1) к более простому виду путём специального выбора функции $\varphi(x)$. Имеем

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde\tau}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\tilde\tau}{\sigma} + \frac{\tilde\sigma}{\sigma^2}\right)y = 0. \tag{2}$$

Для того, чтобы уравнение (2) не было более сложным, чем исходное уравнение (1), естественно потребовать, чтобы коэффициенты при y' имели вид

$\tau(x)/\sigma(x)$,

где $\tau(x)$ некоторый полином не выше 1-й степени. Тогда для функции $\varphi(x)$ получим уравнение

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \tag{3}$$

где

$$\pi(x) = \frac{1}{2}[\tau(x) - \tilde{\tau}(x)] \tag{4}$$

– полином не выше 1-й степени.

Так как

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

то уравнение (2) примет вид

$$y'' + \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\, y' + \frac{\bar{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}\, y = 0, \tag{5}$$

где

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x), \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}(x) + \pi^2(x) + \pi(x)[\tilde{\tau}(x) - \sigma'(x)] + \pi'(x)\sigma(x). \tag{7}$$

Функции $\tau(x)$ и $\tilde{\sigma}(x)$ являются полиномами не выше первой и второй степени соответственно. Поэтому уравнение (5) является уравнением того же типа, что и уравнение (1).

Воспользуемся произволом в выборе полинома $\pi(x)$ для того, чтобы среди всех возможных видов уравнения (5) выбрать наиболее простой и удобный для исследования свойств решений. Выберем коэффициенты полинома $\pi(x)$ из условия, чтобы входящий в уравнение (5) полином $\bar{\sigma}(x)$ делился бы без остатка на полином $\sigma(x)$, то есть

$$\bar{\sigma}(x) = \lambda\, \sigma(x), \tag{8}$$

где λ – некоторая постоянная.

Это возможно, так как приравнивая коэффициенты при различных степенях x в обеих частях равенства (8), мы получим три уравнения относительно трёх неизвестных постоянных – постоянной λ и двух коэффициентов полинома $\pi(x)$. Ясно, что допустимо значение $\lambda = 0$, так как $\bar{\sigma}(x)$ входит в числитель дроби.

В результате уравнение (5) приведётся к виду:

$$\sigma(x)\, y'' + \tau(x)\, y' + \lambda y = 0, \tag{9}$$

которое называется **уравнением гипергеометрического типа**.

Для определения полинома $\pi(x)$ и постоянной λ перепишем условие (8) в виде

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

где

$$k = \lambda - \pi'(x). \tag{10}$$

Если считать постоянную k известной, то в результате решения квадратного уравнения для $\pi(x)$, получим

$$\pi(x) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} + \delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}, \tag{11}$$

где $\delta = \pm 1$, а корень имеется в виду однозначный, то есть одна из его двух **непрерывных** ветвей. (Не важно какая).

Так как $\pi(x)$ – полином, то подкоренное выражение должно представлятся в виде квадрата некоторого полинома. Это возможно лишь в случае, когда дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для постоянной k, вообще говоря, квадратное. После определения k находим $\pi(x)$ по формуле (11), а затем $\varphi(x)$, $\pi(x)$ и λ с помощью (3), (6) и (10).

Очевидно, что сведение уравнения (1) к уравнению гипергеометрического типа (9) может быть осуществлено несколькими способами в соответствии с выбором разных значений (2 возможных) постоянной и выбором различных ветвей корня в формуле (11).

В нашем случае подкоренное выражение в (11) имеет вид

$$\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma = \left(\frac{1 - 2x/r_{mg}}{2}\right)^2 + ax^2 - bx + c + kx =$$

$$= (a + 2/r_{mg}^2)x^2 - (b - k + 2/r_{mg})x + c + 1/4.$$

Приравнивая дискриминант этого квадратного трёхчлена нулю, получим уравнение для k:

$$(b - k + 2/r_{mg})^2 - 4(a + 2/r_{mg}^2)(c + 1/4) = 0$$

или

$$k^2 - 2(b + 2/r_{mg})k + (b + 2/r_{mg})^2 - 4(a + 2/r_{mg}^2)(c + 1/4) = 0$$

откуда

$$k = b + 2/r_{mg} \pm \sqrt{(b + 2/r_{mg})^2 - (b + 2/r_{mg})^2 + 4(a + 2/r_{mg}^2)(c + 1/4)} =$$

$$= b + 2/r_{mg} \pm 2\sqrt{(a + 2/r_{mg}^2)(c + 1/4)}.$$

Выберем

$$k = b + 2/r_{mg} + 2\sqrt{(a + 2/r_{mg}^2)(c + 1/4)}.$$

При этом выражение для корня в (11) примет вид

$$\delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} =$$

$$\delta\sqrt{(a + \frac{2}{r_{mg}^2})x^2 - (b - b - \frac{2}{r_{mg}} - 2\sqrt{(a + \frac{2}{r_{mg}^2})(c + 1/4)} + \frac{2}{r_{mg}})x + c + 1/4} =$$

$$= \delta \sqrt{(a + \frac{2}{r_{mg}^2})x^2 + 2\sqrt{(a + \frac{2}{r_{mg}^2})(c + 1/4)})x + c + 1/4} =$$

$$= \delta(\sqrt{a + 2/r_{mg}^2}\, x + \sqrt{c + 1/4}).$$

Тогда

$$\pi(x) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} + \delta\sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} =$$

$$= 1/2 - x/r_{mg} + \delta(\sqrt{a + 2/r_{mg}^2}\, x + \sqrt{c + 1/4}) =$$

$$= (\delta\sqrt{a + 2/r_{mg}^2} - 1/r_{mg})x + \delta\sqrt{c + 1/4} + 1/2.$$

Из (3)

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \delta\sqrt{a + 2/r_{mg}^2} - 1/r_{mg} + (\delta\sqrt{c + 1/4} + 1/2)/x.$$

откуда, интегрируя, получаем (учитывая, что $r_{gm}^2 = c$)

$$\ln|\varphi| + \text{const} = (1/2 + \delta\sqrt{c + 1/4})\ \ln|x| + (\delta\sqrt{a + 2/r_{mg}^2} - 1/r_{mg})\ x,$$

$$\varphi = Cx^{1/2 + \delta\sqrt{c+1/4}} e^{\delta\sqrt{a+2/c}\ x},$$

где C – постоянная интегрирования. Выберем $\delta = -1$, тогда имеем

$$\varphi = Cx^{1/2 - \sqrt{c+1/4}} e^{-\sqrt{a+2/c}\ x},$$

Из (6) находим

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x) = 2x/\sqrt{c} - 2(\sqrt{a + 2/c} + 1/\sqrt{c})x - 2\sqrt{c + 1/4} + 1 =$$

$$= -2\sqrt{a + 2/c}\ x - 2\sqrt{c + 1/4} + 1.$$

Из (10)

$$\lambda = k + \pi'(x) = b + 2/\sqrt{c} + 2\sqrt{(a + 2/c)(c + 1/4)} - \sqrt{a + 2/c} - 1/\sqrt{c} =$$

$$= b + 1/\sqrt{c} + \sqrt{a + 2/c}(2\sqrt{c + 1/4} - 1).$$

Таким образом, мы привели уравнение к гипергеометрическому типу

$$\sigma(x)\ y'' + \tau(x)\ y' + \lambda y = 0,$$

где $\psi = \varphi(x)\, y$ то есть в нашем случае

$$x\ y'' - (2\sqrt{a + 2/c}\ x + 2\sqrt{c + 1/4} + 1)\ y' +$$

$$+(b+1/\sqrt{c}+\sqrt{a+2/c}(2\sqrt{c+1/4}-1))y=0. \tag{12}$$

5. Приведение уравнения (4.12) к каноническому виду. Уравнение (4.12) приводится к каноническому виду **вырожденного гипергеометрического уравнения**

$$zy''(z)+(\gamma-z)y'(z)-\alpha y(z)=0 \tag{1}$$

с помощью линейной замены независимой переменной

$$x=z/l,\quad y'_x=y'_z z'_x=ly'_z,\quad y''_{x^2}=y''_{xz}z'_x=ly''_{z^2}z'_x=l^2y''_{z^2},$$

применяя которую (4.12) можно записать в виде

$$zly''-(2\sqrt{a+2/c}\;z/l+2\sqrt{c+1/4}+1)\;ly'+$$

$$+(b+1/\sqrt{c}+\sqrt{a+2/c}(2\sqrt{c+1/4}-1))y=0.$$

или в виде

$$zy''-(2\sqrt{a+2/c}\;z/l+2\sqrt{c+1/4}+1)y'+$$
$$+(b+1/\sqrt{c}+\sqrt{a+2/c}(2\sqrt{c+1/4}-1))l^{-1}y=0.$$

который соответствует (1) при $l=2\sqrt{a+2/c}$, то есть при

$$z=2\sqrt{a+2/c}\;x,\quad \gamma=-2\sqrt{c+1/4}-1,$$

$$\alpha=-(b+1/\sqrt{c}+\sqrt{a+2/c}(2\sqrt{c+1/4}-1))l^{-1}. \tag{2}$$

Уравнение (1) называется **дифференциальным уравнением Куммера** [Прудников 3, 7.2.2.43]. Оно имеет общее решение

$$y(z)=C_1\;{}_1F_1(\alpha;\;\gamma;\;z)+C_2\Psi(\alpha,\,\gamma;\;z), \tag{3}$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные,

${}_1F_1,\ \Psi$ – вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми [Прудников 3, 2.20].

6. Собственные значения уравнения спектра масс. Уравнение гипергеометрического типа имеет дискретный спектр для своих финитных полиномиальных решений при [Никифоров, с.296]

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'',\quad n=0,1,2,\ldots,$$

в нашем случае (4.*)

$$\lambda_n=-n(-2\sqrt{a+2/c}-\frac{n(n-1)}{2}0=2n\sqrt{a+2/c},$$

$$\lambda = b + 1/\sqrt{c} + \sqrt{a + 2/c}(2\sqrt{c + 1/4} - 1).$$

Приравнивая эти два выражения, имеем

$$\sqrt{a + 2/c} = \frac{b + 1/\sqrt{c}}{2n - 2\sqrt{c + 1/4} - 1}$$

или

$$a = \frac{(b + 1/\sqrt{c})^2}{(2n - 1 - 2\sqrt{c + 1/4})^2} - 2/c, \tag{1}$$

где (3.11)

$$\begin{cases} a = ((m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})^2 - m^2 + \hbar^2\mathbf{M}^2/r_{mg}^2)/\hbar^2 \geqslant 0 \\ b = 2m_|\, r_{mg}(m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})/\hbar^2 \\ c = r_{mg}^2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$((m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})^2 - m^2 + \hbar^2\mathbf{M}^2/r_{mg}^2)/\hbar^2 =$$

$$= \frac{(2m_|\, r_{mg}(m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})/\hbar^2 + 1/r_{mg})^2}{(2n - 1 - 2\sqrt{r_{mg}^2 + 1/4}\ )^2} - 2/r_{mg}^2,$$

откуда (умножая на $\hbar^2$)

$$m^2 = (m_| - \hbar\alpha Z/r_{mg})^2 + \frac{\hbar^2(\mathbf{M}^2 + 2)}{r_{mg}^2} -$$

$$- \frac{(2m_|\, r_{mg}(m_|/\hbar - \alpha Z/r_{mg}) + \hbar/r_{mg})^2}{(2n - 1 - 2\sqrt{r_{mg}^2 + 1/4}\ )^2}, \tag{3}$$

где, согласно (3.12)

$$\mathbf{M}^2 = L(L+1), \quad L = 0, 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \pm 5/2, \ldots, \quad (L \neq -1/2), \tag{4}$$

то есть из полуцелых значений L исключается $-1/2$.

Соответствующие волновые функции (4.*)

$$\psi_r = \varphi(x)\, y, \tag{5}$$

где функции

$$\varphi = Cx^{1/2 - \sqrt{c + 1/4}} e^{-\sqrt{a + 2/c}\ x}, \tag{6}$$

являются полиномиальными решениями уравнения гипергеометрического типа (4.12). Не решая это уравнение, спектр масс фундаментальных частиц можно найти из алгебраического уравнения (3), задаваясь известным спектром квадрата углового момента $\mathbf{M}^2$ и зарядового числа Z.

Для отыскания самих полиномиальных решений можно воспользоваться **формулой Родрига для полиномов гипергеометрического типа** [Никифоров, с.296]:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\, \rho(x)], \tag{7}$$

где B_n – нормировочная постоянная,

функция $\rho(x)$ является решением уравнения [Никифоров, с.295]

$$[\sigma(x)\, \rho(x)]' = \tau(x)\, \rho(x), \tag{8}$$

то есть

$$(x\rho(x))' = (gx + h)\rho(x),$$

где $g = -2\sqrt{a + 2/c}$, $\quad h = 1 - 2\sqrt{c + 1/4}$,
или

$$\rho(x) + x\rho'(x) = (gx + h)\rho(x)$$

или

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = (\ln \rho(x))'_x = \frac{gx + h - 1}{x},$$

откуда

$$\ln \rho(x) = \int g\, dx + (h-1) \int \frac{h}{x} dx = gx + (h-1) \ln |x| + \mathrm{const}$$

или

$$\rho = C_\rho x^{h-1} \mathrm{e}^{gx} = C_\rho x^{-2\sqrt{c+1/4}} \mathrm{e}^{-2\sqrt{a+2/c}\ x}, \tag{9}$$

$$\psi = \varphi_1(x)\, y_n(x), \tag{10}$$

где C_ρ – нормировочная константа интегрирования.

Уравнение (5) определяет дискретный спектр масс, но содержит непрерывный параметр r_{mg}, который однако можно выразить через квадрат момента $\mathbf{M}^2$, что сделано в следующем пункте.

7. Исключение параметра r_{mg}. Ориентируясь на классический радиус электрона ($\sim 3{\cdot}10^{-13}$см) [Вихман, Таб.А] и на отношение масс тяжелона и электрона, можно оценить размер тяжелона как $\sim 5 \cdot 10^{-20}$ см. Тогда, чтобы удовлетворить **условию точечности** (1.2.10) тяжелонов, их размеры должны быть много меньше радиуса r_{mg} (1.4), то есть

$$2r_{mg} \gg 5 \cdot 10^{-20}\,\text{см} \sim 4 \cdot 10^{13}, \quad n \gg 1, \tag{1}$$

что соответствует **квази-классическому случаю для волновой функции**, которая должна концентрироваться у радиуса r_{mg}. При этом **приведённый момент импульса связанной пары гравитонов** находим в виде (1.3.11), выраженный в единицах $\hbar$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{mg} \times m_| \cdot \mathbf{v}/\hbar,$$

откуда в проекции на **M** имеем **псевдо-скалярный модуль** M, знак которого изменяется при инверсии пространственных координат или времени:

$$m_| \cdot v r_{mg} = \hbar M,$$

где v – ультрарелятивистская скорость. По теореме вириала минимизации массы отвечает максимально возможное значение темпа. При этом скорость v стремится к единице. Например, для массы электрона $u^0 \approx 6 \cdot 10^6$ и $v \approx 0,999999999999$. Тогда

$$r_{mg} = M\hbar/(vm_|) >\sim 0,5 \cdot 10^{16} \sim 0,5 \cdot 10^{-17}\text{см}, \tag{2}$$

где

$$v \to 1. \tag{3}$$

Из (2) следует, что в ультрарелятивистском случае ($v \approx 1$) радиус r_{mg} растёт пропорционально M, а в нерелятивистском случае этот рост быстрее.

Теперь **спектр массы пары связаных тяжелонов** (6.3) можно записать в виде

$$m^2 = m_|^2(1 - v\alpha Z/M)^2 + \frac{m_|^2 v^2(M^2+2)}{M^2} -$$
$$- \frac{(2M\hbar(m_|/\hbar - v\alpha Z m_|/M\hbar)/v + vm_|/M)^2}{(2n - 1 - 2\sqrt{M^2\hbar^2/(v^2 m_|^2) + 1/4}\ )^2}.$$

Этот спектр очень плотный (спектральные линии очень близки друг к другу). Гравитационные спектральные линии, соответствующие квантовому числу n, расположены друг относительно друга очень близко, то есть **энергия перехода** между ними очень мала, хотя энергетические барьеры между соответствующими квантовыми состояниями очень велики. **Туннельный эффект** обеспечивает их преодоление.

Удобно пользоваться безразмерными величинами, поэтому разделим это выражение на $m_|^2$. Получим

$$\frac{m^2}{m_|^2} = 1 + v^2 + \frac{2v\alpha'}{M} + \frac{v^2\alpha'^2 + 2v^2}{M^2} - \frac{(2M/v + 2\alpha' + v/M)^2}{(2n - 1 - 2\sqrt{M^2\hbar^2/(vm_|)^2 + 1/4}\ )^2}, \tag{4}$$

где $m/m_| \leqslant 1, \quad v \to 1,$

$$\alpha' = -\alpha Z, \quad M \neq 0, \ L \neq 0. \tag{5}$$

Величина $Mh/(vm_|) \sim M10^{16}$ очень большая. Так как значение M^2 для связанного тяжелона не равно нулю, то его минимальное значение $M^2 = L(L+1) = 3/4$, при $L = 1/2$

$$M^2 \geqslant 3/4, \quad |L| \geqslant 1/2, \quad L \neq 0, -1/2, -1. \tag{6}$$

Так как по теореме вириала $m^2/m_|^2 = 1/u^{02} = 1 - v^2$ (7.3.5.8), то масса уменьшается с ростом темпа тяжелонов связанной частицы, поэтому процессы релаксации

энергии покоя (массы) идут в сторону возрастания темпа, то есть стремление к статистическому равновесию пары связанных тяжелонов выражается в стремлении их скорости к единице, например, релаксация до массы электрона происходит при $u^0 \approx 6\cdot 10^6$ и $v \approx 0,999999999999$. Поэтому равновесная пара связанных тяжелонов в вакууме характеризуется значением внутренней скорости тяжелонов почтии равным единице

$$v \to 1. \tag{7}$$

При этом максимальное статистическое равновесие достигается при нулевых значениях зарядов и других сохраняющихся квантовых чисел тяжелонов, при которых пара гравитонов становится почти ненаблюдаемой в вакуумной среде других таких же пар, тяжелоны которой уже не поддаются никакой идентификации. Это максимально вырожденное состояние пары связанных тяжелонов уже ничем не отличается от случайно встретившейся пары вакуумных простонов, масса которых не наблюдаема на фоне вакуумной плотности инвариантной энергии, в отличие от массы гравитонов, являющихся возмущением этой плотности.

Связанная пара тяжелонов, идентифицируемая какими-нибудь ненулевыми квантовыми числами, образует фундаментальную частицу (фундон). Гипотетический фундон с парой незаряженных тяжелонов, масса которого аннигилировала до нуля, условно назовём **нейтралоном**, который практически не наблюдаем, разве что как потенциальный фундон.

Согласно формуле

$$m_| \cdot v r_{mg} = \hbar M \tag{8}$$

модуль M момента $\mathbf{M}$ пропорционален массе $m_|$. Так как знак массы инвертируется вместе со знаком заряда, то необходимо равенство их знаков. Откуда следует

$$\frac{M}{|M|} = \frac{Z}{|Z|}. \tag{9}$$

Тогда (6.4), учитывая (6), можно записать в виде

$$M = (Z/|Z|)\sqrt{L(L+1)}, \quad L = 0, 1/2, 1, \pm 3/2, \pm 2, \pm 5/2, \ldots, \quad (L \neq 0, -1/2, -1), \tag{10}$$

что для сохранении однозначной связи (2.3.12) между L и $\mathbf{M}$ при всех значениях L, включая $|L| \leqslant 1$, требует обобщения формулы (9) до:

$$\frac{M}{|M|} = \frac{Z}{|Z|} = \frac{L}{|L|} = K = \begin{cases} -1, \ L = 1/2, 1 \\ \pm 1, \ |L| > 1 \\ 0, \ |L| \to \infty \end{cases}, \tag{11}$$

где M, Z, L – **псевдоскалярные величины**, изменяющие знак при инверсии пространственных координат, то есть **киральность** K, отличает **правые** ($K = 1$) и зеркальные (**левые**, $K = -1$) изображения фундонов. Киральность отсутствует ($K = 0$) для квазиклассических состояний фундона при больших значениях $|L|$.

Киральность $K = -1$ при $L = 1/2, 1$ принята из опытных данных по слабому взаимодействию.

8. Гравитационный спектр масс фундонов. Значение $n = n_0$, соответствующее нейтралону будем называть **гравитационным квантовым числом** фундона. Оно выражается из (7.4) при нулевом заряде и массе, то есть при

$$m = 0, \quad \alpha'_{|n=n_0} = \alpha'_0 = 0, \tag{1}$$

где для общности нулевое значение α' обозначено α'_0. Тогда из (7.4) находим

$$n = n_0 =$$

$$= \frac{2M/v + 2\alpha'_0 + v/M}{2\sqrt{1 + v^2 + 2v\alpha'_0/M + v^2(\alpha'^2_0 + 2)/M^2}} + 1/2 + \sqrt{M^2\hbar^2/(vm_|)^2 + 1/4} \sim$$

$$\sim M\hbar/(vm_|) >\sim 10^{16} \quad (7.2). \tag{2}$$

Очень большое значение этого числа позволяет ему быть целым при очень малых вариациях числа v относительно единицы. Нейтралон согласно (1) имеет нулевую массу, что можно рассматривать как предел для дефекта масс гравитационно связанных тяжелонов. Согласно (7.1.8.9) этому дефекту соответствует и **дефект гравитационного заряда**. Суть этого дефекта в изменении хода времени в системе отсчёта, сопутствующей ускоренной механической системе, относительно инерциальной системы отсчёта. Это явление аналогично парадоксу близнецов (I.3.5.4.3).

Нейтралоны не имеют ни гравитационного ни электромагнитного взаимодействия, то есть соответствуют вакуумному состоянию, определяемому вакуумным индексом.

Состояние нейтралона устойчиво именно благодаря минимальности его массы. Гравитационное поле слабо зависит от величины $m_|$ через возраст Вселенной. Но отношение $\hbar/m_|$ остаётся постоянным. Нейтралоны определённым образом **нормируют вакуумное значение величины** n_0, определяя в данном месте **гравитационное поле** как единственную локальную характеристику вакуума. При этом масса нейтралона при $n = n_0$ нулевая. Поэтому **нейтралоны практически не наблюдаемы** (соответствуют нейтральной паре гравитонов (7.3.8.*). Наблюдаемы лишь их возмущённые состояния, для которых значения квантовых чисел отличаются от нулевых. Каждое такое состояние в определённой степени устойчиво, благодаря **вариационному принципу** [Ландау 3, §20], минимизирующему собственное значение энергии (массы) относительно вариаций волновой функции. То есть между собственными состояниями волновой функции существуют потенциальные барьеры относительно вариации волновой функции.

Сильную гравитационную связь тяжелонов в фундоне будем называть **аннигиляционной связью**, предельным случаем которой является превращение в нейтралон, то есть **аннигиляция**.

Из (2) найдём выражение

$$2n-1=2n_0-1=$$

$$=\frac{2M/v+2\alpha'_0+v/M}{\sqrt{1+v^2+2v\alpha'_0/M+v^2(\alpha'^2_0+2)/M^2}}+2\sqrt{M^2\hbar^2/(vm_|)^2+1/4} \qquad (3)$$

и подставляя его в (7.4), получим массу фундона, возмущённую ненулевым значением α' (7.5) относительно нулевого значения массы при вакуумном индексе n_0

$$\frac{m^2}{m_|^2}=1+v^2+2v\alpha'/M+v^2(\alpha'^2+2)/M^2-$$

$$-\frac{(2M/v+2\alpha'+v/M)^2}{\left(\frac{2M/v+2\alpha'_0+v/M}{\sqrt{1+v^2+2v\alpha'_0/M+v^2(\alpha'^2_0+2)/M^2}}+2\sqrt{M^2\hbar^2/(vm_|)^2+1/4}-2\sqrt{\ldots}\right)^2},$$

где $\sqrt{\ldots}$ обозначает такой же корень как и предыдущий, то есть имеем

$$\frac{m^2}{m_|^2}=1+v^2+2v\alpha'/M+v^2(\alpha'^2Z^2+2)/M^2-\left(\frac{2M/v+2\alpha'+v/M}{\frac{2M/v+2\alpha'_0+v/M}{\sqrt{1+v^2+2v\alpha'_0/M+v^2(\alpha'^2_0+2)/M^2}}}\right)^2$$

или

$$\frac{m^2}{m_|^2}=1+v^2+2v\alpha'/M+v^2(\alpha'^2+2)/M^2-$$

$$-(2M/v+2\alpha'+v/M)^2(1+v^2+2v\alpha'_0/M+v^2(\alpha'^2_0+2)/M^2)/(2M/v+2\alpha'_0+v/M)^2. \qquad (4)$$

Существенно, что здесь исчезла зависимость массы от величины $\hbar/m_|$ и конкретного значения n, а единственным непрерывным параметром является величина скорости v.

Чтобы удовлетворить условию точечности (1.2.10), значение n должно быть достаточно большими. Это условие выполняется в силу (7.1). При этом тяжелоны хорошо локализованы по радиусу.

С учётом (7.5),(7.7) и (8.1) уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{m^2}{m_|^2}=2-2\alpha Z/M+(\alpha^2Z^2+2)/M^2-$$

$$-(2M-2\alpha Z+1/M)^2(2+2/M^2)/(2M+1/M)^2. \qquad (5)$$

Значения массы по параметру M определяют **гравитационные стационарные состояния связанных тяжелонов** в гравитационном поле, нормированном в данном месте гравитационным квантовым числом n_0.

В гравитационном поле вещество сжимается, **искривляя метрику вещества**, но не само 4-пространство, которое остаётся плоским. (6)

Действительно, гравитационный заряд растёт вместе с m, а M падает согласно (9.4) вместе с радиусом любого фундона r_{mg} (7.2), который представляет эталон интервала.

Спектр квантовых чисел очень богатый и занимает чрезвычайно широкую полосу масс от 0 до $m_|$. Это покрывает весь спектр квантовых чисел наблюдаемых частиц, но необходимы **правила отбора** наблюдаемых значений из всех возможных.

9. Устранение слагаемых порядка 1 в функции $m(M)$. Представим (8.5) в виде

$$\frac{m^2}{m_|^2} = 2 - 2\alpha Z/M + (\alpha^2 Z^2 + 2)/M^2 - x, \tag{1}$$

где упрощаем x

$$x = \frac{(2M+1/M)^2 - 4\alpha Z(2M+1/M) + 4\alpha^2 Z^2}{(2M+1/M)^2}(2+2/M^2) =$$

$$= (2+2/M^2)\left(1 - \frac{4\alpha Z}{2M+1/M} + \frac{4\alpha^2 Z^2}{(2M+1/M)^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{8\alpha Z}{2M+1/M} + \frac{8\alpha^2 Z^2}{(2M+1/M)^2} + \frac{2}{M^2} - \frac{8\alpha Z/M^2}{2M+1/M} + \frac{8\alpha^2 Z^2/M^2}{(2M+1/M)^2}. \tag{2}$$

Теперь (1) можно переписать в виде

$$\frac{m^2}{m_|^2} = -2\alpha Z/M + \alpha^2 Z^2/M^2 +$$

$$+\frac{8\alpha Z}{2M+1/M} - \frac{8\alpha^2 Z^2}{(2M+1/M)^2} + \frac{8\alpha Z/M^2}{2M+1/M} - \frac{8\alpha^2 Z^2/M^2}{(2M+1/M)^2}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\alpha|Z| \ll 1$, имеем асимптотику

$$\frac{m^2}{m_|^2}\bigg|_{|M|\to\infty} \to 2\alpha Z/M$$

или (с учётом (7.9))

$$\frac{m}{m_|}\bigg|_{|M|\to\infty} \to \sqrt{2\alpha Z/M} \to \sqrt{2\alpha Z/L} \to 0. \tag{4}$$

Отсюда видно, что при $|M| \to \infty$ знаки величин Z и M должны совпадать, как и вообще требует (7.11)

$$Z/|Z| = M/|M| = L/|L|, \quad |M| \to \infty. \tag{5}$$

Из (3) видно, что это справедливо и для малых значений $|M|$ (даже при минимальном $|M| = \sqrt{3}/2$), так как совместная инверсия знаков Z и M не

изменяет ни одного члена в (3), а инверсия одной из величин Z, M меняет знак доминирующего 3-го члена справа, что не допустимо.

Нулевое значение Z соответствует нейтралону (8.1), поэтому **реальные фундоны с нулевым значением заряда хотя бы одного из тяжелонов не существуют**. (6)

Условие (5) означает, что инверсия только знака заряда одного из тяжелонов (без инверсии знака момента M) требует инверсии знака заряда второго тяжелона. При этом масса фундона не изменяется. Если же вместе с электрическим зарядом инвертировать и паразаряд, то масса фундона изменится на чрезвычайно малую величину, соответствующую гэпу частоты (I.8.2.11.2). Таким образом переход от фундона к антифундону, заключающийся в инверсии знака всех квантовых чисел, кроме массы, приводит к чрезвычайно малому изменению значения массы **нарушая полную симметрию вещества и антивещества**. (7)

Ниже увидим, что значения масс основных наблюдаемых частиц порядка десятка Гэв и меньше соответствуют значениям $|M|$ порядка 100 и больше, что делает широко применимой асимптотическую формулу (4).

10. Связь массы $m(L)$ с её дискретным приращением.

Обозначим

$$\frac{m}{m_|}_{|L\to\infty} = X, \quad \sqrt{|2\alpha Z|} = z, \tag{1}$$

тогда (9.4) примет вид

$$m/m_| = X = z|L|^{-1/2}, \quad |L| \to \infty. \tag{2}$$

При больших значениях $|L| \gg |\Delta L|$ для дискретных приращений $m_l = \Delta m$ массы можно записать

$$m_l = \Delta m = \frac{\Delta m}{2|\Delta L|} = m_|\Delta X = -0,5 m_| z |L|^{-3/2}\Delta L, \quad |L| \to \infty, \quad |\Delta L| = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Подставляя сюда $|L|^{-1/2}$ из (2), получим

$$m_l = \Delta m = -0,5 m_| z \cdot \frac{m^3}{m_|^3 z^3}\Delta L = -\frac{1}{2z^2} m_| X^3 \Delta L, \quad |L| \to \infty, \tag{4}$$

откуда видно, что приращение массы пропорционально её кубу или $|L|^{-3/2}$.

Спектр масс фундонов ограничен сверху значением $m = 207,90\ldots$Гэв (при $|L| = 0,5$, $|z_{q1}| = |z_{q2}| = 2/3$), а снизу – нулевым значением (при $|L| \to \infty$). Значения массы дискретны соответственно шагу $|\Delta L| = 0,5$ и соответствующие фундоны имеют разные вероятности существования, что прояснится ниже. При каждом значении Z возрастающей последовательности значений L соответствует убывающая последовательность значений $m(Z)$ – **массовая лестница**. Шаг массы $\Delta m(Z)$ на этой лестнице убывает вместе с самой массой $m(Z)$.

Из (2) можно выразить L в виде

$$|L| = z^2/X^2 = 2\alpha z_{q1} z_{q2} m_|^2/m^2, \quad |L| \to \infty. \tag{5}$$

§3. Фундоны на массовой лестнице.

1. Особенности момента импульса фундона. Большие значения момента импульса фундона делают орбитальное движение тяжелонов квазиклассичным. (1) Это относится и к лёгким сферически несимметричным гравитонам в силу их огромных размеров, допускающих квазиклассическое вращение.

Гравитационное взаимодействие (**гравитационные переходы между значениями** n) означает постепенный рост модуля момента фундона с ростом значения n, при сохранении направления вектора момента. При этом осреднённая по времени волновая функция является суперпозицией множества мало отличающихся по модулю момента импульса функций, образующих сферическую оболочку с радиусом r_{mg}. Эта замкнутая оболочка очень компактна – **радиус фундона** порядка 10^{-17}см (2.7.2). Такой квазиклассический **гравитационный момент импульса определяет только масштаб и ориентацию фундона, но не его осреднённую форму**.

А при малых M момент импульса фундона остаётся только квантовым. (2)

В силу законов сохранения, заряды тяжелонов суммируются в фундаментальной частице.

$$q = q_1 + q_2. \tag{3}$$

Существенно различать фермионы и бозоны, так как они не могут переходить друг в друга только за счёт электромагнитной радиации. Сами же фундаментальные бозоны или фермионы интенсивно переходят между **собственными гравитационными состояниями**, образуя квазиклассические состояния, масса которых является осреднённым значением группы близких собственных гравитационных состояний. Массы этих состояний почти эквидистантны, образуя два перемежающихся спектра фермиона и бозона с интервалом $2\Delta m$ между уровнями, то есть это практически осцилляторы с частотой колебаний

$$\omega_f = 2\hbar\,\Delta m, \tag{4}$$

тогда при больших M квазиклассический момент импульса фундона вполне определяется массой $m(L)$ и только тремя значениями **спина фундона**, различающими только тензорный тип волновой функции (2.3.6)

$$s = 0, \hbar/2, \hbar, \quad M \to \infty. \tag{5}$$

Под действием вакуумных шумов осреднённое значение массы фундона флуктуирует тем больше, чем меньше интервал времени осреднения в соответствие с **соотношением неопределённости** квантовой теории. То есть допустимы кратковременные (**виртуальные**) нарушения механических законов сохранения для фундонов в физическом ваккууме, что с учётом самого вакуума, этих законов не нарушает. Процессы, допускаемые виртуальными нарушениями называют **виртуальными процессами**, а участвующие в них частицы – **виртуальными частицами**.

Термодинамическое равновесие фундонов отличается от **вакуумного равновесия** тем, что первое учитывает расширение Вселенной, то есть естественную

стрелу времени, следствием чего является **неубывание энтропии** для **наблюдаемых** механических систем, к которым относится и наблюдатель, а второе – тем, что характеризует всю остальную **ненаблюдаемую** систему (**вакуум**), статистически сохраняющую все **механические симметрии**.

2. Переход виртуальных фундонов в реальное состояние. На достаточно коротком интервале времени виртуальные процессы настолько обеспечены энергией, что вакуум как-бы кипит, регулярно рождая и уничтожая пары виртуальных частиц-античастиц в любой инерциальной системе. Если одну из таких пар вдруг обеспечить достаточной взаимной энергией, то эти частица и античастица могут освободиться друг от друга, образуя пару **реальных частиц**.

Статистические значения энергии $\Delta\mathcal{E}$, которые виртуальные частицы могут занимать у вакуума на время Δt, не нарушая законов сохранения, определяются **соотношением неопределённости** [Ландау 3, (44,2)]

$$\Delta\mathcal{E}\cdot\Delta t\sim\hbar. \tag{1}$$

3. Состояния и переходы фундона на массовой лестнице. Квантовые уровни на массовой лестнице являются **собственными состояниями**, в том смысле, что согласно вариационному принципу [Ландау 3, §20], они реализуют минимум энергии относительно малых вариаций волновой функции, что означает устойчивость этих состояний в некоторых пределах внешних возмущений. Достаточно сильные возмущения могут переводить систему (фундон) из одного такого состояния в другое, то есть совершать **квантовые переходы**.

Каждый переход на массовой лестнице чаще всего происходит между близкими состояними, так как дальние (**мультипольные**) переходы требуют не только большого изменения энергии покоя, но и соответствующего большого изменения момента импульса, что мало вероятно. Взаимосвязь момента импульса и массы может нарушаться только вместе с изменением квантовых чисел тяжелонов фундона, то есть **переходом к другому типу фундона**.

Каждый фундон (кроме лёгких гравитонов) состоит из двух тяжелонов, имеющих отрицательную чётность (7.6.10.1). **Пространственная чётность** пары не взаимодействующих (в частности слившихся) частиц равна произведению их чётностей [Нелипа, с.40], то есть в случае двух тяжелонов она положительная (**скалярная**). А находясь в связанном динамическом состоянии, при главном квантовом числе n, имеющем смысл целого значения $[L]$ числа L, система из 2-х частиц (фундон) приобретает чётность

$$P_{[L]}=(-1)^n=(-1)^{[L]}, \tag{1}$$

так как "имеет смысл говорить о результирующей пространственной чётности частицы, равной произведению внутренней и **орбитальной** пространственной чётности." [Нелипа, с.41]. То есть значения чётности на **целых уровнях фундона чередуются**. (2)

Тогда чётность P_L на **дробном уровне фундона** можно найти как произведение чётности $P_{L-1/2}$ предыдущего целого уровня на чётность $P_{-\Delta L}$ частицы,

способной совершить переход с предыдущего уровня на этот или как произведение чётности $P_{L+1/2}$ следующего целого уровня на чётность $P_{\Delta L}$ частицы, способной совершить переход с этого уровня на следующий

$$P_L = P_{L-1/2}P_{-\Delta L} = P_{L+1/2}P_{\Delta L}, \tag{3}$$

откуда, учитывая, что из (1) $P_{L-1/2} = -P_{L+1/2}$, получаем

$$P_{-\Delta L} = -P_{\Delta L}, \tag{4}$$

то есть чётность фундона на дробном уровне может быть любой

$$P_{[L]+1/2} = \pm 1. \tag{5}$$

Короткие переходы на одну или две ступеньки соответствуют **обмену (испусканию и поглощению)** достаточно лёгкой незаряженной частицей со спином 1/2 или лёгкой незаряженной частицей со спином 1 при переходе сразу на две ступеньки. Такими частицами являются нейтральные гравитоны, кроме тяжелонов (**эфемероны** (7.7.5.*)). В любом случае фундон должен иметь **квантовую чётность** согласно (1).

Нейтральные по всем квантовым числам частицы, но отличающиеся пара-зарядом, имеют противоположные чётности, (6)
так как инверсия пара-заряда соответствует инверсии электрического заряда (I.8.5.7.2), который нечётен по опреднлению плотности 4-тока (I.7.2.1.1), где нечётен оператор ∇^μ.

При достаточно большом значении L энергетические уровни на массовой лестнице фундона почти эквидистантны. При этом свойства фундона близки к свойствам осциллятора, частота которого слабо зависит от энергии. Если существует достаточно однородный газ частиц (эфемеронов) с массой, близкой к энергии переходов на некотором участке массовой лестницы данного фундона, то возможно **устойчивое статистическое равновесие** этого фундона **поддерживаемое** газом этих эфемеронов. Для этого необходимо

$$\Delta m = -m_l, \tag{7}$$

где m_l – средняя энергия покоя эфемеронов.

Эфемеронами являются достаточно слабо взаимодействующие универсальные **вездесущие** частицы одинаковой массы – нейтральные состояния вакуумных гравитонов. Их масса должна быть не слишком большой, иначе их концентрация будет слишком мала, что не обеспечит достаточной однородности газа эфемеронов. Являясь слабонаблюдаемыми, эфемероны входят в так называемую **тёмную массу**, а виртуально заполняют весь вакуум.

Набор (почти) эквидистантных квантовых уровней энергии соответствует осциллятору с определённой частотой квази-классических колебаний ([Ландау 3,

(23,5)]), которые можно рассматривать как периодические возмущения осциллятора. Согласно теории возмущений [Ландау 3, §42] переходы между квантовыми уровнями происходят при равенстве энергии (частоты) возмущения и энергии (частоты) перехода, то есть при **резонансе возмущения и осциллятора**. Резонансное состояние фундона с эфемероном наиболе устойчиво (**основное**) при максимальной близости их скоростей, то есть существенно соотношение их масс, а не энергий вообще, то есть их **основное резонансное взаимодействие инвариантно**, а **относительая скорость фундона и эфемерона в основном резонансном процессе взаимодействия нерелятивистская**

$$u^0 \approx 1. \tag{8}$$

Поэтому в процессе их основного резонансного взаимодействия **сумма масс фундона и эфемерона почти сохраняется**. Находясь в состоянии резонанса с одним видом эфемеронов, фундон мало чувствителен к другим видам эфемеронов, а состояние резонанса, как известно, устойчиво. Его можно нарушить только достаточно сильным локальным воздействием, которое может перевести рассматриваемую систему в состояние резонанса на другой частоте, соответствующей другому виду эфемеронов. Устойчивость резонансного состояния означает существование **резонансной потенциальной ямы** для фундона в пространстве значений его массы. Фундон флуктуирует у значения энергии резонанса, обмениваясь (получая и отдавая) малые порции энергии, соответствующие **резонансному виду эфемеронов** (переносчиков **резонансного взаимодействия**).

Кроме основного резонансного взаимодействия с эфемеронами, обеспечивающего существование стационарных **основных состояний** фундонов с достаточно определёнными массами (таких как электрон), фундоны могут переходить в другие (**возбуждённые**) состояния, сталкиваясь с другими фундонами или даже с ультрарелятивистскими эфемеронами (при условии соблюдения всех законов сохранения, что маловероятно соблюсти в силу большого гравитационного момента, требующего точного прицельного радиуса столкновения). Если энергия такого перехода много больше массы основного состояния фундона, то такое возбуждённое состояние может существовать достаточно долго, испытывая постепенный переход (**релаксацию**) в основное состояние.

Релаксация в основное состояние из состояний с очень большой массой слабо зависит от массы возбуждения и средняя масса в процессе нескольких таких релаксаций в состояние электрона получается близкой к массе мюона. Такие же релаксации в состояние, соответствующее массе мюона, дают массу таона. Тогда **мюон** и **таон** можно интерпретировать именно этими процессами, а соответствующие им $\mu-$ и $\tau-$**нейтрино** – как эфемероны **электрона** (е-**нейтрино**), разогнанные до подходящих энергий переходов.

4. Вычисление масс фундонов. Из (2.10.4), используя (2.10.1), имеем

$$X^3 = -\frac{2z^2 m_l}{m_| \Delta L} = \left| \frac{4\alpha Z m_l}{m_| \Delta L} \right|, \tag{1}$$

откуда, раскрывая X (2.10.1), имеем

$$\frac{m^3}{m_|^3} = \left| \frac{4\alpha Z m_l}{m_| \Delta L} \right| \tag{2}$$

или

$$m = |4 m_|^2 \alpha Z m_l / \Delta L|^{1/3}, \tag{3}$$

где приведённая масса тяжелона (1.3.12)

$$m_| = \frac{m_{G1} \cdot m_{G2}}{m_{G1} + m_{G2}} = \hbar b \frac{\sqrt{(z_{q1}^2 + 1)(z_{q2}^2 + 1)}}{\sqrt{z_{q1}^2 + 1} + \sqrt{z_{q2}^2 + 1}}, \tag{4}$$

где масса m_{Gi} любого из двух гравитонов (7.6.10.2):

$$m_{Gi} = \hbar b \sqrt{z_{qi}^2 + 1}, \quad z_{qi} = 0, \ \pm 1/3, \ \pm 2/3 \tag{5}$$

и (7.6.10.1)

$$b = b_G = 2,80555 \cdot 10^{-34}, \quad \hbar b = 2980,65 Gev. \tag{6}$$

Учитывая (2.2.2), (2.7.9), (2.7.10), выражения (2.9.3),(2.9.4) можно записать в виде, не зависящем от знака Z, совпадающего со знаком M

$$\frac{m^2}{m_|^2} = -2\alpha |Z/M| + \alpha^2 Z^2/M^2 +$$

$$+ \frac{8\alpha M |Z/M|}{2M + 1/M} - \frac{8\alpha^2 Z^2}{(2M + 1/M)^2} + \frac{8\alpha |MZ|/M^3}{2M + 1/M} - \frac{8\alpha^2 Z^2/M^2}{(2M + 1/M)^2}, \quad Z = z_{q1} \cdot z_{q2}, \tag{7}$$

$$\frac{m}{m_|}\bigg|_{|M| \to \infty} \to \sqrt{|2\alpha Z/M|} \to \sqrt{|2\alpha Z/L|} \to 0, \quad |L| \to |M| \to \infty, \tag{8}$$

где согласно (2.9.5),(2.7.10)

$$M = (Z/|Z|) \sqrt{L(L+1)}, \quad L = 1/2, 1, \pm 3/2, \pm 2, \pm 5/2, \ldots, \quad (L \neq 0, -1/2, -1). \tag{9}$$

Очевидно, что изменение знака M не изменяет ни одного члена в формуле (7). То есть **все фундоны вырождены относительно изменения знаков (но не модулей) электрических зарядов его тяжелонов**, а также **относительно замены** $L^- \to -L - 1$ при допустимых значениях L, L^-.

Поскольку полуцелые значения M_z учитывают спин волновой функции (2.3.6), то величина $|M|$ должна иметь смысл **модуля полного момента фундона**, включающего спин.

Обратим внимание, что все вычисления производились в отношении приведённой массы пары связанных тяжелонов, поэтому величины Z, M относятся не к отдельным тяжелонам пары, а к фундону в целом. Тогда $|L|$ представляет **полный момент фундона**, который, в отличие от его проекций, не может быть нулевым

$$s_f = |L| \neq 0. \tag{10}$$

Согласно (2.7.11), знак L отражает киральность фундона, которая при $L > 1$ с равной вероятностью можкт быть любой, реализуя C, P, T-симметрии вещества, но при $L < 1$ существуют фундоны только с левой киральностью

$$K = 1, \quad L < 1. \tag{11}$$

При этом жёстко нарушается P-симметрия вещества, что практически наблюдается в слабых взаимодействиях, реализуемых промежуточными векторными (то есть с чётностью $P = +1$) бозонами $Z^0, W^{\pm}$ очень большой массы.

Кроме резонансного взаимодействия с эфемеронами фундоны могут резонансно взаимодействовать друг с другом, стремясь занять на своих массовых лестницах взаимно стационарное положение, обеспечивающее им устойчивость.

5. Аннигиляция фундонов. Два фундона с противоположными квантовыми числами могут взаимно нейтрализовать эти числа (кроме энергии, которая излучается фотонами) и перестать быть наблюдаемыми (исчезнуть, то есть **полностью аннигилировать**). Возможность полной аннигиляции определяется **правилами отбора**, вытекающими из **механических законов сохранения**. Для такой аннигиляции необходима противоположность знаков и равенство модулей квантовых чисел L, n, q (**сопряжение тяжелонов**). Противоположности знаков положительных масс соответствует противоположность электрических зарядов. Если квантовые числа тяжелонов пары этому сопряжению не удовлетворяют, то аннигиляция пары (не полная) остаётся возможной за счёт **обмена другой частицей со средой** (например, её излучения). Препятствием может быть существующий **потенциальный барьер обмена**. Результатом полной аннигиляции двух фундонов-фермионов должны быть по-крайней мере два или три фотона, так как иначе не возможно сохранение момента импульса [Ландау 4, §89].

6. Упругие и неупругие столкновения фундонов. Столкновение двух фундонов, не изменяющее их энергии покоя (массы) назовём **упругим столкновением фундонов**. Однако, в столкновении масса фундонов может измениться за счёт энергии столкновения. Суть этого изменения в том, что фундоны могут обменяться внутрениими (квази классическими) моментами импульса (**косой удар**). В результате классический момент одного из них увеличится, а другого соответственно уменьшится.

Если, кроме обмена энергией произойдёт обмен зарядом фундонов, то такое их столкновение будем называть **неупругим**.

7. Переходы между типами фундонов. Заметим, что **массовые лестницы интерферируют** друг с другом в том смысле, что минимальное значение разницы масс на разных таких лестницах сильно зависит от выбранного значения массы на одной из лестниц (очевидно эта разница может изменяться от 0 до половины меньшего полушага $\Delta_m m_Z$ одной из лестниц).

Малая разница масс двух фундонов в **интерференционных узлах массовых лестниц** (где равны их массы) могла бы допускать **вырожденные переходы** фундона с одной такой лестницы на другую без изменения его энергии, если не требуется изменения заряда $q_f = q_1 + q_2$. Чтобы найти варианты таких вырожденных переходов рассмотрим случаи реализации одного и того же значения заряда фундона двумя тяжелонами с зарядами q_1, q_2 без учёта их перестановки
1) $q_f = -4/3 = -2/3 - 2/3$, (1 вариант),
2) $q_f = -1 = -2/3 - 1/3$, (1 вариант),
3) $q_f = -2/3 = -1/3 - 1/3$, (1 вариант),
4) $q_f = -1/3 = -2/3 + 1/3$, (1 вариант),
5) $q_f = 0 = -2/3 + 2/3 = -1/3 + 1/3$, (2 варианта), (1)
аналогично для положительных значений q_f. Тогда всего 10 вариантов. Таким образом **вырожденные переходы** возможны только для нулевого заряда фундона.

Переходы внутри одной массовой лестницы всегда изменяют момент импульса, а также массу фундона, хотя с ростом $|L|$ относительное изменение этих величин между соседними **уровнями** этой лестницы уменьшается, так как $\Delta m/m \sim L^{-3/2}/L^{-1/2} \sim L^{-1}$. (2)

Переходы между состояниями фундонов могут происходить при взаимодействии фундонов между собой и с гравитонами, например с тонусными гравитонами с массой 3,287мкв и 6,7633мкв и вакуумными гравитонами с массой 0,1366(8)эв (7.6.8.10).

Хотя при одном и том же спине волновой функции свободного фундона все её ориентации в 3-пространстве имеют одинаковую чётность, переходы на другие уровни массовой лестницы должны удовлетворять **правилам отбора по чётности** [Ландау 3, §30].

Согласно (1.4.*) вероятности переходов зависят от тензорного типа перехода, хотя их массы могут не зависеть.

8. Конечность массовой лестницы.

Массе переходов $m_l = \Delta m$ соответствует угловая ν_l и линейная f_l частота согласно формуле

$$m_l = \hbar\nu_l = 2\pi\hbar f_l = 2\pi\hbar/T_l, \tag{1}$$

где T_l – период этой частоты. Но при периоде этой частоты порядка возраста Вселенной T_0 и больше длина волны перехода выходит за границы Вселенной, то есть такая волна перестаёт в ней существовать. Поэтому массовая лестница

ограничена и со стороны низких частот (со стороны малых масс)

$$m_l \geqslant\sim 2\pi\hbar/T_0 = m_{lm}. \qquad (2)$$

Деля эту массу на массу (4.4)

$$m_| = \hbar b \frac{\sqrt{(z_{q1}^2+1)(z_{q2}^2+1)}}{\sqrt{z_{q1}^2+1}+\sqrt{z_{q2}^2+1}}, \qquad (3)$$

где b относится к тяжелону (7.6.10.1), согласно (4.1) находим (при $z_{q1} = 1/3,\ z_{q_2} = 2/3,\ \Delta L = 1$) для масс состояний на массовой лестнице выражение

$$X^3 = \frac{m^3}{m_|^3} \geqslant\sim \frac{4\alpha(z_{q1}z_{q2}+1)2\pi\left(\sqrt{z_{q1}^2+1}+\sqrt{z_{q2}^2+1}\right)}{b\sqrt{(z_{q1}^2+1)(z_{q2}^2+1)}\ T_0} = \frac{0,059382}{bT_0},$$

откуда, используя значения $b = 1,2364313402 \cdot 10^{-16}$ (7.6.10.1) и $T_0 = 1,666 \cdot 10^{61}$ (7.6.7.4), находим

$$X = \frac{m}{m_|} = \geqslant\sim (0,028822 \cdot 10^{-45})^{1/3} = 0,306588 \cdot 10^{-15} \qquad (4)$$

или, используя приближение $m_| = 0,5\hbar b \approx 1500$Гэв (4.4),(4.6), получим

$$m \geqslant\sim 4,6 \cdot 10^{-13}\text{Гэв} \sim 0,46\text{мв}, \qquad (5)$$

что имеет порядок энергии $0,2349$мв реликтовых фотонов (7.6.6.10). Так как массы тонусных гравитонов не относятся к квантовой лестнице и нет частиц с массой меньше энергии реликтовых фотонов, то для определённости удобно ограничить наблюдаемую массовую лестницу минимальным значением массы фундона, равной энергии $m_r = 0,2349$мв (7.6.6.10) реликтового фотона. Соответствующее число

$$L = L_r = 0,16 \cdot 10^{30}. \qquad (6)$$

Минимальное значение $|L| = |L|_{\text{мин}} = 0,5$. Тогда **число состояний на массовой лестнице**

$$n_m = 2|L_r| = 0,3 \cdot 10^{30}, \qquad (7)$$

так как состояния на массовой лестнице расположены с постоянным шагом $\Delta L = 0,5$. Однако **актуальное число состояний** n_a на квантовой лестнице ограничено массой $m_l = 3,287\mu eV$ самого лёгкого эфемерона, которой соответствует число состояний $n_a = 2|L_a| = 7,492 \cdot 10^{10}$ при массе состояния $m = 0,49252MeV$.

9. Большие значения массы фундонов. Приведём согласно (4.7) некоторые большие значения массы фундонов. Отрицательным L соответствует замена

$$L^- = L - 1, \quad |L^-| \geqslant 1,5.$$

Таблица 208.1.

$|z_{q1}| = |z_{q2}| = 2/3$

L	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$m(Gev)$	207,90	143,48	115,18	98,981	88,271	80,531
L	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$m(Gev)$	74,594	69,847	65,934	62,933	59,796	57,322

$|z_{q1}| = 2/3,\ |z_{q2}| = 1/3$

L	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$m(Gev)$	137,40	94,826	76,122	65,415	58,336	53,220
L	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$m(Gev)$	49,296	46,158	43,572	41,390	39,515	37,880

$|z_{q1}| = |z_{q2}| = 1/3$

L	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$m(Gev)$	91,195	62,936	50,522	43,415	38,717	35,321
L	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$m(Gev)$	32,716	30,634	28,917	27,469	26,225	25,140

Обращает на себя внимание своеобразная вырожденность фундонов относительно инверсии знаков электрических зарядов тяжелонов, хотя от модуля зарядов масса фундона зависит. При этом изменение величины заряда фундона всегда дробное. Это говорит о **возможности обмена фундонов дробными зарядами**. (1)

Эта вырожденность является следствием универсальности гравитационного взаимодействия, к которому сводится даже электромагнитное взаимодействие при массах тяжелонов.

10. Отсутствие суперсимметрии у фундонов. Гравитоны (в том числе тонусные) вырождены по всем квантовым числам, то есть суперсимметричны. Поэтому лёгкие гравитоны в роли эфемеронов могут вести себя как частицы со спином 0 или 1/2 или 1. В отличие от гравитонов фундоны уже не суперсимметричны, то есть их массы зависят от квантовых чисел.

11. Универсальность гравитационного взаимодействия. Любые неупругие переходы на квантовых лестницах и между ними связаны с изменением на них гравитационных квантовых чисел, связанных с массой фундонов. Поэтому вообще все неупругие взаимодействия сводятся к гравитационному взаимодействию, то есть оно **универсально**. Даже плавное изменение практически постоянного гравитационного поля способно вызывать переходы между **локальными значениями гравитационного квантового числа** $n_0(x^\mu)$.

§4. Спектр масс фундаментальных частиц.

1. Масса фундона в зависимости от массы резонансного эфемерона. Из (7.6.10.1):

$$\hbar b = 2980,65 Gev. \tag{1}$$

По общей формуле (3.4.3) имеем массу фундона

$$m = |4m_|^2 \alpha Z m_l / \Delta L|^{1/3}, \tag{2}$$

где для сохранения заряда фундона при гравитационных переходах необходимо выбрать нейтральный эфемерон, то есть принять

$$\text{(для эфемерона)} \quad q = z_{q1} + z_{q2} = 0, \tag{3}$$

а значение массы эфемерона m_l пока оставим неопределённым. Тогда, записывая m_l в виде $m_l = m_| \cdot m_l / m_|$, получим (используя (3.4.8)) следующую общую формулу для массы

$$m = m_| |4\alpha z_{q1} z_{q2} m_l / (m_| \Delta L)|^{1/3}, \tag{4}$$

где (3.4.4)

$$m_| = \frac{m_{G1} \cdot m_{G2}}{m_{G1} + m_{G2}} = \hbar b \frac{\sqrt{(z_{q1}^2 + 1)(z_{q2}^2 + 1)}}{\sqrt{z_{q1}^2 + 1} + \sqrt{z_{q2}^2 + 1}}, \tag{5}$$

откуда, используя опытное значение массы m частицы, можно найти массу эфемерона для переходов данного вида, определяемых значением ΔL:

$$m_l = \left| \frac{m_| \Delta L}{4\alpha z_{q1} z_{q2}} \left(\frac{m}{m_|} \right)^3 \right|. \tag{6}$$

2. Электрон. Единичный заряд фундона можно получить лишь такими комбинациями:

$$z_e = z_{q1} + z_{q2} = \mp 1, \quad z_{q1} = \mp 1/3, \; z_{q2} = \mp 2/3, \tag{1}$$

для которых формула (1.4) даёт массы (Мэв):

Таблица 208.2. $|z_{q1}| = 2/3, \; |z_{q2}| = 1/3$

m_l(мкв)	DL	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$
$3,287$		$0,495181$	$0,390912$	$0,341493$	$0,310267$
$6,7633$		$0,626434$	$0,497201$	$0,434345$	$0,394629$

Где ΔL имеет смысл мультипольности (момента) перехода, который равен моменту эфемерона, поглощённого (излучённого) фундоном на переходе и передавшего (отобравшего) свою массу m_l. Наиболее эффективен резонанс эфемерона с переходом, когда он сопутствует фундону, то есть при нерелятивистской скорости относительно

фундона ($u^0 \to 1$). Говорить о моменте, передаваемом косым столкновением, не приходится, так как волновая функция эфемерона несоизмеримо велика по сравнению с практически точечным фундоном. Переход происходит при плавном коллективном изменении эфемеронами гравитационного потенциала фундона.

Как обычно, вероятность переходов с ростом их мультипольности очень быстро спадает, поэтому, основной вклад дают переходы $\Delta L = 0,5$ с участием эфемеронов массой $m_{l2} = 3,287\mu eV, m_{l1} = 6,7633\mu eV$ и моментом $\hbar/2$ относительно фундона.

Разность частот соответствующих волновых функций приводит к биениям (**осцилляциям**) их суперпозиции. Поэтому установившийся прямой и обратный радиальный поток эфемеронов, участвующих в переходах одного фундона, тоже осциллирует, то усиливаясь, то ослабевая относительно одного вида эфемеронов за счёт другого. Соответственно последовательные переходы фундона испытывают периодические (осциллирующие) перемещения на массовой лестнице фундона в интервале от значения массы $m_{e2} = 0,495181MeV$, **поддерживаемой** (3.3.7) одним эфемероном, до значения массы $m_{e1} = 0,626434MeV$, поддерживаемой другим.

Среднее арифметическое значение этой массы равно $(0,626434 + 0,495181)/2 \approx 0,56\mu eV$, что с точностью 10% совпадает с экспериментальным значением $0.511MeV$ массы электрона. Однако, более строгое вычисление с использованием плотности распределения массы на массовой лестнице даёт среднее значение массы электрона $m_e = 0,55459MeV$ (5.7), что совпадает с экспериментальным значением с точностью 8% и говорит о примерно одинаковом вкладе массы m_{e1} и массы m_{e2}.

Такое совпадение на фоне огромного диапазона всевозможных масс фундонов, ограниченного сверху массой ~ 3000 ТэВ, даёт хорошие основания интерпретировать рассматриваемый фундон как **электрон**, хотя такая интерпретация всё же нуждается в подкреплении. Небольшой недостаток вычисленной массы электрона может компенсировать сравнительно небольшая кинетическая энергия эфемеронов, представляющих активную (резонансную) фракцию во всеобщем ультрарелятивистском газе эфемеронов.

3. Слабые взаимодействия. Тонусные гравитоны, имея сферически несимметричную форму волновой функции, могут вращаться, то есть иметь собственный орбитальный (в отличие от спинового) момент импульса. Для тяжелона в составе фундона этот момент включается в орбитальный момент фундона, а для лёгких фундонов (эфемеронов) этот момент имеет самостоятельное значение. Эфемероны, имея огромные размеры, легко могут приобретать очень большие (квази-классические) моменты импульса, что роднит их с фундонами, имеющими также квази-классические моменты. Это позволяет подходящим эфемеронам вступать в реакции с фундонами, не нарушая закона сохранения момента импульса.

Кроме того эфемероны могут взаимодействовать друг с другом даже не имея электрического заряда, виртуально обмениваясь очень тяжёлыми фундонами, не имеющими орбитального момента. Обычно это нейтральные векторные фундоны Z_1^0, Z_2^0 с массами $143,48GeV$ и $62,936GeV$ (в среднем $103,2GeV$ (Таб.208.1), а также заряженные векторные фундоны $Z^{\pm}$ с массой $94,826$.

Такое взаимодействие посредством **промежуточных векторных бозонов**, испускаемых и поглощаемых виртуально на короткое время (в системе, сопутствующей центру инерции реакции), допускаемое соотношением неопределённости [Ландау 3,(16,7)(44,2)]

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geqslant \hbar/2, \quad \Delta t \cdot \Delta \mathcal{E} \sim \hbar/2, \tag{1}$$

называется **слабым взаимодействием**.

В силу большой массы векторных бозонов, слабое взаимодействие имеет очень малый радиус действия, внутри которого может быть очень сильным. (2)
На основании своих свойств, незаряженные эфемероны с большим орбитальным моментом ($L \to \infty$) и спином

$$s_\nu = \hbar/2 \tag{3}$$

интерпретируем как **нейтрино**. Это стабильные частицы в отличии от заряженных эфемеронов, которые быстро теряют момент импульса из-за электромагнитного излучения и в отличии от скалярных и векторных эфемеронов, которые даже незаряженные могут электромагнитно излучать, так как их волновые функции имеют осциллирующую плотность 4-тока, тогда как у двух компонент двузнаковой волновой функции нейтрино плотности 4-тока взаимно скомпенсированы.

Нейтрино обеспечивают полуцелые (и за чётное число шагов – целые) переходы на массовой лестнице, двигаясь сопутно с фундоном и резонансно с ним взаимодействуя. Переходы на число шагов, кратное 4-м, могут делать и фотоны γ, но для резонансного взаимодействия необходимо почти совпадение скоростей фундона и фотона, что возможно только если фундон движется почти со скоростью света, то есть является ультра-релятивистским, при этом частота фотона должна быть резонансной с комптоновской частотой фундона. Поэтому электромагнитное взаимодействие, при импульсе фотона много меньшем импульса фундона, уступает по эффективности **слабому взаимодействию** (5) с вакуумными нейтрино, действующему на очень малых расстояниях. А наблюдаемая эффективность взаимодействия макроскопического электромагнитного поля с электроном обязана лишь огромной концентрации когерентных фотонов, образующих поле большой напряжённости и протяжённости.

Таким образом любые переходы между цело-заряженными фундонами, векторными бозонами и их античастицами происходят однообразно посредством электромагнитного и гравитационного полей, представленных фотонами γ и нейтрино ν_1, ν_2. При этом все процессы можно описать диаграммами Фейнмана, сводящимися к следующим элементарным процессам:

$$\begin{cases} \gamma = \nu_1 + \tilde{\nu}_1, \quad \gamma = \nu_2 + \tilde{\nu}_2, \quad \gamma = W^- + W^+, \quad \gamma = e^- + e^+, \quad \gamma = f + \tilde{f}, & (4) \\ Z^0 = \nu_1 + \tilde{\nu}_1, \quad Z^0 = \nu_2 + \tilde{\nu}_2, \quad Z^0 = W^- + W^+, \quad Z^0 = e^- + e^+, \quad Z^0 = f + \tilde{f}, & (5) \\ w^- = e^- + \tilde{\nu}_1, & (6) \end{cases}$$

где f – фундон в произвольном состоянии. По правилам преобразований диаграмм Фейнмана, сводящимся к законам сохранения и преобразованиям Лоренца, из (4) следует много производных и составных процессов, например, 4-х-фермионный

процесс $e^- + e^+ = \nu_1 + \tilde{\nu}_1$, откуда следует процесс рассеяния нейтрино на электроне: $e^- + \nu_1 = e^- + \nu_1$. Этот процесс подразумевает, с учётом низкой вероятности электромагнитной аннигиляции нейтрино, промежуточную стадию (слабое взаимодействие) в виде нейтрального бозона Z^0 или заряженного бозона W^- в процессе (6).

Очевидно, что лептонные процессы возможны только при сохранении квазиклассических моментов импульсов, что при их больших значениях можно соблюсти только при соответствии поколений реагирующих лептонов. Отсюда следуют понятия **лептонных зарядов** разных поколений и их **законы сохранения**, хотя не слишком строгие из-за возможности приобретения орбитального момента импульса за счёт **косого** (нецентрального) столкновения

Элементарные слабые и электромагнитные взаимодействия часто рассматриваются как единое **электро-слабое взаимодействие**, переносимое **калибровочными бозонами** γ, W^-, W^+, Z^0.

4. Электронные нейтрино. Электроны **поддерживаются** (3.3.7) эфемеронами с массами m_1, m_2. По их взаимодействиям они могут быть интерпретированы как **электронные нейтрино** двух видов. Вместе с электронами и их анти-частицами они образуют **первое поколение лептонов**.

Имея определённые две массы покоя, нейтрино осциллируют (1.*) и вызывают осцилляции электронов, средняя масса m_e которых имеет определённое значение. Взаимодействие электрона со своим нейтрино наиболее эффективно когда они сопутствуют друг другу, а так как электроны тормозяться в реликтовом излучении, то их скорости нерелятивистские ($u^0 \to 1$), поэтому и скорости **эффективных** (**резонансных**) электронных нейтрино тоже нерелятивистские. Однако, это не означает, что все электронные нейтрино медленные. Наоборот, в силу их экстремальной лёгкости **большинство нейтрино ультра-релятивистские** и при их большой концентрации в вакууме содержат **нерелятивистскую фракцию электронных нейтрино**.

Регулярный обмен энергией реликтового излучения, электронов и электронных нейтрино в космических масштабах производит **естественный отбор электронных нейтрино**, обогощая ими космическую среду и поддерживая массу m_e электронов, то есть действует **положительная обратная связь** между концентрацией электронных нейтрино и узостью их энергетического спектра.

5. Поколения лептонов. Согласно (3.3.*) переходы с одной целой ступеньки массовой лестницы на любую другую возможны лишь с помощью фотона или пары нейтрино, причём согласно законам сохранения должна существовать система координат, в которой квантовые числа (в том числе 4-импульсы и моменты импульсов) до перехода равны квантовым числам (кроме может быть чётности) после перехода. Такой симметричный процесс можно рассматривать как рассеяние на электроне. В случае нейтрино это медленный (слабый) процесс.

Но случайное очень энергичное упругое косое столкновение электрона с другой частицей, позволяющее обмен большим моментом импульса, может

забросить фундон из исходного состояния электрона в гораздо более тяжёлое (**перевозбуждённое**) состояние на массовой лестнице. Поступенчатая релаксация из него в прежнее состояние, при отсутствии доступных каналов распада, процесс достаточно медленный. Но если найдётся подходящее по импульсу ультрарелятивистское нейтрино, то может произойти более быстрый вынужденный переход (распад) в состояние электрона. Спонтанно такой распад невозможен из-за несохранения момента.

Так как массовая лестница фундона ограничена сверху максимальной массой m_m, то в интервале $[m_e, m_m]$ существует некоторое среднее значение m_μ массы перевозбуждённого состояния. В процессе его слабой релаксации излучается большое число ультрарелятивистских нейтрино, соответствующих в среднем массе m_μ. В отношении этой массы существует механизм естественного отбора, как для электронной массы (4.*), сужающий энергетический спектр также как состояний электрона. Усреднённое перевозбуждённое состояние с массой m_μ интерпретируем как **мюоны**, а соответствующие им релятивистске нейтрино интерпретируем как **мюонные нейтрино**.

Тогда аналогично в интервале $[m_\mu, m_m]$ существует некоторое среднее значение m_τ массы другого перевозбуждённого состояния, которое интерпретируем как **таон**, а соответствующие релятивистские нейтрино интерпретируем как **таонное нейтрино**. Лептоны 2-го и 3-го поколений не стабильны, так как для них существуют доступные каналы **слабых элементарных реакций** с участием тяжёлых (то есть с малым L) нейтральных или заряженных бозонов, решающих проблему сохранения моментов импульса.

Электроны со своими **электронными нейтрино** называются **лептонами 1-го поеоления**. Мюоны со своими **мюонными нейтрино** называются **лептонами 2-го поколения**, а таоны со своими **таонными нейтрино** называются **лептонами 3-го поколения**. Время жизни лептонов убывает с ростом номера поколения так быстро, что экстраполяция на следующие после 3-го поколения не имеет смысла.

6. Средняя масса электрона. В поддержку сделанных в предыдущем пункте определений, попробуем уточнить среднее значение массы электрона, а в следующем пункте вычислим средние значения масс лептонов 2-го и 3-го поколений.

Фундон в физическом вакууме можно рассматривать как частицу, со случайной массой, которая статистически распределена по значениям момента L согласно (2.9.4) с массовой плотностью $\varrho(L)$, тогда из (2.10.3) распределение вероятности состояний фундона, нумеруемое значением L, примет вид

$$\varrho(L) = \frac{dm}{dL} = \frac{\Delta m}{2\Delta L} = m_l \sim L^{-3/2}. \tag{1}$$

Плотность $\varrho(L)$ можно выразить через **плотность вероятности** $w(L)$ **состояний фундона** в виде

$$\varrho(L) = w(L)\, m_l, \tag{2}$$

где, используя (1), имеем

$$w(L) = \frac{\varrho}{m_l} = aL^{-3/2}, \tag{3}$$

a – множитель, нормирующий $w(L)$ на плотность вероятности.
Полученную плотность вероятности применим для вычисления средней массы осциллирующего электрона. Двум начениям массы $m_1 = 0,626434MeV, m_2 = 0,495181MeV$ электрона согласно (2.10.3) соответствуют значения гравитационного момента $L1 = 2,3156 \cdot 10^{10}$, $L_2 = 3,746 \cdot 10^{10}$.

Тогда, нормируя вероятность на интервале L_1, L_2, имеем для электрона (с учётом (2.10.3))

$$1 = \sum_{L_1}^{L_2} w_L \cdot \Delta L \to \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} w_L \, dL = \frac{a}{2}\int_{L_1}^{L_2} L^{-3/2}\, dL = -aL^{-1/2}\Big|_{L_1}^{L_2} = a\left(\frac{1}{\sqrt{L_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_2}}\right), \tag{4}$$

откуда

$$a = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{L_2} - \sqrt{L_1}} = \frac{\sqrt{2,3156 \cdot 10^{10} \cdot 3,746 \cdot 10^{10}}}{\sqrt{3,746 \cdot 10^{10}} - \sqrt{2,3156 \cdot 10^{10}}} = 7,1184 \cdot 10^5. \tag{5}$$

Используя (3.4.8), найдём среднее значение массы электрона на этом интервале

$$m_e = \sum_{L_1}^{L_2} m(L) \cdot w_L \cdot \Delta L \to$$

$$\to \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} m(L) \cdot w_L \, dL = \frac{a}{2} m_| \sqrt{2\alpha|Z|} \int_{L_1}^{L_2} L^{-2}\, dL = m_| \sqrt{|2\alpha Z|} \cdot \frac{a}{2}(L_1^{-1} - L_2^{-1}), \tag{6}$$

что согласно (3.4.8) можно переписать в виде

$$m_e = m_1 \frac{a}{2} L_1^{-1/2} - m_2 \frac{a}{2} L_2^{-1/2} = \frac{a m_2}{2\sqrt{L_2}}\left(\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - 1\right) = 0,554586MeV. \tag{7}$$

При этом для квазиклассического момента электрона получим значение

$$L_e = 2,9544 \cdot 10^{10}. \tag{8}$$

Электрон – особо устойчивая частица, так как это легчайшая заряженная частица, которой не на что распадаться, поэтому он может быть уничтожен только аннигиляцией с анти-электроном (**позитроном**). Резонансные эфемероны (нейтрино) электрона постоянно поддерживают его существование, не допуская его глубокую релаксацию на массовой лестнице, хотя в разных космических областях гравитационные потенциалы могут немного отличаться, влияя на массы всех фундонов и на их гравитационное взаимодействие.

7. Значения масс лептонов 2-го и 3-го поколений. Используя плотность вероятности $w(L)$ состояний фундона (5.2), найдём среднее значение полуцелого номера состояния L при заданном интервале (L_1, L_2) его значений, то есть найдём **среднее состояние фундона** на этом интервале:

$$L = \sum_{L_1}^{L_2} L w_L \cdot \Delta L \to \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} L w_L \, dL = \frac{a}{2}\int_{L_1}^{L_2} L^{-1/2}\, dL = aL^{1/2}\Big|_{L_1}^{L_2} = a(\sqrt{L_2} - \sqrt{L_1}), \quad (1)$$

где, согласно (6.5)

$$a = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{L_2} - \sqrt{L_1}} \quad (2)$$

и тогда

$$L = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (3)$$

В частности для всех возбуждённых состояний электрона следует положить

$$L_2 = L_e - \Delta L_e, \quad L_1 = 1/2, \quad (4)$$

где ΔL_e – среднее отклонение состояния электрона от своего среднего значения L_e. Тогда из (3),(4),(6.8) находим

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2,9544 \cdot 10^{10}} - \Delta L_e) \approx 1,2154 \cdot 10^5. \quad (5)$$

Этому приближению, не учитывающему ΔL_e из (2.9.4) соответствует масса $273,4 MeV$, имеющая порядок массы мюона ($106 MeV$), которой соответствует $L_\mu = 8,08714 \cdot 10^5$. Для компенсации этого расхождения достаточно небольшой относительно электрона поправки

$$\Delta L_e = \sqrt{2}\; 8,08714 \cdot 10^5 - \sqrt{2,9544 \cdot 10^{10}} = 9,718 \cdot 10^5, \quad (6)$$

чему соответствует

$$L_2 = 2,9544 \cdot 10^{10} - 9,718 \cdot 10^5 = 2,9543 \cdot 10^{10}, \quad (7)$$

очень мало увеличивающее массу электрона до значения $0,554595$ (сравните с (6.7)). Отклонение массы самого электрона от опытного значения надо искать в систематических погрешностях теории.

Таким образом **массу мюона** можно интерпретировать как среднюю массу его электронного очень сильно возбуждённого состояния. Аналогично **массу таона** можно интерпретировать как массу очень сильно возбуждйнного мюонного состояния фундона. Действительно, если для мюона

$$L_\mu = 8,08714 \cdot 10^5, \quad (8)$$

то для таона (в приближении нулевого ΔL_μ)

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{8,08714 \cdot 10^5} - \Delta L_\mu) \approx 635,89, \tag{9}$$

чему соответствует масса $3,78018 GeV$. Для компенсации расхождения этой массы таона с экспериментальным значением $1,784 GeV$, которому соответствует $L_\tau = 2855,07$, достаточно небольшой относительно мюона поправки

$$\Delta L_\mu = \sqrt{2}\ 2855,07 - \sqrt{8,087144 \cdot 10^5} = 3138, \tag{10}$$

чему соответствует значение

$$L_2 = 808714 - 3138 = 805576, \tag{11}$$

мало увеличивающее массу мюона до $106,206 MeV$. Найдя массы заряженных лептонов 2-го и 3-го поколениё, легко найти энергии соответствующих нейтрино.

8. Кварки и глюоны. Согласно таблице (208.2), точно такую же массу как электрон имеет другой фундон с зарядом $\pm q/3$, который согласно квантовым числам можно интерпретировать как d-кварк. Для других **фундонов с нулевым и дробными зарядами**, поддерживаемых основными эфемеронами, формула (1.4) даёт массы (Мэв):

Таблица 208.3. $|z_{q1}| = 1/3,\ |z_{q2}| = 1/3$

m_l(мкв)	DL	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$
$3,287$		$0,374723$	$0,297418$	$0,259819$	$0,236061$
$6,7633$		$0,47611$	$0,3782860$	$0,330463$	$0,300246$

Таблица 208.4. $|z_{q1}| = 2/3,\ |z_{q2}| = 2/3$

m_l(мкв)	DL	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$
$3,287$		$0,649200$	$0,515270$	$0,450130$	$0,408970$
$6,7633$		$0,825717$	$0,655372$	$0,572520$	$0,520169$

Эти фундоны имеют массу тоже порядка массы электрона. Их электрические заряды $z_q = z_{q1} + z_{q2} = 0, \pm 2/3, \pm 4/3$. Дробные заряды этих фундонов и их практическая точечность позволяют интерпретировать такие частицы с полуцелым спином как u-**кварки** с зарядами $\pm 2/3$ и $\pm 4/3$. Их массы того же порядка, как у электрона ($\sim 1M$эв). Вместе с d-кварком имеем 9 разных видов кварков, отличающихся 3-мя значениями массы и 3-мя цветовыми зарядами, допускающие все адронные и барионные комбинации.

Аналогично лептонам для кварков применимо понятие 3-х **поколений** и возможно слабое взаимодействие теми же векторными бозонами и нейтрино, отличающимися лишь кинетической энергией, но кварки могут быть свободными только асимптотически, то есть при ограниченных расстояниях между ними, допустимыми

соотношением неопределённости. Поэтому аналогично векторным бозонам слабого взаимодействия, роль связывающих кварки **глюонов** играют асимптотически свободные промежуточные векторные бозоны **сильного взаимодействия** с цветными зарядами и нулевыми электрическими зарядами, не допускающие разлёт асимптотически свободных кварков. В ДФ **калибровочная инвариантность не является необходимой** и глюоны не обязаны быть безмассовыми. (1)

В силу **конфайнмента**, то есть невозможности освобождения частиц с полуцелым зарядом, потенциал освобождения кварка бесконечно большой, а происходит, как и слабое взаимодействие, из соотношения неопределённости, возрастая линейно с расстоянием. Но потенциал освобождения глюона ограничен его массой, превышение которой ведёт к его распаду. Поэтому каждый кварк в адроне связан постоянной силой, пропорциональной массе глюона (которая согласно таблице (208.1) не отличается от массы m_V векторного бозона слабого взаимодействия), направленной к центру масс адрона.

$$F = m_V \cdot r, \tag{2}$$

Вычислив волновую функцию движения кварков в таком потенциале, можно найти все основные стационарные состояния такого движения заданных кварков в адроне, то есть можно вычислить спектр масс адронов, который должен быть ограничен массой $m_V = 81,4GeV$ самого лёгкого промежуточного векторного бозона сильного взаимодействия (глюона). Полагая самый быстрый (ультрарелятивистский) случай взаимодействия, из (3.1) имеем

$$r \sim \hbar/m_V, \quad F \sim \hbar. \tag{3}$$

9. Пара-заряд фундонов. Пара-заряд (I.8.1.8.*) указывает на очень малое нарушение симметрии волновой функции простона (гэп её частоты) относительно инверсии времени. Все простые частицы представляются одним метаболирующим простоном с определённой волновой функцией, поэтому они имеют определённый паразаряд $q_p = \pm 1$. Волновые функции простой частицы и её античастицы при наложении могут взаимно уничтожиться, то есть эти частицы аннигилируют друг с другом, излучая фотоны. При этом обе частицы должны иметь одиаковые спины, проекции которых взаимно уничтожаются при подходящей ориентировке в пространстве. Это обеспечивается согласно (1.4.1). Аннигиляция не допускает существования фундонов, состоящих из тяжелона и анти-тяжелона, то есть оба тяжелона, при их противоположных электрических зарядах q, должны иметь одинаковые пара-заряды q_p. И, наоборот, если оба тяжелона имеют противоположные пара-заряды, то они не могут иметь противоположные электрические заряды:

$$\begin{cases} q_{p_1} = q_{p_2}, & q_1 = -q_2 \\ q_{p1} = -q_{p2}, & q_1 \neq -q_2 \end{cases}, \tag{1}$$

то есть **истинно нейтральных фундонов не существует** (разве что виртуально):

$$\begin{cases} q_p = \pm 2, & q = 0 \\ q_p = 0, & q \neq 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Также не существует фундонов при $q_1 q_2 = 0$ (2.9.6):

$$q_1 q_2 \neq 0. \tag{3}$$

10. О точности вычисляемых значений. Большое число цифр в вычислениях рудиментарно и не означает их точности, а используется только лишь для ненакопления ошибок. Вычисленные значения спектра масс фундаментальных частиц очевидно не совпадают точно с опытными значениями, но относительные отклонения не превышают нескольких процентов. Естественным объяснением этих отклонений является допускаемая идеализация понятий и не полный учёт виртуальных взаимодействий с вакуумом, то есть **радиационных поправок** [Добрынина], вычисление которых громоздко и не отвечает компетенции автора. Например, чем меньше момент фундона, тем хуже выполняется условие точечности его тяжелонов. Тем не менее, ДФ – единственная теория, объясняющая происхождение масс всех фундаментальных частиц Стандартной Модели.

§5. Взаимодействие фундонов.

1. Квантование гравитационных взаимодействий фундонов. Гравитационные переходы могут происходить только малыми шагами ($\Delta L = 0,5; 1$), соответствующими возможным значениям момента импульса лёгкого гравитона. Соответственно малы и изменения массы (например, для лептонов первого поколения Δm порядка микро-электрон-вольт). Поэтому малость **кванта массы гравитационного поля** не позволяет быстро изменить массу фундона с помощью таких квантов. В этом проявляется **слабость гравитационного взаимодействия между фундонами**, хотя гравитационное взаимодействие между тяжелонами внутри фундона очень даже сильное. Кроме того оно сильное в **гравитационном коллапсе** астрономических тел, где происходит взведение гравитонов.

Большие изменения массы фундона требуют сообщения ему не только достаточной энергии, но и соответствующего изменения гравитационного момента импульса. Необходимость такого **согласования изменения массы и гравитационного момента импульса воздействия** на фундон уменьшает сечение его взаимодействий с другими фундонами, то есть существуют **гравитационные правила отбора** для переходов фундона.

Несмотря на эти правила, достаточно сильные негравитационные внешние воздействия могут перебрасывать состояние фундона вплоть до максимальных значений на массовой лестнице. Из таких воздействий достаточно сильным является электромагнитное взаимодействие. Причём гравитационные правила отбора могут быть выполнены передачей подходящего момента импульса при подходящем **косом (касательном) столкновении**.

Фундоны почти всегда имеют большой гравитационный момент, который необходимо учитывать, составляя баланс вступающих в реакцию частиц и продуктов реакции. Этот момент сильно влияет на вероятности реакций.

2. Дальность виртуальных взаимодействий. В сопутствующей системе координат соотношение неопределённости (3.2.1) можно записать в виде

$$\Delta t \sim \hbar/\Delta m. \tag{1}$$

которое в частности для периода колебаний равного $t = 2\pi/\omega$ соответствует общему соотношению между энергией покоя m и частотой ω. При скорости v виртуальной частицы собственный интервал времени преобразуется в $u^0\Delta t$ и она может преодолеть расстояние

$$\Delta r = v \cdot u^0 \Delta t = v \cdot u^0 \hbar/\Delta m = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{\hbar}{\Delta m}, \tag{2}$$

откуда видно, что виртуальные частицы, имеющие массу могут действовать лишь на конечных расстояниях обратно-пропорциональных массе, а в случае нулевой массы (как у фотона) виртуальные частицы становятся дальнодействующими и **реальными**. Лёгкие гравитоны (они же e-нейтрино) имеют конечную, но очень большую дальность гравитационного взаимодействия. Слабое же взаимодействие нейтрино с поддерживаемыми ими лептонами короткодействующее и происходит посредством тяжёлых промежуточных векторных бозонов.

3. Цветные силы сильного взаимодействия. Частицы, имеющие целый электрический заряд будем называть **целыми частицами**, а частицы с дробным зарядом – **дробными частицами**. Дробные фундоны происходят от представления волновой функции нормона произведением 6-ти компонент, которые не могут существовать независимо друг от друга. Но их можно рассматривать независимо **виртуально**, то есть в течении достаточно короткого времени, допускающего нарушения законов сохранения согласно **соотношениям неопределённости**. Поэтому дробные фундоны можно рассматривать только в составе целых частиц, где они связаны друг с другом, интенсивно (**сильно**) обмениваясь дробными или целыми частицами. Сила такой связи может быть только коротко-действующей (**сильной**), иначе невозможно удовлетворить соотношению неопределйнности. Поэтому эти частицы должны быть почти точечными, как фундоны.

Из-за сильной связи, цветные частицы могут существовать только как составные части в более сложных частицах. Попытка выделить их из связанной системы приводит к потере затраченной энергии не на отделение частицы, а на создание других частиц. То есть для каждой цветной частицы имеет место **конфайнмент**, при наличии **асимптотической свободы** на малых расстояниях. Цветовой заряд позволяет сосуществование в одной частице фермионов с одинаковыми другими квантовыми числами.

Конфайнмент (невылетание) составляющих компонент сложной частицы предполагает неограниченный рост потенциала при удалении компоненты из системы, но реально этот рост ограничен распадом самой компоненты. В некотором смысле конфайнмент можно рассматривать как следствие малого времени жизни свободных компонент. В этом смысле нейтрон тоже проявляет конфайнмент,

так как вне ядра имеет ограниченное время жизни. Промежуточные векторные бозоны тоже не могут далеко улететь от места своего рождения. Аналогичная ситуация происходит и с кварками, стабильность которых внутри адронов лишь динамическая. Уйти далеко от адрона они могли бы только сильно нарушая равномерность статистического распределения импульсов метаболирующих простонов адрона, что невероятно. Понижение вероятности состояния означает понижение его энтропии, что связано с повышением его энергии. Поэтому удаление от адрона кварка повышает его энергию, так как требует во всё большем 4-объёме поддерживать высокую степень неоднородности статистического распределения импульсов по направлениям. Для одинокого кварка поддерживать такую неоднородность можно лишь конечное время, определяемое соотношением неопределённостей. **Отсутствие цветового заряда** (целочисленность электрического заряда) означает отсутствие такой неоднородности.

Таким образом увеличение 4-объёма области, содержащей **дробный цветовой заряд** связано с увеличением её энергии, то есть существует сила, стремящаяся к уменьшению этого 4-объёма. Эта **цветовая сила** аналогична силе, возникающей при деформировании эластичного тела, например, латексного предмета или взвешенной жидкой капли.

Определённые электрически незаряженными (4.8.1), глюоны имеют цветовой заряд. Каждый глюон состоит из пары противоположно электрически заряженных цветных тяжелонов со спектром заряда:

$$0 = -1/3 + 1/3 = -2/3 + 2/3. \tag{1}$$

Кроме того каждый глюон имеет один из 8 возможных **цветов** – по числу углов куба, демонстрирующих 8 разных ориентаций трёх ортогональных осей в 3-пространстве. Это очевидно, если каждую вершину куба представлять как начало координат, а сходящиеся в неё рёбра куба – как координатные оси. Таким образом возможны 16 разных глюонов, различающихся электрическим зарядом своих тяжелонов или цветовым зарядом или тем и другим.

4. Адроны. Устойчивые, связанные тяжёлыми глюонами динамические системы кварков, образуют различные **адроны** с массами первого поколения порядка $\sim$ 2Гэв. Адроны могут содержать несколько кварков. Самыми устойчивыми (лёгкими) адронами оказываются **нуклоны** – **протон** и **нейтрон**, причём протон живёт неопределённо долго (пока не известно сколько). Нейтрон в составе **ядер атомов** тоже живёт очень долго, но свободный нейтрон имеет время жизни порядка 10 минут.

Наиболее простые адроны состоят из кварка и антикварка (**мезоны**), связанных глюонами, то есть сильным взаимодействием. Простейшие из них (самые лёгкие) – **заряженные и нейтральные пионы**. Пионы, связывают **ядерной силой** протоны и нейтроны ядер вещества. **Ядерная сила** взаимодействия посредством пионов сводится к сильному взаимодействию посредством глюонов аналогично

тому как сила Ван-дер-Ваальса между молекулами сводится к электромагнитному взаимодействию между электрическими зарядами.

5. Стабильные частицы. Вещество. Кварки связываются друг с другом силой, которая вообще не позволяет их освобождение друг от друга иначе как при аннигиляции с другими подобными анти-системами. При этом кварки как и электроны являются стабильными, допуская существование легчайшей стабильной кварковой системы – протона, в 1836 раз более тяжёлого, чем электрон. Протоны и электроны способны образовывать бесконечное разнообразие сложных стабильных систем – **вещество**.

§6. Краткие результаты.

1. Сводка основных понятий. Объективное существование Мира является следствием объективного существования бесконечного счётного множества целых чисел, богатство математических отношений между которыми отображает всё многообразие свойств объектов Мира.

Даже одно единственной целое число (**номер космоса** N) настолько богато отношениями с другими числами, что тривиальное разложение его квадрата в четвёрку квадратов других подходящих целых чисел образует нетривиальный бесконечный **космический спектр**, если эти четвёрки квадратов (**спектральные точки**) суммируются со знаками, соответствующими **сигнатуре метрики псевдоэвклидова пространства** по формуле:

$$N = k^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2, \quad k/|k| = (-1)^{n_0}. \tag{1}$$

Космический спектр является подмножеством **спектрального псевдо-эвклидова прстранства**, состоящего из всех четвёрок действительных чисел (**точек спектрального пространства**), в том числе и спектральных точек.

Существует бесконечное счётное число космосов (по числу значений номера космоса N), в одном из которых мы живём. Согласно ДФ нашему опыту соответствует значение $N = 67$. При этом космический спектр задан на все времена, **детерминируя наше существование**. Обратное преобразование Фурье космического спектра однозначно определяет **космическое единое поле** в соответствующем **псевдо-эвклидовом координатном пространстве**. Этому пространству соответствует декартова **основная система координат**.

Космическое поле в этих координатах симметрично. Оно имеет **Начало** и разбивается на 48 симметричных друг другу **эквариантов** и две **полости изотропных (±)конусов**, внутри которых единое поле образует **Вселенную**. В 3-пространственном сечении **Вселенная является шаром** радиуса $r = t$, где t-**время** в **реликтовой** системе координат, в которой ось времени начинается в Начале. Хотя все экварианты строго симметричны друг другу, опознание их наблюдателем из его

эквариантa может быть весьма трудным в силу космологически больших задержек времени между наблюдением разных эквариантов.

Вселенную можно понимать в другом смысле – как бесконечную псевдосферу с гиперрадиусом $R = T$, где T-**возраст Вселенной**. Вселенная развивается в направлении увеличения её возраста.

Каждому космосу соответствует своя Вселенная и своё единое поле, удовлетворяющее уравнению КГФ

$$\Box u = -k^2 u \tag{2}$$

со своим коэффициентом (**корнем космоса**) k. Поэтому единые космические поля разных космосов взаимно ортогональны, то есть единое космическое поле любой Вселенной относительно другой является **космическим шумом**.

Единое поле u имеет неразрывную **плотность 4-тока**

$$j_u^\mu = \frac{i}{2}(u\nabla^\mu u^* - u^*\nabla^\mu u), \tag{3}$$

плотность заряда $\varrho = j^0$ которой имеет точечные особенности (**точечные заряды – протистоны**), каждый из которых, рассасываясь с возрастом Вселенной T, убывает пропорционально $\sim 1/T^3$, но подавляюще велик по сравнению со **сплошным зарядом**, истекшим из протистонов разных знаков и нейтрализовавшимся.

На гиперсферическом носителе мирового спектра спектральные точки распределены статистически равномерно, что порождает в координатном представлении **глобальную волну** в присутствии шумовой (флуктуационной) компоненты. Статистический подход к шумовой компоненте не является необходимым, так как единое поле детерминировано, но он позволяет использовать очень эффективные абстрактные **квантовомеханические методы** анализа единого поля. Существование глобальной волны нормирует точечные заряды протистонов, а шумовая компонента допускает их **криволинейные движения**. Вне Вселенной глобальная волна экспоненциально убывает.

Точечные заряды протистонов одинаковы по модулю, отличаясь лишь знаком. Средние концентрации протистонов обоих знаков постоянны и равны друг другу, отличаясь лишь локальными вариациями, определяющими **гравитационное поле** и также **электромагнитное поле**, если концентрации двух знаков заряда статистически неравновесны. Статистическому равновесию концентраций соответствует **физический вакуум**. В нём средняя концентрация протистонов каждого знака равна 1 согласно соответствующему определению единицы измерения интервала.

В малой окрестности протистона единое поле можно представить универсальной **полной сопутной волной**, коррелирующей с глобальной волной, причём требование релятивистской инвариантности такого представления порождает два вида противоположно заряженных **сопутных волн**, с чрезвычайно малым отличием

(**гэпом**) других их параметров. Этому ничтожному отличию соответствует **пара-заряд** простонов, один из которых **пара-простон**, а другой – **анти-простон**. Их пара-зарядам удобно сопоставить два значения ± 1.

Полной сопутной волне данного знака заряда соответствует сумма двух **нормальных сопутных волн** с противоположными частотами ω, но одинаковыми $\varkappa$ (I.8.3.5.1)

$$\varphi = \frac{A}{r}\left(\mathrm{e}^{i(\omega t+\varkappa r)} + \mathrm{e}^{-i(\omega t-\varkappa r)}\right) = \frac{2A}{r}\mathbf{e}^{i\varkappa r}\cos\omega t. \quad (4)$$

В отличие от нормальной, полная сопутная волна определённого знака заряда имеет уже не сплошной и постоянный, а только точечный заряд, имеющий **микропульсации** за счёт истекающего пульсирующего пространственно-подобного тока.

Точечный заряд протистона является интегралом тока, вытекающего из него. Тогда из граничного условия на бесконечном возрасте Вселенной следует заряд протистона

$$q = \frac{\varepsilon_q}{2^7\pi^5 T^3}, \quad \varepsilon_q = \pm 1, \quad (5)$$

откуда следует, что вытекающий ток пропорционален $1/T^4$. Такой же порядок имеют и пульсации амплитуды сопутной волны (4) и соответствующего вытекающего тока и заряда протистона. То есть протистон испытывает космологически малые **микропульсации своего заряда**.

Нормирование параметров протистонов нормальными сопутными волнами приводит к определённой зависимости временно́й компоненты их скорости (**темпа**) от возраста Вселенной в системе координат, где покоится Начало (в **изначальной, или реликтовой** системе). При этом **темп ультрарелятивистский**. Протистоны образуют ультрарелятивистскую плазму (**проплазму**), которую из-за относительно слабого взаимодействия частиц можно рассматривать как газ (**прогаз**). Гэп темпов протистонов и антипротистонов заключается в разнице квадратов темпов всего на 2 единицы.

В ДФ пространство-время по определению псевдоэвклидово, однородно и изотропно, так как его единица интервала во всей основной системе координат определена как **средняя** концентрация протистонов по всему пространству-времени, то есть константа. Поэтому, согласно теореме Нётер, **справедливы все 10 механических законов сохранения**. Независимо от этого справедлив **закон сохранения электрического заряда**.

Лагранжев формализм позволяет рассматривать в качестве механической системы любую кривую или поле, дифференциальное уравнение которых можно представить в форме уравнения Лагранжа. При этом они приобретают все механические атрибуты: **4-импульс**, в том числе энергию покоя (**массу**) центра инерции, 6 компонент **тензора момента импульса** (в том числе **спин**). Спин скалярной функции равен нулю, но больше нуля для много-компонентной тензорной функции и зависит только от её тензорного типа.

Электродинамический лагранжиан общего вида, при **условии постоянства массы точечного заряда**, позволяет построить всю электродинамику. Причём существует такая **корпускулярная калибровка 4-потенциала протистона**, которая позволяет компенсировать расходимость энергии сопутствующего электрического поля точечного заряда протистона энергией вытекающего из этого заряда сплошного тока. В результате протистон имеет определённую конечную, но **непостоянную массу**.

Законы сохранения, распространённые на особые точки поля, позволяют однозначно найти закон изменения массы (**массовую функцию**) и мировую линию (**автоиду**) протистона, предоставленного самому себе, который совершает **самодвижение** под действием **реакции радиации**. Автоида представляет собой похожую на гиперболу инвариантную плоскую кривую в 4-пространстве с двумя примолинейными асимптотами.

Оба симметричных друг другу конца автоиды не устойчивы относительно возмущений, то есть **конечный** во времени конец одной автоиды может под действием возмущения перейти в **начальный** во времени конец другой автоиды. Этот процесс переходов может продолжаться бесконечно, реализуя **релаксационные колебания протистона**. При этом мировая линия протистона разбивается на **шаги** с параметрами, определяемыми возмущениями и законами сохранения.

В присутствие глобальной волны период автоколебания протистона испытывает **захват** периодом колебаний глобальной волны. То есть происходит синхронизация **стыков шагов** с **пиковыми гиперсферами** глобальной волны. При этом нормируется **стыковая масса** шагов и их средний темп.

Самодвижение протистона внутри щага не позволяет использовать понятие силы Лоренца, так как её определение нуждается в постоянстве массы частицы. Однако при осреднении массы по множеству шагов понятие **силы Лоренца** приобретает смысл.

Отношение полной энергии излучения автоиды на вираже к средней угловой частоте этого излучения является **постоянным волновым параметром радиации** $\hbar_0 = q^2/\alpha_0$, связанным через квадрат элементарного заряда с **безразмерной константой радиации**. Учёт диэлектрической проницаемости вакуума ε на низких частотах превращает эти величины соответственно в **постоянную Планка** $\hbar$, **заряд электрона** e и в **постоянную тонкой структуры** α.

Квантовая механика отказывается от отслеживания движения каждого протистона. Вместо этого вводится понятие **волновой функции**. В ДФ этому понятию легко придать 4-х-мерный смысл, рассматривая элементарным объектом **простон**, то есть очень короткий отрезок мировой линии протистона (**звено протистона**), выпрямленный за счёт включения в пару состыкованных полушагов соответствующей их радиации, превращающей их в замкнутую систему, мировая линия которой – прямой отрезок (**звено простона**), стыкующийся с такими же соседними

отрезками.

Использование понятия простона позволяет мировую линию каждого протистона представить последовательностью прямых отрезков (простонов), образующих непрерывную ломаную мировую линию, каждую вершину которой можно рассматривать как упругое столкновение простона с электромагнитным полем (его **квизом** и **квапом**). В каждой такой вершине сходятся линии центров инерции 2-х простонов и 2-х фотонов (квиза и квапа). Эта вершина и эти 4 линии образуют простейшую **диаграмму Фейнмана** для **элементарного процесса** взаимодействия протистонов с электромагнитным полем.

Все простоны имеют достаточно определённый 4-импульс и достаточно определённое положение в 4-пространстве. Поэтому их множества могут описываться определёнными распределениями в пространстве-времени с помощью понятия 4-концентрации, которое, благодаря синхронности концов простона с пиковыми гипер-поверхностями глобальной волны, можно определить 4-х-мерно. При этом имеет определённый смысл плотность вероятности распределения одного или определённого числа простонов.

Оказывается, что при некоторых условиях (в гравитационно нормальных областях) концентрацией простонов с неопределённым 4-импульсом и определённым зарядом является квадрат модуля космического поля того же знака. Эту концентрацию можно разложить в сумму, каждый член которой является концентрацией (плотностью вероятности) одного простона с тем же знаком заряда и с почти определённым 4-импульсом. Этот член оказывается почти плоской волной (**проволной**). Проволна не может локализовать свой простон, а в сопутствующей проволне системе координат она имеет единственный простон в каждый момент времени, произвольно обменивая его со средой (**метаболизм простона** данного 4-импульса и заряда).

Проволна может иметь как положительную так и отрицательную временну́ю компоненту μ^0 волнового 4-вектора, являясь соответтвенно заряженной положительно или отрицательно. Независимо от знака заряда энергия (временная компонента 4-импульса) определена положительно, поэтому проволна с заданным 4-импульсом может быть заряжена с любым знаком и не имеет нулевого заряда.

Так как "спиноры меняют знак при повороте на 2π"[Ландау 4, §19], то для реализации возможности полуцелых спинов, волновую функцию необходимо определить как **двузнаковую** (т.е. двузначную, две ветви которой отличаются только знаком). При этом проволне соответствует простейшая **волновая функция нормона** (двузнаковая):

$$\psi_j = \mathrm{C}_j u_j, \quad \mathrm{C}_j = \pm\sqrt{\frac{k}{q}}, \tag{6}$$

которая, допускает разложение на 3 ортогональных статистически равновесных

множителя так, что нормон имеет спектр дробных зарядов:

$$q_n = -|q|, -\frac{2}{3}|q|, -\frac{1}{3}|q|,\ 0,\ \frac{1}{3}|q|,\ \frac{2}{3}|q|,\ |q|. \tag{7}$$

Волновая функция нормона имеет скалярное представление (6.3.5.1), а также представление 4-векторной функцией (6.3.5.2). Тогда спин нормона имеет спектр (6.5.5.10) $s = 0, \hbar/2, \hbar$.

Спектр зарядов и спинов нормона **вырожден**, то есть свободный нормон во всех зарядовых и спиновых состояниях имеет одну и ту же энергию (**нормон суперсимметричен**). При внешних возмущениях **вырождение снимается**, то есть энергия покоя (**масса**) нормона расщепляется на два или более уровней.

Существует простейшая финитная вырожденная стационарная суперпозиция нормонов в форме тонкостенного макро-пузыря радиусом около 7 мм (**вакуумный гравитон**). Масса свободного вакуумного гравитона весьма мала (около 0,14 эв). Спектр зарядов и спинов гравитона такой же как у нормона.

Важнейшим свойством гравитона является существование у него расслоенных (**взведённых**) состояний, сохраняющих заряд и спин, но имеющих либо ещё меньшие массы (**эфемероны**) либо очень большие (около 3Тэв). Эти состояния гравитона являются простейшими однопараметрическими возмущёнными (**тонусными**) состояниями гравитона. При этом волновая функция массивных состояний (**тяжелонов**) является почти точечной (**коллапс**) (7.4.6.*).

Ультрарелятивистские тяжелоны могут связываться на очень малых расстояниях гравитационной силой, образуя **фундоны**, имеющие огромный дефект массы и формирующие спектр масс наблюдаемых частиц. Спектр орбитального момента импульса тяжелонов фундона дискретный, но очень плотный (почти классический), которому соответствует также плотный спектр масс фундонов (**массовая лестница**).

Переходы между состояниями на массовой лестнице обеспечивают очень лёгкие вездесущие частицы – **эфемероны**, но не только они. Каждому фундону соответствует своя квантовая лестница. Фундоны отличаются друг от друга своими зарядами и спинами. Расстояние между уровнями массовой лестницы уменьшается с ростом орбитального момента. Для каждого вида фундонов существует на квантовой лестнице область внутри которой состояние фундона равновесно в процессе регулярного обмена со средой определённого вида эфемеронами. Эти равновесные состояния реализуют **лептоны** и **кварки**.

Самые тяжёлые уровни на массовой лестнице далеко отстоят друг от друга, порождая спектр очень тяжёлых частиц, в том числе **промежуточных векторных бозонов** – переносчиков слабого взаимодействия, а в случае дробных зарядов – переносчиков сильного взаимодействия.

Легчайшее динамически равновесное состояние на массовой лестнице соответствует фундону 1-го поколения. Все квантовые состояния тяжелее фундона 1-го

поколения образуют фундон 2-го поколения, обмен которого резонансными эфемеронами со средой приводит (по механизму положительной обратной связи) к сужению около средних значений как спектра массы этого фундона, так и его резонансных эфемеронов. Аналогично квантовые состояния тяжелее фундонов 2-го поколения, порождают фундон и эфемероны 3-го поколения. Более высокие поколения слишком неустойчивы.

Вакуумные и лёгкие гравитоны имеют малую массу, поэтому высоко подвижны и если заряжены, то хорошо реагируют друг на друга. Но с микроскопическими (массивными) зарядами реагируют очень слабо, так как создают слишком малые напряжённости поля в силу макроскопических размеров распределения заряда. Корреляция волновых функций такого гравитона и микрочастиц настолько ничтожна, что взаимная нейтрализация их зарядов практически невозможна и вообще реакции между ними крайне мало вероятны. Эти гравитоны и другие слабонаблюдаемые частицы образуют так называемую **тёмную массу**.

Поток заряженных частиц вещества тёмной массы, ускоряемый магнитогидродинамическим способом в поле электромагнитного резонатора возможно использовать в качестве рабочего тела реактивного гравитационного двигателя.

Предельно плотным состоянием вещества является **гравиплазма** сильно диссоциированных (не вырожденных) состояний с разными зарядами и спинами, содержащая весь спектр возникающих и исчезающих всевозможных пар частиц и их античастиц, существовавшая в реликтовой Вселенной и образующая современные **чёрные дыры**.

2. Список субчастиц. Частицы, более простые, чем фундоны, назовём **субчастицами**.

Электрический заряд q_i i-той частицы можно записать в безразмерном виде $q_i/|q|$, где $|q| = \sqrt{\alpha_0 \hbar}$ – модуль элементарного заряда (например, электрона).

Таблица 211.1. **Универсальные доквантовые частицы.**

	$q_i/\|q\|$	ΔT(с)	m(Гэв)
протистон	± 1	∞	$0 \ldots 5,1977 \cdot 10^{51}$
антипротистон	∓ 1	∞	$0 \ldots 5,1977 \cdot 10^{51} - 0$
квиз	0	∞	0
квап	0	∞	0

-0 обозначает очень малую поправку к массе античастицы (I.8.1.8.*).

Таблица 211.2. **Простейшие квантовые частицы.**

	$q_i/\lvert q\rvert$	s	ΔT(c)	m(Гэв)
простон	± 1	$0, \frac{1}{2}, 1$	$1,28 \cdot 10^{-45}$	$5,1977 \cdot 10^{51}$
антипростон	∓ 1	$0, \frac{1}{2}, 1$	$1,28 \cdot 10^{-45}$	$5,1977 \cdot 10^{51} - 0$
нормон	$\pm(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$1,97 \cdot 10^{20}$
антинормон	$\mp(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$1,97 \cdot 10^{20} - 0$
фотон	0	1	∞	0

Таблица 211.3. **Гравитоны** (7.6.10.1),(7.6.10.2).

	$q_i/\lvert q\rvert$	s	ΔT(c)	m(эв)
вакуумный гравитон	$\pm(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$0,137$
вакуумный антигравитон	$\mp(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$0,137 - 0$
лёгкий гравитон 1	$\pm(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(3,29, \quad 3,47, \quad 3,72) \cdot 10^{-6}$
лёгкий антигравитон 1	$\mp(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(3,29, \quad 3,47, \quad 3,72) \cdot 10^{-6} - 0$
лёгкий гравитон 2	$\pm(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(6,76, \quad 7,13, \quad 7,64) \cdot 10^{-6}$
лёгкий антигравитон 2	$\mp(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(6,76, \quad 7,13, \quad 7,64) \cdot 10^{-6} - 0$
тяжёлый гравитон	$\pm(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(2980, \quad 3142, \quad 3295) \cdot 10^{9}$
тяжёлый антигравитон	$\mp(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$0, \frac{1}{2}, 1$	∞	$(2980, \quad 3142, \quad 3295) \cdot 10^{9} - 0$

Свободные нормоны и гравитоны суперсимметричны, то есть вырождены по всем дискретным квантовым числам, кроме очень слабого расщепления массы по пара-заряду. Согласно (7.6.10.1) **тяжёлые гравитоны нечётны**, а лёгкие имеют оба знака чётности – **самый лёгкий нечётен**, а **не самый лёгкий чётен**. Все нейтральные лёгкие тонусные гравитоны, кроме тяжёлых (**тяжелонов**) являются **эфемеронами** (**нейтрино**).

3. Происхождение и круговорот вещества. Фундоны являются гравитационно связанными парами тяжелонов. Эта чрезвычайно сильная на очень малых расстояниях связь формирует за счёт глубокого дефекта масс **весь спектр фундаментальных частиц** и снимает вырождение по их зарядам и спинам. Например, просто получается масса самой лёгкой заряженной частицы – **электрона** (4.6.7). Аналогично получаются дробно-заряженные фундоны (кварки и глюоны). Электромагнитная связь тяжелонов может давать более тяжёлые частицы, сравнимые по массе с самими тяжелонами. Преобладание электромагнитной связи может получиться при уменьшении темпа тяжелонов с ростом расстояния между ними.

Гравитационное притяжение вещества медленно приводит к его конденсации в астрономические тела, из которых предельно плотными являются **чёрные дыры**, характеризуемые **скоростью убегания** (2-й космической) близкой к скорости света.

В ДФ электромагнитная или гравитационная волна всегда имеет скорость, равную релятивистскому пределу (скорости света). Чёрная дыра лишь вызывает очень большое красное смещение убегающей волны, тем самым практически запирая энергию волны в своей окрестности, хотя волна всё же удаляется со светоподобным волновым вектором (радиальная проекция которого очень мала), касательным к медленно раскручивающейся спирали.

Развитием гравитационной конденсации вещества, накапливающегося и разогревающегося в чёрных дырах, является его деградация до самой простой формы – вакуумных гравитонов, образующих при гигантской температуре **гравиплазму** сильно диссоциированных (не вырожденных) состояний с разными зарядами и спинами, содержащую весь спектр возникающих и исчезающих всевозможных пар частиц и их античастиц.

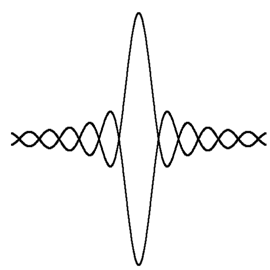
Часть гравиплазмы, теряющая на излучение момент импульса, дрейфует к горячему центру чёрной дыры, где её частицы получают возможность ухода в виде струи (**джета**) из полюсов чёрной дыры, если их энергия достаточна для совершения работы выхода, зависящей от энергии связи с ближней средой и с чёрной дырой в целом. Охлаждаясь в джетах, частицы **закаляются**, то есть закрепляются в определённых стационарных состояниях.

Таким образом, кроме поглощения субстанции из окружающей среды в форме **аккреционного диска**, чёрная дыра способна излучать субстанцию в форме джетов и излучения самого диска. Масса чёрной дыры увеличивается или уменьшается в зависимости от соотношения этих процессов. Если вблизи чёрной дыры нет вещества, то она, по крайней мере, имеет возможность поглощать тёмную массу. При этом, если чёрная дыра накопит достаточную массу и начнёт больше излучать энергии, чем поглощать, то эту массу чёрной дыры назовём **критической**. Она зависит от плотности энергии тёмной массы, то есть от гравитационного потенциала. Аккреционный диск в направлении к центру постепенно переходит в чёрную дыру, не отличаясь принципиально от неё самой.

После достижения критической массы чёрная дыра окажется в состоянии (характерном для гравитации) неустойчивого равновесия. То есть состояние поглощения вещества чёрной дырой, подпитываемое медленным поступлением вещества извне, сменится самоподдерживающимся (по принципу положительной обратной связи) состоянием извержения собственного вещества. Этот процесс наблюдается как **квазары**. Таким образом замыкается **круговорот вещества в природе**. В этом круговороте участвует и процесс слияния чёрных дыр, не достигших критической массы, но выделяющих при слиянии некоторое количество вещества, а также гравитационные и электромагнитные волны.

⋆ ⋆ ⋆

Священное писание и книга природы не могут противоречить друг-другу, потому что написаны одним автором – Богом. Г.Галилей



Глава 9. ЧЕЛОВЕК И МИР

Почему "здесь и сейчас"?
Потому что "везде и всегда"!

Мы попытались нарисовать более или менее строгую картину Мира. Теперь же немного пофилософствуем, пытаясь сделать из этой картины некоторые мировоззренческие выводы.

§1. Религиозный пафос теории.

1. Наша судьба – развитие. Прежде всего отметим, что Мир строго детерменирован, что издревле отражалось в вере в судьбу. Мировой спектр является как бы "книгой судеб", "скрижалями истории", а единое поле можно сравнить с некой четырёхмерной кинолентой, на которой запечетлена картина жизни всей Вселенной на все времена. Всё заранее предопределено в отношениях между числами и имеет Начало, но конца нет. Вселенная развивается от простого к сложному. Нет ничего проще простого, но сложнее сложного всегда есть более сложное. Мир бесконечно сложен, но познаваем благодаря тому, что иерархически упорядочен. Параметром порядка служит время. Картину Мира можно рассматривать вне зависимости от времени – как навсегда данную (предопределённую). Но это не значит, что в мире отсутствуют причинно-следственные связи, обеспечивыющие его развитие с ростом времени. В частности, мир содержит адаптирующиеся живые системы с обратными связями, в том числе человека.

Предопределённость Мира абстрактна для конкретного человека. Он имеет определенное место в Мире, вернее – свою мировую трассу, свой мировой след

и ощущает развитие своей личности (то есть накопление представлений о Мире) вдоль этой трассы как ход времени. Фундаментальной причиной развития Мира в целом (стрелой времени) является расширение Вселенной и связанное с ним её охлаждение в среднем, допускающее существование всё более тонко организованных систем. (Это хорошо отражено в понятии “Квантовой лестницы” [Вайскопфа]). Этот процесс бесконечен. Вселенная будет развиваться вечно, а это значит, что где-то там в бесконечно далёком будущем находится тот идеал, к которому стремится процесс развития. Его не возможно достичь, но можно вечно к нему приближаться. Такое представление о существовании цели развития в философии называется телеологией.

Существование в Мире сложно организованных структур возможно понять как результат развития от простого к сложному по известным принципам Дарвинизма: наследственности, изменчивости и естественному отбору. В более широком смысле наследственность можно отождествить с причинностью, которая для полевого представления Мира сводится к непрерывности и однозначности. Осуществление принципа изменчивости с изменением времени тривиально. Естественный отбор означает малую вероятность существования неустойчивых структур, что верно, так как является тавтологией, поскольку неустойчивость как раз и предполагает малую вероятность. Заметим, что детерменизм (как могло бы показаться) не столько связан с понятием причинности (то есть связи событий), сколько с единственностью представления Мира в 4-мерном пространстве-времени. То есть понятия причинности и детерминизма следует различать.

Мир познаваем только потому, что это не более, чем объект математики. Он бесконечно сложен и тем не менее познаваем, так как сложность Мира иерархически упорядочена. Поэтому его можно познавать постепенно. Бесконечно. Мы никогда не познаем Мир до конца, но то что уже знаем является фундаментом для дальнейшего познания.

Почему мы верим в объективность математики? Ведь говорят, что математика – это всего лишь язык. Да, математика – это язык. Но язык это не только символы. Символы связаны с объективными числовыми (математическими) отношениями. Математические теории имеют ценность вне зависимости от того на каком языке и в какой форме они записаны. Та суть, которая переводится с одного языка на другой и есть объективное содержание математики, то есть это законы Мира. Математические законы, написанные какой нибудь далёкой цивилизацией, мы без особого труда смогли бы перевести на свой язык. Это возможно лишь потому, что законы Мира везде одинаковы. Мир един и определяется математическими законами. Если хотите – назовите эти законы Богом.

2. Множественность цивилизаций. Наблюдаемая нами Вселенная конечна. Свет от звёзд, которые мы видим, приходит от изотропного конуса прошлого, ограниченного изотропным конусом Начала, то есть от ограниченной области. Эвклидово пространство Вселенной настоящего момента времени также ограничено изотропным конусом Начала то есть границей Вселенной. Степень развития

объектов Вселенной характеризуется интервалом до Начала, поэтому множество точек пространства-времени, характеризующихся одинаковым развитием, образует гиперсферу. Для каждой точки этой гиперсферы указанный интервал является её временем в **реликтовой системе отсчета**, в которой Начало покоится. Гиперрадиус всякой такой гиперсферы, мы называем **абсолютным временем** или **возрастом**. Так как гиперсфера безгранична, то объём Вселенной с заданным абсолютным временем бесконечен. Поэтому, если Вселенная однородна относительно макроструктур (что, однако, не очевидно), то существует бесконечно много цивилизаций с данным уровнем развития (возрастом), однако каждому наблюдателю доступны для наблюдения только цивилизации с примерно равным или меньшим чем у него возрастом.

3. Относительная независимость цивилизаций. Для оживления изложения мы забежим вперёд со следующим легкомысленным замечанием.

Распространение (**экспансия**) цивилизаций идет с некоторой средней скоростью $v < c$, что условно можно изобразить конусами экспансии (рис. 210.1).

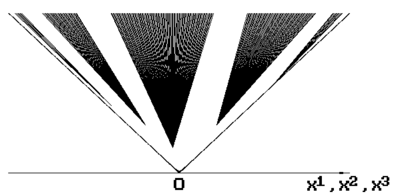


Рис. 210.1.

Остальное пространство-время назовём **относительной периферией**. Если плотность цивилизаций достаточно мала, то их конусы экспансии могут не пересекаться.

Рассмотрим вопрос несколько тоньше. Границу экспансии можно установить по-разному. Слабая экспансия (например, информационная, радиволновая) может распространяться со скоростью света и тогда рано или поздно все экспансии пересекаются. Однако более сильные виды экспансии, связанные с перемещением вещества, распространяются медленнее и таким образом всегда существует такая степень экспансии, при которой разные конусы экспансии не пересекаются. Это всегда дает возможность хотя бы в каком-то отношении развиваться цивилизациям самостоятельно. Это объясняет **факт ненаблюдаемости других цивилизаций**. Ведь чем дальше от нас цивилизация, тем древнее она для нас выглядит в силу малости скорости света относительно космических расстояний (конечно же такая цивилизация, в силу древности, ещё не имеет достаточно средств коммуникации), а вероятность близкой цивилизации не слишком велика. Тем не менее их поиск полезен.

4. Основания для человеческой гордости. Нарисованная нами картина мира далека от эфемерности. Все объекты мира есть более или менее сложные математические отношения, а поэтому они незыблемы, фундаментальны. В том числе и каждый человек есть некий частный закон природы. Информация о нём хранится в отношениях между числами (в мировом спектре). Мы хотим сказать,

что каждый человек вовсе не ноль, вовсе не флуктуация, от которой в вечности не останется и следа. Наоборот – человек имеет своё определенное место в Мире, свой мировой след (возможно бесконечный). Каждый человек для чего-то создан, у него есть предназначение. Человеку легче жить, если он своё предназначение осознаёт. Обычно это выражается в какой-либо целеустремлённости. Это большое счастье.

5. Бессмертие души. Душа человека – эта вся та информация, которая его характеризует. Когда человек рождается его душа ограничена лишь генетической информацией, полученной от всех предыдущих поколений через его родителей, однако он лишён личности в смысле личного опыта. Со временем такой опыт накапливается, душа обогащается, человек становится личностью. Промышленные технологии быстро развиваются, стоимость производства товаров снижается, однако "технология" воспроизводства личностей усложняется, дорожает, так как развитие цивилизации требует все более совершенной личности. Ни один человек не может пройти мимо стадии детства, стадии начального познания мира. Детская игра – это очень серьёзный процесс. Возможно, человека удасться создать искусственно, но при одном условии – такой человек на всех стадиях сознательного развития должен ощущать себя человеком. Чтобы это был нормальный человек, у него должны быть мама и папа или хотя бы какая–нибудь замена родителей, он должен играть и развиваться с другими детьми. Это обычный способ воспроизводства (**воспитания**) личности. Воспитание является насилием, однако, это **единственный** вид насилия, без которого человеческая жизнь **не возможна**.

В природе человек это технологический лидер. Жизнь на Земле стоит на пороге выхода в новую среду обитания – в космос. Это необъятная среда. Открывается ни с чем не сравнимый простор для жизни. Человек, несомнено, – фактор космологический. Когда люди достигнут возможности автономной жизни в космосе, наступит время быстрого расселения в пространстве. Возникнет потребность в более эффективном воспризводстве личностей, в том числе за счёт продления жизни людей. Сейчас такая потребность не возникает, потому что не может быть удовлетворена принципиально, так как Земля перенаселена. Для воспроизводства людей возможны в принципе следующие способы:

– традиционный способ рождения и воспитания,

– продление жизни, в частности, вплоть до бессмертия,

– тиражирвание личности, то есть создание точных копий уже существующих людей (вместе с их памятью),

– воссоздание (воскрешение) умерших людей (в том числе очень давно).

Несмотря на фантастичность некоторых из этих способов, принципиальных запретов на их осуществление нет. Целесобразность последнего способа можно подвергать сомнению, но даже если и в очень отдаленном будущем возникнет техническая возможность его осуществления, то рано или поздно будут возникать мотивы для его применения, что в бесконечной перспективе обеспечивает воскрешение каждого человека. Глядя в прошлое, мы всегда видим его конечным и тем более маленьким, чем оно древнéе. Будущее же глядит на нас из бесконечно

большой области, то есть оттуда нам достаётся бесконечно много внимания! По нашему мнению душа, как неуничтожимая информация – бессмертна. Всем нам рано или поздно, по той или иной причине предстоит жить в будущем. Эта жизнь не должна быть мучением. В нём нет никакого смысла. [Циолковский, с. 275]. Мы не верим в злобность будущего. Люди, которые осозна́ют смысл своего существования будут в гармонии с Миром. Люди научат себя любить жизнь и жить вечно, не уставая от неё. Скучно не будет никогда, потому, что развитие вечно и открытая Миру душа исчерпаться не может.

Здесь мы видим некоторое родство с философией "общего дела" Федорова и взглядами Циолковского.

Нельзя привыкать к Миру. Он во всех мелочах достоин удивления. Как можно привыкнуть к этому Храму, где у каждой пылинки есть своя роль?! Жизнь – это постоянное общение с Миром, это узнавание нового и привнесение чего-то своего. Не удивляться гармонии вещей – это смерть. Удивляйтесь! И удивляйте! Создавайте новое. Если хотите, чтобы это новое было вечным, делайте его разумно, то есть присматривайтесь к божьему замыслу, тогда это новое будет добрым, нужным, сохранным, а не эфемерным, мимолётным. Как говорится:

ALL YOU NEED IS LOVE! (ВСЁ, ЧТО ВАМ НУЖНО – ЭТО ЛЮБОВЬ!)

В любви смысл жизни. Любовь это тот интерес к жизни, то желание жить, которое даётся не только от рождения, но и может сознательно культивироваться. Жизнь осточертеет, если не получать от неё радость, удовольствие. Поэтому нужно учиться любить, чтобы получать от жизни удовлетворение. Важно понять как устроено дерево удовольствий. Многие удовольствия ведут в тупик. Давая удовлетворение лишь на физиологическом уровне, такие удовольствия могут зациклить личность и быстро привести её к деградации, то есть к смерти души. Поэтому дерево удовольствий должно быть живым, должно развиваться в гармонии с Миром. Если это понимать и следовать за развитием Мира, а не тешить свою гордыню, то жизнь будет в радость, а это и есть её смысл.

6. Перспективы развития носителей души. Душа каждого человека формируется посредством культуры. Из культуры человек получает основную часть своего мировоззрения и сам может чем-то обогатить культуру. Человек уже давно хранит часть своей души с помощью технических достижений культуры. Это хранимые записи (дневники, письма и т.п.), рисунки, фотографии, любимые вещи и другие "внешние отпечатки личности человека". В последнее время в этом принимают активное участие компьютеры. Пока технические средства несут очень малую часть личности (души) человека. Бурное развитие информационных технологий даёт предпосылки ко всё большему использованию искусственной памяти для хранения личностной информации. По количеству аксонов в мозгу человека, его память можно грубо оценить в несколько терабайт, что давно уже перекрывается доступными техническими средствами. По отношению к человеку технические средства памяти являются внешними. Обращение к ним человека весьма медленное. Но средства взаимодействия человека и машинной памяти

совершенствуются. Для этого вполне реально использование биотоков нервной системы, то есть непосредственной связи с мозгом. Если обеспечить достаточно широкий информационный канал связи искусственной памяти с мозгом, то мозг может использовать эту память как свою собственную. Благодаря адаптивным способностям мозга он сам может научиться использовать эту память, если только она согласована по параметрам взаимодействующих сигналов. Искусственная память может резко увеличить запоминающие способности человека. Если она по объёму будет много больше естественной памяти, то пользуясь искусственной памятью на протяжении своей сознательной жизни человек именно в ней сосредоточит основную часть своей души.

И эта часть души может пережить самого человека. После смерти этого человека другой человек, при желании, может подключить эту искусственную память к своему мозгу. Если при этом запретить режим записи, то эту память можно будет использовать только на чтение. Если новому хозяину этой памяти удасться научиться опознавать её содержимое (перекодировать образы под свою нервную систему), то он как бы объединит свою душу с душой старого хозяина памяти. После такого научения режим записи можно восстановить и душа старого хозяина может продолжать жить в другом человеке. Иначе говоря, произойдёт **конвергенция душ**, то есть слияние двух душ в одном теле. Это ещё одна возможность бессмертия душ. Кроме конвергенции двух душ конечно возможна конвергенция множества душ, при этом биологический носитель необходим для связи с культурой, то есть для сознания. Какой-либо киборг, не прошедший воспитания в культурной среде, не в состоянии расшифровать содержимое чужой памяти, так как не имеет с ней никаких изоморфизмов. Аналогично любой текст может быть переведён с одного языка на другой, только если эти тексты изоморфны (для произвольного текста это возможно если только оба языка в целом изоморфны). Здесь мы понимаем изоморфизм языков не только в соответствии слов языков, но и в соответствии структуры языков, то есть в соответствии различных отношений между словами одного и другого языка, что составляет смысл понятий каждого языка.

Степень распространённости конвергенции душ будет определяться конкретной практикой. Во всяком случае культурный прогресс предрасполагает к взаимопониманию, взаимопроникновению и бессмертию личностей. Слияние личностей в одной культуре в некотором смысле есть смерть личности. Однако в полной мере такое слияние не возможно, так как любая культура является иерархической структурой со своей историей развития. Устойчивость верхних (последних) этажей культуры обеспечивается сосуществованием с предыдущими этажами, служащими опорой верхних. В этом смысле личность вечна.

7. Единство Мира. Мы исходим из принципа достаточности математики для отражения объективной реальности. Математическая индукция позволяет генерировать бесконечные множества необходимых для этого моделей. Математика является единой структурой, в которой все части так или иначе связаны друг с другом. Наше понимание Мира не возможно иначе как посредством этой единой

структуры понятий. В этом смысле Мир един. Посредством понятий времени и пространства Мир можно упорядочить в единую иерархическую структуру, с помощью которой можно понять происхождение и развитие его частей от простого к сложному. В Мире существуют простейшие (элементарные) объекты, проще которых ничего не может быть. В иерархии Мира они существуют с самого Начала Мира, лежат в его основе. Параметром усложнения Мира является время. Время имеет Начало, так как проще простого ничего нет, но не имеет конца, так как процесс усложнения бесконечен как бесконечны индуктивные понятия математики (например, ряд натуральных чисел). Наблюдаемый нами сейчас Мир сложен и разнообразен, но по сравнению с тем, что нас ожидает в далёком будущем, он элементарен. Ведь развитие бескончно и что там – впереди сейчас представить себе не возможно. Поживём – увидим.

8. Самоорганизующиеся системы и свобода воли. Всё, что происходит со мной предопределяется всем Миром, в том числе, и в весьма значительной степени, предопределяется именно моими свойствами. Чем выше степень самоорганизации системы, тем в большей степени её будущее предопределяется ею самой. Способность предопределять своё будущее является определяющим свойством **самоорганизующейся системы**. Степень **самопредопределения** (**самоопределения**), то есть **свобода воли** растёт вместе со степенью самоорганизации. Отсюда, в частности, следует внешне парадоксальное утверждение: свобода человека или общества тем выше, чем выше его организованность (**саморегулирование**). Свободен тот, кто не ожидая влияния внешних обстоятельств, сам предопределяет (организует) свою судьбу, но это тем более возможно чем выше уровень освоения культуры.

Свобода воли не в том, что человеку предоставлена возможность выбора варианта развития Вселенной. Таких вариантов в детерменированной Вселенной просто не существует. А в том, что человек управляет собой и окружающей средой согласно своим установкам, вырабатываемым из генетического опыта предшествующих поколений и личного опыта, сохраняемых в различных видах памяти. Волевые акты выражаются в принятии единственного решения, выбранного из нескольких вариантов желаемых воображаемых следствий. Опытный результат принятого решения сравнивается с желаемым результатом, что позволяет оценивать различные решения с целью накопления опыта принятия полезных решений.

9. О смысле жизни. Смысл жизни в её неизбежности! В её предопределённости. Жизнь – закон природы.

То есть: хотите или не хотите, а жить придётся. Конечно, лучше жить так, как нравится. Однако, это не всегда нравится другим. То есть иногда приходится жить в конфликте с окружением. Если Вам нравится жить в конфликте, то и “Слава Богу”, однако Вас могут заставить делать то, что Вам не нравится.

Вы, по определению, всегда будете делать то, что Вам нравится, если Вам нравится жить в любви к Природе (к Богу).

Приоритет собственного я для личности естествен. Однако, для дальновидной, развитой личности, удовлетворение общественных интересов может быть лучшим

способом удовлетворения потребностей личных.

10. Наша божественная компетенция. Подавляющую часть вопросов нашей жизни решает за нас Бог, но не все, оставляя часть из них в **нашей компетенции**, так как мы сами представляем собой, хотя и очень маленькую, но конечную часть Бога. В этом наша гордость.

Люди очень разные, но общего у них больше чем разного – у них общий Бог!

§2. Некоторые мировоззренческие вопросы биологии.

1. Жизнь. В современном понимании жизнь можно определить как **способ существования дезоксирибонуклеиновых кислот (ДНК)**. Согласно Дарвину, развитие жизни (происхождение видов) обязано наследственности, изменчивости и естественному отбору.

Следует заметить, что эти условия развития выполняются не только для живых структур, но и для более простых. Если под **частицами** понимать стационарные состояния возбуждений газа протистонов, то и для частиц существуют дарвиновские условия развития. Действительно, под наследственностью можно понимать общую закономерность образования новых частиц, изменчивость это возможность существования различных частиц, а естественный отбор это преимущественное выживание устойчивых форм.

Развитию способствует общее остывание Вселенной, в ходе которого всё большее количество ранее неустойчивых форм становится устойчивыми. Отсюда мы видим, что граница между не живым и живым не очень принципиальная. Поэтому оправдано и расширенное понимание жизни как развития вообще. Например, в таком широком смысле употребляются выражения жизнь планеты, жизнь звезды, жизнь Вселенной. Молекулы ДНК в очень широком смысле можно рассматривать как катализаторы жизненных реакций, возникшие из простых химических катализаторов путём естественного отбора их устойчивых комплексов.

О появлении жизни на земле мы почти ничего не знаем, но возможность этого вполне понятна, если принять во внимание, что наследственность, изменчивость и естественный отбор действуют на самом элементарном уровне. Ведь любые частицы трансформируются, при этом что-то в них изменяется, а что-то сохраняется. Они как делятся так и соединяются. Появление у таких частиц динамических свойств, устойчивых за счёт потребления энергии из окружающей среды возможно на уровне химических реакций. При этом различные виды таких частиц конкурируют за энергетические ресурсы, что ведёт к их развитию, а само их существование и есть **жизнь**.

Само потребление энергии является созидательным процессом, идущим с уменьшением энтропии. За достаточно большое время такая примитивная жизнь постепенно превратилась в способ существования нуклеиновых кислот, что очевидно начиналось с существования таких кислот, содержащих лишь несколько

нуклеотидов. Не известно как они взаимодействовали с белками, но развитие этих взаимодействий привело к наблюдаемому сейчас результату. В самом начале наследоваться могли лишь основные принципы использования внешней энергии без точного копирования молекулярной структуры, а деление могло быть просто механическим дроблением.

Грань между живым и неживым имеет лишь условный смысл, связанный с жизнедеятельностью ДНК.

2. Идентификация личности. Единственным надёжным признаком идентифицирующим человека является его **геном**, то есть совокупность генов. Для полной идентификации сюда надо добавить физическую (силовую) связь носителей генов, что позволяет интегрировать человека в единую систему организованную вокруг главного его органа – мозга (носителя сознания) и отделить человека от двойников и отпадающих носителей генома.

Если создан двойник, психически продолжающий какое-либо состояние человека, то самоощущение этого двойника не будет отличаться от самоощущения этого человека. То есть двойник будет ощущать себя этим человеком до тех пор пока информация извне не даст ему понять, что он уже другой человек. Тем не менее он будет ощущать себя прежним человеком, так как его память содержит воспоминания прежнего человека. Возможно, что такой двойник может даже иметь другой геном или быть устроен на другом принципе (например киборг). в этом смысле можно говорить о **личности**, не обязательно связанной с конкретным человеком, то есть о **личности как об информации в памяти человека**. Именно человеческое происхождение этой информации является необходимым условием нашего определения понятия личности.

3. Ощущение времени человеком. Как всякий вещественный объект, человек имеет свой мировой след, вдоль которого происходит его развитие. Всякое ощущение человека является процессом, то есть функцией времени. При постоянном значении времени никакие ощущения не возможны, поэтому всякое ощущение является также и ощущением хода времени. Ощущение своего **положения** во времени возможно лишь при наличии памяти, которая позволяет расположить свои ощущения в упорядоченную во времени последовательность, что является необходимым для формирования понятия собственного **Я**. Следует понимать, что **ощущение хода времени** это субъективное понятие. Но существует и **объективный ход времени** в смысле функциональной зависимости состояния Вселенной (3-х-мерной Вселенной) от её Возраста. Но эту функцию надо рассматривать как неизменную в 4-пространстве. То есть Мир объективен, но все ощущения Мира, в том числе и ощущение хода времени, субъективны. Можно рассматривать различные функции времени, но ощущение хода времени надо всегда относить к определённому мировому следу, причём ощущение хода времени может возникнуть только у ощущающего существа.

Заметим, что для каждого человека может возникнуть вопрос: “Почему здесь и сейчас?” Как проигрывается “кинолента” моей жизни? Сколько раз я могу

переживать свою жизнь? Здесь полезно задать себе вопрос: "а какая мне разница – сколько раз я переживаю одну и ту же жизнь?" Ведь сколько бы раз я ни переживал, каждое переживание абсолютно ничем не отличается от другого. Я не могу их отличить друг от друга, следовательно сколько бы ни было переживаний, – субъективно это одно и то же переживание. Пусть даже существует бесконечный непрерывный континуум таких переживаний, – всё равно субъективно мы переживаем жизнь один раз. Ощущение хода времени субъективно, хотя само пространство-время объективно. Таким образом, на вопрос: "почему здесь и сейчас?", уместен ответ: "потому что всегда и везде".

В детерминистской картине Мира ощущения субъективны. В том числе субъективно ощущение хода времени. Время есть не более, чем координата в 4-пространстве-времени. Человека можно определить его мировым следом как определённым образом организованную совокупность мировых линий протистонов. Каждому моменту времени соответствует своё мгновенное состояние человека (для определённости и объективности можно рассматривать время в смысле возраста Вселенной). Интервал времени существования человека (t_0, t_k) конечен. В настоящий момент времени Вы переживаете некоторое мгновенное состояние t_n.

У 4-х-мерной Вселенной нет никакого объективного хода времени. Просто она существует в 4-пространстве, одна из координат которого – время (например, – интервал, отсчитываемый от Начала до данной точки этого пространства-времени). Говорить об **объективном ходе времени 3-х-мерной Вселенной** можно лишь как о зависимости единого поля от возраста Вселенной.

Субъективный же ход времени является нашим ощущением, оказавшимся полезным для нашего существования, и поэтому выработанный и закреплённый естественным отбором в устройстве нашего организма. Ощущение хода времени упорядочивает вообще все наши ощущения во времени, которые последовательно запечатлеваются в нашей памяти. В объективной 4-Вселенной, которая хода времени сама не имеет, нельзя объяснить почему Вы сейчас переживаете именно это мгновение t_n. Это можно объяснить лишь тем, что субъективно переживаются сразу все мгновения жизни данного человека, но не одним и тем же ощущающим экземпляром. То есть одновременно (в смысле ощущаемого Вами мгновения) существует множество экземпляров Вашего Я, каждый из которых ощущает какое-либо мгновение из интервала Вашей жизни (t_0, t_k). Все эти Ваши субъективные экземпляры **абсолютно** эквивалентны, хотя не эквивалентны друг **относительно** друга. Другими словами, наше Я абсолютно и единственно, но **ощущение** нашего Я распадается на множество экземпляров, абсолютно эквивалентных, но относительно друг друга – различных (сдвинутых во времени).

Возможность переживания человеком своего существования в причинно-следственной последовательности обеспечивается устройством самого человека. В психиатрической практике иногда наблюдаются нарушения такого переживания, проявляющиеся как расстройства памяти.

Мир, как математический объект, имеет сколько угодно изоморфных

представлений (аналогично, например, числовому пространству), но для ощущающего человека все представления Мира равноправны, то есть для человека Мир единствен и его ощущение жизни единственно. В частности, его ощущение жизни содержит “здесь и сейчас”.

4. Моя личность и Я. Попытаемся формализовать понятия личности и Я следующими предложениями:

– Каждый **человек (личность)** имет свой объективный **мировой след**.

– Этот след можно представить как **последовательность состояний**.

– Любая последовательность может быть отображена сама в себя **с некоторым сдвигом позиций**, если замкнуть её конец на начало или, если она бесконечна.

– Все такие **самоотображения** изоморфны и отличимы только друг относительно друга, оставаясь неотличимыми в абсолютном смысле.

– Каждое самоотображение мирового следа человека (личности) назовём **Я** этой личности, то есть личность имеет много своих Я.

– Личность – это множество Я, которое является вечным и неизменным, поэтому она существует вне ощущения времени.

– Я ощущает **ход времени**, (переживает ход времени).

– Я, вообще говоря, может продолжаться с разрывом во времени, если обеспечено сохранение личной памяти.

– Поведение Я определяется как общими законами природы так и личным опытом, накопленным в памяти до рассматриваемого момента времени, то есть Я активно формирует развитие Вселенной в доступной ему области, что означает существование **личной свободы воли** (божественной компетенции Я).

Существование Я, ощущающего ход времени, делает возможным **оперирование символами** и следовательно допускает существование математических понятий, что необходимо для построения предлагаемой теории.

5. Объективность переживания. Мировой след субъекта объективен. Субъект переживает свой мировой след. Переживаемые моменты упорядочены во времени и каждый из них переживается субъектом один раз. Но в 4-Вселенной нет никакого хода времени. Все 4 пространственно-временные координаты существуют вечно и независимо от ощущений субъектов, то есть они объективны. Ощущение же хода времени субъектом субъективно, хотя само существование субъекта в мире объективно. Совместить субъективность ощущений субъекта с объективностью самого субъекта можно, если все переживаемые моменты переживаются всегда независимо от времени, но каждому из них соответствует свой переживающий субъект. То есть существует бесконечное множество экземпляров данного субъекта, равномощное множеству переживаемых им моментов. Если Я переживаю данный момент, то все другие моменты моего существования в прошлом и будущем переживаются другими экземплярами моего Я. Эти экземпляры моего Я отличаются лишь сдвигом их переживаний во времени друг относительно друга и больше ничем, поэтому Я не могу их различать. Такой **континуальный взгляд на**

субъективные переживания делает их объективными и связывает их с понятием **хода времени 3-Вселенной**.

6. Почему "каждой твари по паре". Развитие вида определяется давлением естественного (или искусственного) отбора (**селекции**). Величину давления отбора (гибкость отбора) можно охарактеризовать скоростью изменения генома вида под его действием. Различные способы селекции дают различное давление и качество отбора, то есть его направление. Сельскохозяйственная практика демонстрирует очень высокую скорость и направленность отбора в желаемом человеком направлении. По сути половой отбор партнёра является методом отбора, близким к искусственному отбору. Скорость его велика и направление его определяется самим видом. Поэтому половой отбор очень эффективен для развития вида, что естественно привело к перекрёстному оплодотворению. Морфологическое различие полов эффективно в смысле специализации репродуктивной функции, для чего вполне достаточно двух полов. Большее число полов лишь неоправдано усложнило бы геном вида. В отношении человека можно по-просту сказать, что как человек создал для себя собаку, так и женщина создала для себя мужчину, а мужчина создал для себя женщину, то есть люди создали сами себя.

7. О злокачественном росте тканей. Каждая клетка организма идентифицируется своим набором генов (**геномом**).

Активность генов заключается в производстве белков, которые сами могут проявлять самые различные виды активности: являться строительным материалом с самыми причудливыми свойствами, в том числе со способностью к самосборке, производить другие вещества, переносить вещества, влиять на активность самих генов и многое другое.

Таким образом активность генов клетки зависит от внутриклеточной среды, которую они же сами главным образом и создают, при некотором влиянии соседних клеток и внешней среды организма. Такие сложные системы с обратными связями, вообще говоря, могут иметь различные **устойчивые состояния**, то есть такие состояния, которые будучи возмущены в некоторых пределах каким-нибудь внешним воздействием, после снятия этого воздействия возвращаются в исходное состояние. (Режимы возбуждения, возникающие при положительной обратной связи, тоже можно отнести к устойчивым (динамическим) состояниям). Если система имеет несколько устойчивых состояний и возмущение достаточно велико, то система после снятия такого возмущения может не вернуться в исходное состояние, а перейти в новое устойчивое состояние, в направлении которого действовало возмущение. Минимальную величину такого возмущения, способного перебросить систему из одного устойчивого состояния в другое называют **барьером** между этими состояниями.

Количество и характер устойчивых состояний клетки зависит от конкретного генома.

Размножаясь, клетки одного организма сохраняют один и тот же геном, однако могут выполнять различные функции, то есть клетки одного организма

дифференцированы по выполняемым функциям.

Хотя геном клетки весьма устойчив, он под действием внешних влияний изредка может изменять какие-либо гены, то есть ген может испытать **мутацию**. Для борьбы с мутациями организм имеет **систему репарации генов**. Кроме того организм имеет **иммунную систему**, уничтожающую клетки, воспринимаемые как чужие (ими могут быть и собственные мутировавшие клетки). В локальной клеточной среде могут сложится условия, когда мутировавшие клетки не распознаются как чужие.

Для описания дифференциации клеток в процессе их деления (митоза) может быть полезным понятие **митотических координат клеток**. Смысл его в том, что каждую клетку можно однозначно охарактеризовать одним числом

$$K_m = 2n + p, \quad p = 0; 1. \tag{1}$$

где n – номер деления,

p – число, равное 0 или 1 (чётность клетки), присваиваемая каждой из двух клеток последнего деления. Не используются ли такого рода координаты самим геномом организма в процессе его развития? В организме человека триллионы клеток, то есть их митотические координаты могли бы быть числом с 48 двоичными разрядами.

По последним данным, информация для дифференциации ткани в данном месте содержится в градиенте концентрации специальных белков – морфогенов, вырабатываемых клетками. `elementy.ru/novosti_nauki/433052`

Ясно, что в самом общем виде дифференцированные (а так же жизнеспособные мутировавшие) клетки одного организма можно рассматривать как различные устойчивые состояния одного вида клеток.

Таким образом достаточно сильное (**надбарьерное**) возмущение внутриклеточной среды может перевести клетку в другое состояние, неадекватное её функции в данном органе и в данном возрасте. Так, например, во взрослом организме могут даже появиться клетки с функциями, характерными для зародышевой быстро делящейся ткани, которая, вызывая сильное возмущение среды своей высокой активностью, не даёт времени для возврата ткани в предшествующее устойчивое состояние. То есть раковый рост тканей мог бы быть объяснён без привлечения механизма мутаций, хотя современное представление происхождения рака (**канцерогенеза**) без него не обходится.

Чем больше объём раковой ткани тем сложнее восстановить в ней прежнее устойчивое состояние. Имунная система не эффективна в борьбе с раковыми клетками, так как генетически они не являются чужеродными (по крайней мере локально). Локально раковая ткань начинает развиваться независимо от организма, испытывая множество делений с бесконтрольными мутациями, подвергаясь естественному отбору на выживаемость в тканях гибнущего организма и распространяясь в нём.

8. О механизме развития и старения. Сам процесс развития организма есть постепенный, последовательный переход его из одних устойчивых состояний в

другие. Эта последовательность смены устойчивых состояний могла быть обеспечена только естественным отбором и закреплена в геноме. То есть геном необходимо должен содержать **программу развития организма** в виде такого набора генов, который на каждой стадии развития организма обеспечивает его устойчивость и переход в следующее предопределённое состояние развития.

Однако, нет биологической необходимости в том, чтобы программа развития была бесконечной, то есть обеспечивала бы бесконечную жизнь каждому индивидуальному организму. Наоборот, наилучшие условия развития вида обеспечиваются лишь при определённой средней продолжительности жизни организма. Поэтому естественный отбор приводит к формированию программы развития с длиной, соответствующей оптимальной продолжительности жизни организма данного вида. Отсюда понятна очень большая разница в продолжительности жизни различных видов.

Пока организм развивается по заложенной в нём программе он здоров и молод. Но программа заканчивается и организм оставляется на произвол судьбы. Организм ещё какое-то время пользуется существующим запасом устойчивости, но продолжающиеся возмущения постепенно уводят его всё дальше и дальше от состояния наибольшей устойчивости, достигнутого во время его расцвета. Это **старость**.

Отсюда ясно, что вид может увеличить продолжительность жизни своих индивидуумов только при появлении биологической целесообразности этого. Такая целесообразность для человека может появиться только при переходе его в неограниченную среду обитания – в космос. Тогда будут сняты принципиальные ограничения на рост населения и люди даже сами смогут ускорить процесс увеличения продолжительности жизни своего вида.

Для человеческой личности, однако, более важно не биологическое продление жизни, а сохранение своей души. Здесь представляется уместной аналогия с компьютером, индивидуальность (“душа”) которого определяется набором программ, хранящихся в его памяти. Уничтожение такого компьютера не уничтожает его “души”, если она заблаговременно сохранена на внешних носителях памяти. Нечто подобное может стать возможным и для человека.

9. Принцип работы нервной системы организма. Эта система связывает организм в единое целое посредством электрохимических сигналов, передаваемых органами друг другу. Сигналами могут служить электрические импульсы, передаваемые по нервам и потоки гормонов, передаваемых по системам крово- и лимфо- обращения, которые неотделимы от работы нервной системы. Органы чувств состоят из **рецепторов**, передающих в клетки организма сигналы из внешней среды, на которые организм может реагировать обратным влиянием на внешнюю среду или на другие свои органы с помощью **эффекторов**. Соответственно рецепторы и эффекторы являются входами и выходами нервной системы, число которых весьма велико.

Нервная система является оператором, передающим сигналы со входов на

выходы в соответствие со своей **логической функцией (схемой)**. Генетически логическая функция нервной системы определена только в самых общих чертах, представляющих **инстинкты**. В остальном врождённая логическая функция является произвольной, но она способна сохранять своё состояние, то есть имеет **память**. Кроме передачи сигналов логическая функция может изменять своё состояние, под действием некоторых сигналов (**медиаторов**). Такое изменённое состояние может быть как кратковременным так и длительным, что называется **памятью**, которая может быть разной длительности. Под действием разных медиаторов на какие-то структурные части (**модули**) логической схемы, эти модули могут **отключаться, подкрепляться (дублироваться с разной кратностью), неопределённым образом изменяться (раздражаться)**. Важнейшую роль в развитии нервной системы играют **медиаторы раздражения**, так как только они могут изменять логическую схему. Сигналы раздражения подаются на различные модули от специальных **рецепторов неблагополучия** соответствующих органов. Именно линии связи сигналов раздражения с модулями логической схемы обеспечивают представление каждого органа в центральной нервной системе (**мозге**), то есть обеспечивают инстинкты. Интенсивность сигналов раздражения отражает степень неблагополучия органа.

В процессе жизнедеятельности организма, нервная система, используя внешние и внутренние сигналы, постепенно находит состояния, обеспечивающие минимизацию сигналов раздражения, то есть **обучается**. Это происходит потому, что вероятность благополучных состояний повышается относительно неблагополучных в силу неустойчивости последних под действием раздражений. Обучение является следствием **поисковой активности нервной системы**, провоцируемой раздражениями от органов, испытывающих какие-либо потребности.

Благополучию организма очень сильно способствует возможность предсказания неблагоприятных событий в окружающей среде. Поэтому поисковая активность нервной системы, при постоянном поступлении внешних и внутренних сигналов, приводит к выработке в логической схеме мозга некоторого образа окружающего мира, позволяющего делать полезные для организма предсказания в разных условиях. Такое ничем неограниченное развитие организмов привело к появлению систем общения, выходящих за пределы одного организма. Развитие абстрактных символьных способов отображения объективной реальности позволило обмениваться такими отображениями (**знаниями**) и создать социальную систему знаний (**сознание**).

10. Устройство человеческого мозга. Очень мало зная о морфологии мозга, на основании наших общих представлений об отображении Мира в сознании людей, всё же можно попытаться представить себе общие принципы его устройства.

Сверхзадача любого организма – это самосохранение. Все остальные задачи так или иначе подчинены этой сверхзадаче. Самосохранение в сложном окружающем мире требует от организма способности приспосабливаться к окружающим условиям и вовремя реагировать на возможные угрозы в будущем. Для

этого необходима способность отображать Мир. Эту способность обеспечивает **нервная система**, центральной частью которой является **мозг**. Нервная система обеспечивает связь **органов чувств** (элементарными частями которых являются **рецепторы**) и **исполнительных органов** (элементарными частями которых являются **эффекторы**). Эти связи могут быть **безусловными**, когда воздействие на рецептор (его **раздражение**) сразу вызывает отклик эффектора. Или эти связи могут быть **условными**, когда реакция эффектора возникает лишь в ответ на некоторую комбинацию воздействий на органы чувств и не всегда сразу. Вообще говоря, безусловные связи слишком примитивны и область их применения весьма ограничена, поэтому практически все связи можно считать условными. То есть рецепторы и эффекторы практически всегда соединены не напрямую, а через мозг. Условность связи эффекторов с рецепторами означает, что реакция любого эффектора является некоторой логической функцией состояний рецепторов. совокупность таких логических функций всех эффекторов определяет **состояние мозга**. Мозг в данном состоянии является электрохимическим аналогом электронной логической схемы с определённой логической связью входов и выходов.

При этом мозг способен изменять свои состояния. В этом заложены широкие возможности его адаптации к изменяющимся условиям. Как же реализуются эти возможности? Здесь работает метод творческого поиска и закрепления повторяющихся успехов. Опишем – как это может быть.

Для существования организма необходимо удовлетворение его физиологических потребностей. Физиологические потребности, которые возникают периодически, дают мозгу знать о своём возникновении сигналом от специальных внутренних рецепторов организма. Этот сигнал не просто передаётся в мозг, а изменяет его состояние (по крайней мере его части близкой к рецептору потребности). Причём переходы из одного состояния в другие происходят беспорядочно и тем чаще, чем сильнее потребность. Этот процесс назовём **поисковым возбуждением**. Поисковое возбуждение будет продолжаться до тех пор, пока не будет найдено состояние, которое приведёт к удовлетворению потребности. А через некоторое время эта потребность возникнет вновь. Таким образом в среднем постоянно существует некоторый фон возбуждения от данной потребности. За большое число циклов удовлетворения данной потребности может возникнуть специализация некоторой удобной части мозга к удовлетворению этой потребности. Это целесообразно с точки зрения отсутствия взаимных помех при удовлетворении разных потребностей. Удачные состояния могут дублироваться (подкрепляться). Все эти процессы происходят автоматически методом проб и ошибок. Пробы заключаются в случайной смене состояний и удачные из них подкрепляются снижением возбуждения, что повышает их вероятность, а неудачные – быстро ликвидируются повышением возбуждения, что снижает их вероятность. Таким образом поисковое возбуждение постепенно повышает вероятность состояний, способствующих удовлетворению данной потребности. Так происходит для каждой физиологической потребности. Специализация частей мозга

по потребностям не означает их изоляции друг от друга. Мозг един. Постепенно происходит структурирование мозга по логическим функциям, то есть определённое отображение взаимоотношений внешнего мира и организма, появление образов. О мыслительных процессах и их социализации мы уже говорили во введении. Развитие потребностей до культурных в принципе не изменяет их физиологического происхождения. Высокий уровень сознания приводит к пониманию приоритета духовного для личности над генетическим, поэтому сверхзадача самосохранения может постепенно смещатся в сторону души относительно генома.

11. Разнообразие ощущений и происхождение музыкальных звуков. Каждой структуре нервной сети соответствует некоторый образ. Ощущению этого образа соответствует раздражение этой структуры сигналом от рецепторов, в частности возбуждение от рецепторов потребностей. Разнообразие нервных структур, способных независимо раздражаться обусловливает разнообразие ощущений. Так зрительные ощущения возникают в соответствующих областях мозга, куда приходят сигналы при раздражении органов зрения. Смысл очень неприятных болевых ощущений в необходимости оберегать поражённые органы и уделять им достаточное внимание. Разнообразны звуковые ощущения.

Музыкальные звуки произошли из звука голоса. Голос имеет основную частоту f_0 колебаний голосовой связки. Эти колебания не синусоидальные, поэтому они в своём спектре содержат гармоники с частотами, кратными f_0. Спектр гармоник определяет тембр голоса (его индивидуальность). При распространении звука могут возникать искажения тембра вплоть до потери некоторых гармоник, включая основную частоту. Поэтому развилось такое восприятие голоса, когда частичная потеря гармоник, в том числе и основной, не приводит к полной потери разборчивости речи. То есть развилось **октавное восприятие звуков**, когда потеря одной или нескольких первых гармоник практически равносильно умножению основной частоты в 2^n раз. При этом основная информативность звуков сохраняется в более высоких гармониках основной частоты, а также в использовании не голосовых (согласных) звуков и в общей их модуляции по амплитуде и спектру. Кроме того восприятие речи не зависит от смещения основной частоты, что обеспечивает понимание речи и ребёнка и мужчины и женщины. Такое относительное и октавное восприятие звуков привело к такой организации музыкальных звуков, которая выражается в следующей их частотной связи между собой

$$f_{n,m} = f_0\, 2^{n+\frac{k}{m}} = f_0\, 2^n 2^{\frac{k}{m}}, \qquad (1)$$

где n – номер октавы,

m – число звуков в октаве,

к $= 0, 1, 2, \dots, m-1$ – номер звука в октаве,

$f_0 = f(0,0)$ – основная частота f_0 (нулевой октавы).

Звуки с одинаковым номером k в октавах, отличающихся номером n на целое число

N, всегда кратны по частоте. Действительно,

$$\frac{f_{n+N,k}}{f_{n,k}} = \frac{2^{n+N}2^{\frac{k}{m}}}{2^n 2^{\frac{k}{m}}} = 2^N. \tag{2}$$

В логарифмической шкале частот музыкальные звуки расположены равномерно (на одинаковых расстояниях друг от друга). Поэтому октаве можно сопоставить окружность, на которой на равных расстояниях расположены музыкальные звуки. Последовательно переходя от одного звука к другому можно непрерывно переходить из одной октавы в другую, не нарушая кратности частот. Наиболее рационально деление окружности на $6, 12, 24, 48, \ldots$ частей. Из этого ряда чисел музыкальная практика выделила число 12, соответствующее 12 музыкальным звукам в октаве. Увеличение этого числа до 24 избыточно в силу недостаточной чувствительности обычного человеческого уха к различию таких соседних звуков.

12. Сон и сновидения. Физиологические потребности существуют всегда, поэтому существует некоторый постоянный (в среднем) фон раздражений от этих потребностей. Для эффективного удовлетворения этих потребностей организм должен поддерживать максимально возможную чувствительность своих рецепторов, ограниченную лишь уровнем естественных шумов и возможностью самовозбуждения, характерной для всякой системы с высокой чувствительностью. Обилие обратных связей в высокоразвитой нервной сети создаёт возможность, в ответ на раздражения от рецепторов, долго сохранять высокий уровень поискового возбуждения даже после прекращения внешних воздействий. Такое оторванное от внешних воздействий возбуждение (зацикливание) может стать бесполезным с точки зрения удовлетворения физиологических потребностей и даже вредным (патологическим). Поэтому периодически такие состояния (хотя бы с точки зрения их профилактики) необходимо прерывать. Что и является сном. При этом для безопасности рецепторы и эффекторы практически отключаются и тормозяться области нервной сети, содержащие наиболее абстрактные, оторванные от внешнего мира понятия (сознание). Области, содержащие более конкретные образы, близкие к рецепторам могут сохранять возбуждение (**сновидения**).

Аналогичный процесс в простейшем виде реализуется в радиотехнической схеме, называемой **сверхрегенератором**, где положительная обратная связь доводится выше порога самовозбуждения, обеспечивая экспоненциальное нарастание предварительно накопленного в резонансном контуре входного сигнала. Выходной сигнал пропорционален времени экспоненциального роста и амплитуде предварительно накопленного сигнала. Чтобы избежать ограничения сигнала порогом перегрузки, экспоненциальный рост необходимо прерывать либо периодически, получая на выходе усиленные импульсы, пропорциональные по амплитуде входному сигналу (**принудительное гашение**), либо сама перегрузка должна вызывать **самогашение** роста экспоненты, что даёт на выходе импульсы, одинаковые по амплитуде, частота следования которых пропорциональна входному сигналу.

Сверхрегенерация обеспечивает автоматическую **калибровку чувствительности** на максимальном уровне, не допуская самовозбуждения. Периодический сон осуществляет такую калибровку сразу для всех сенсорных систем организма.

§3. Размышления о будущем вычислительных технологий.

1. О возможности вычисления событий. Вычисление единого поля в ограниченном спектре и объёме пространства-времени представляется возможным уже при современном уровне развития вычислительных технологий. Поэтому в принципе можно получить сведения о состояниях частиц и составляемых ими конечных объектах. Как бы сложна ни была эта задача, она конечна и в принципе может быть решена. Из всех объектов такого изучения наиболее интересен мозг людей, в котором в наиболее систематизированном виде хранится информация об окружающей среде. Случайный выбор таких объектов чрезвычайно сложен (так как Вселенная в основном пуста), поэтому для поиска их координат нужна априорная информация, которую несравненно легче получить из прошлого, чем из будущего. Поэтому простейший способ удовлетворения интереса к будущему – это дожить до него. Из прошлого информацию несут сохранившиеся объекты (они же могут в некоторой степени предсказывать будущее). Не слишком большие объёмы пространства-времени можно попробовать обсчитать на вычислительных машинах. Если это удастся сделать хотя бы для микроскопических объёмов, то будущее таким вычислениям обеспечено. Что касается вычисления будущих событий, то здесь есть опасность, так как не исключены гибельные психологические влияния таких знаний.

2. Однородно ли вещество космологически? Статистическая однородность мирового спектра не обязательно означает статистическую однородность вещества, хотя концентрация точечных зарядов в среднем однородна. В большой дали от космологических координатных плоскостей фазы плоских волновых компонент настолько запутанно связаны, что здесь по-видимому можно говорить о статистической однородности единого поля, а вблизи этих плоскостей и **особенно у временно́й космологической оси** эти фазовые связи более закономерны. Поэтому не исключено, что неравновесные формы вещества (например, галактики) тяготеют к космологической временно́й оси и при удалении от неё их распространённость снижается, так что не исключено, что для каждого возраста Вселенной имеется лишь конечное число цивилизаций, растущее с этим возрастом. Со временем гравитационная неустойчивость распространяется, индуцируется от Центра Вселенной (то есть от космологической временно́й оси). Остальные просторы Вселенной заполнены однородным газом, гравитационной неустойчивости которого противодействует его температура и общее однородное расширение.

Опытной поддержкой этой **гипотезы** является обнаружение во Вселенной плоских структур размером до 10^{10} световых лет [Википедия]. Если они связаны с космологической координатной плоскостью, то оказаться в пределах её видимости

случайно практически не возможно!

3. Численное моделирование единого поля. Небольшую область единого поля можно в принципе обсчитать. Для обычного нам вещества существенны лишь сравнительно низкочастотные компоненты поля этой области. Тогда в мировом спектре этой области соответствует лишь ограниченная область спектра и следовательно возможно синтезировать поле в желаемой области. Проблемой является определение космологических координат интересующей области. Если справедлива гипотеза о конечности цивилизованной части Вселенной данного возраста, то возможно обнаружение космологических координатных плоскостей и осей, а следовательно измерение 4-координат точек.

Оптические наблюдения Вселенной можно организовать путём статистических вычислений 4-импульсов фотонов, формируемых простонами. Путём их частотной и пространственной фильтрации в ограниченной области можно получить оптические изображения Вселенной. То есть можно организовать вычислительную программу, реализующую некие Всёвидящие Глаза.

4. Унивизор. **Унивизором** будем называть вычислительную программу, которая по заданным координатам x^μ_S фокуса наблюдения, вектору наблюдения $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S}^2 = 1$), прямоугольному экрану $a \times b$, расположенному на расстоянии d от фокуса наблюдения (в направлении $\pm\mathbf{S}$), заданной длине волны наблюдения λ и полосы $\Delta\lambda$, позволяет вычислить соответствующие компоненты единого поля и преобразовать их в оптическое изображение на экране унивизора.

Не трудно видеть, что вычислительные трудности растут при удалении объекта от начала основной системы координат. Поэтому цивилизации с разным удалением от начала координат имеют разные возможности самопознания, что может отразиться на скорости их развития. Не исключено, что периферийные цивилизации чем дальше находятся, тем в большей степени зависят от центральных, заимствуя у них знания с помощью унивизора.

5. Видовая мотивация жизни и искусственный интеллект. Жизнь каждого вида – очень сложный процесс. Это постоянная борьба за выживание в изменяющихся условиях, приспособление к ним фенологически и генотипически. При этом необходимо постоянное сохранение генетической мотивации к жизни (“всё живое хочет жить!”). Эту мотивацию не так-то просто сохранить в длинной цепи поколений. В природе её поддерживает естественный отбор. У человечества эта мотивация поддерживается не только генетически, но и культурно, то есть укладом жизни, традициями, моралью и нравственностью, мировоззрением. Культурная мотивация жизни не менее важна, чем генетическая, особенно в условиях конкуренции культур. Это подтверждают исторические примеры гибели цивилизаций на культурной основе. Для видовой мотивации жизни в культуре особенно важны традиции взаимоотношения полов, так как они определяют половой отбор. Видовой мотивации жизни не редко противоречит индивидуальная мотивация жизни, основанная на стремлении к удовольствиям (гедонизм). Выживание вида определяется соотношением этих мотиваций. Уже

отсюда видно, насколько хрупка видовая мотивация жизни. Генетические и культурные процессы происходят очень медленно в течении поколений.

Однако, человек успевает освоить внешний мир и азы культуры ещё в детстве. Это происходит так быстро потому, что его нервная система генетически подготовлена к человеческому восприятию внешнего мира. Искусственный интеллект, обличённый в нечеловеческую форму, человеком стать не сможет. Он не сможет почувствовать себя человеком, так как такое ощущение возникает лишь в общении с себе подобными и на основе заложенной генетической информации именно человека. Конечно, станет возможным создать человека искусственно. В некотором смысле это уже делается. Но это не искусственный интеллект, так как в нём заложена естественная информация. Создание искусственного нечеловеческого интеллекта на уровне развития человеческого, ставит сложные вопросы взаимоотношений с таким интеллектом и пока не ясно для чего это нужно. Зачем создавать себе чуждого конкурента, угрожающего нашему существованию? Другое дело – самоорганизующиеся системы для решения определённых задач, не претендующие на самостоятельность.

6. Смерть. Представьте себе, что на основе информации, полученной вычислительными средствами из прошлого, биологически воссоздан умерший ранее человек в состоянии предшествующем смерти (в **считанном состоянии**). Воссоздание предполагается, с сохранением нервной структуры (в том числе памяти). Что почувствует этот человек при пробуждении? Он не сможет почувствовать себя никем иным, чем человеком с этим считанным состоянием. Это обеспечивает его память. Дальнейшее его существование будет продолжением жизни того самого умершего человека. Благодаря вечному развитию Вселенной, связанному с её вечным расширением, рано или поздно мотивы, возможность и необходимость такого воскрешения возникают для каждого человека.

§4. Экономические проблемы человечества.

1. Глобальные причины экономических кризисов. **Прибавочная стоимость** обналичивается в финансовых структурах. Значительная часть этой стоимости присваивается **финансовой олигархией** в форме части **процентных ставок** (что составляет **экономический интерес финансовой олигархии**). Промышленность в условиях конкуренции вынуждена пользоваться **кредитованием** от финансовых структур. Покрытие **процентных ставок** по кредитам возможно только при **рентабельности** производства. Однако, для поддержания экономического интереса финансовой олигархии одной рентабильности не достаточно, то есть необходима **сверхприбыль**, с которой связан **экономический рост**. Чем больше этот рост, тем больше этот интерес. Возникает **положительная обратная связь**, объясняющая как успехи такой экономической системы, так и её неустойчивость, порождающую экономические взлёты и кризисы.

Поэтому борьба с кризисами заключается в **демпфировании экономики**, то есть в снижении экономического роста до уровня рентабельности. При этом исчезает экономический интерес финансовой олигархии, то есть она самовырождается, превращаясь в равноправную **финансовую отрасль промышленности**.

Обнуление финансовых показателей экономического роста вовсе не означает отсутствие **экономического развития**. Объективная оценка экономического роста сложна. Оценка его по объёму выпускаемой продукции должна учитывать ещё и качество этой продукции и ущербы наносимые природе при её производстве, потреблении и утилизации, а также степень удовлетворения ею насущных потребностей. Современные количественные оценки состояния экономики позволяют лишь грубые сравнения её изменения за прошедшие годы и для разных стран. Планирование бюджета имеет смысл не из обобщённых показателей, а из потребностей суверенной страны в конкретных продуктах экономики. Прекращение "экономического роста" в денежном выражении может стать проблемой лишь финансовой олигархии, но может не прекратить экономического развития в интересах всей страны и даже его улучшить.

Стимулирование потребления ради экономического роста ведёт к **потере культурных ценностей** вытесняемых новыми предметами потребления и превращаемых в мусор. **Потребление необходимо ограничить разумной достаточностью**.

⋆⋆⋆

Я не верю, что за бесконечно большое время ничего нельзя сделать для тех, кто жил в молодой Вселенной, поэтому я верю в бессмертие души.

Литература

Аквис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. Наука. М., 1972.

Багров В.Г., Бисноватый-Коган Г.с., Бордовицин В.А., Борисов А.В., Дорофеев О.Ф., Жуковский В.Ч., Пивоваров Ю.Л., Шорохов О.В., Эпп В.Я. Теория излучения релятивистских частиц. Физматлит. М., 2002.

Беллюстин С.В. Классическая электронная теория. Высшая школа. М., 1971.

Бергман П. Загадка гравитации. Наука. М., 1969.

Блохинцев Д.И. Принципиальные вопросы квантовой механики. Наука. М., 1987.

Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю., Крофт Х., Янцель Е. Живые числа. Мир. М., 1985, с. 53.

Бухштаб А.А. Теория чисел. М., 1966.

Бурланков Д.Е. Время, пространство, тяготение. М.-Ижевск. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006.

Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии. Атомиздат. М., 1977.

Вальфиш А.З. Целые точки в многомерных шарах. Тбилиси, 1959.

Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Наука. М., 1971, с. 96.

Вихман Э. Квантовая физика. Берклиевский курс физики. Т.4. Наука. М., 1977.

Владимиров И.С. Уравнения математической физики. Наука. М., 1971.

Гильберт Д. Основания физики. [79] в кн.: Вариацинные принципы механики./Под ред. Полака Л.С. Физматгиз, М., 1959, с. 589 - 598, в кн.: Визгин В.П. Единые теории поля в первой трети XX века. Наука. М., 1985, с. 65.

1.Гинзбург В.Л. О физике и астрофизике. Наука. М.,1974.

2.Гинзбург В.Л. О теории относительности. Наука. М.,1979.

3.Гинзбург В.Л., Фролов В.П. Вакуум в однородном гравитационном поле и возбуждение равномерно ускоренного детектора. УФН 1987, Т.153, вып.4.

Гиндинкин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. Наука. М.,1982.

Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. Наука. М.,1979.

Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Советское радио. М.,1971.

Гуревич Л.Э., Чернин А.Д. Введение в космогонию. Наука. М., 1978.

Дакур Г. Низкочастотные гравитационные волны в космологии. В кн.: Космология. Теории и наблюдения. Мир. М, 1978, с. 398.

Денисова И.П. Введение в тензорное исчисление и его приложения. УНЦ ДО, М, 2004.

Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. (Основные статьи 1925 – 1958 годов). Наука. М., 1990. (В статье “Отношение между математикой и физикой”., с. 254.)

Добрынина А.А., Нарынская Е.Н. Радиационные поправки и теория перенормировок. ЯрГУ. Ярославль., 2015.

Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Наука. М, 1965.

Зельдович А.Б., Хлопов М.Ю. Масса нейтрино в физике элементарных частиц и космологии ранней Вселенной. УФН, том 135, вып. 1, 1981, сентябрь.

Зонн В. Галактики и квазары. Мир. М., 1978.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Наука. М., 1979.

Казютинский В.В., Балашов Ю.В. Антропный принцип: история и современность. “Природа”, №1, 1989, с. 23.

Катанаев М.О. Геометрические методы в математической физике. Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 2011.

Кириченко Н.А. Термодинамика, статистическая и молекулярная физика. Физматкнига. М., 2005.

Коган Л.А. О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами. Изд. “ФАН” Узбекской ССР. Ташкент, 1971.

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука. М., 1981.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Наука. М., 1974.

Кубилюс Н.П. Вероятностные методы в теории чисел.

Кулакова Н.В. Уточняется постоянная Хаббла. “Природа”, №10, 1995, с. 77.

1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.1. Механика. Наука. М., 1973.

2.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.2. Теория поля. Наука. М., 1973.

3.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.3. Квантовая механика. Наука. М., 1989.

4.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.4. Квантовая электродинамика. Наука. М., 1989.

5.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.5. Статистическая физика. Часть 1. Наука. М., 1976.

6.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.6. Гидродинамика. Часть 1. Наука. М., 1986.

8.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.8. Электродинамика сплошных сред. Наука. М., 1992.

9.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Берестецкий В.Б., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. т.9. Квантовая электродинамика. Наука. М., 1989.

10.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.10. Физическая кинетика. Наука. М., 2001.

11.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Кн.1. Механика. Электродинамика. Наука. М., 1969.

Левич В.Г. Курс теоретической физики. т. 1,2. Наука. М., 1969.

Ленин В.И. Материализм и эмпириокритицизм. Изд. полит. литературы. М., 1967.

Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. Наука. М., 1987.

Манин Ю.И. Теорема Геделя. “Природа”, №12, 1975, с. 80.

Нелипа Н.Ф. Физика элементарных частиц. Высшая школа. М., 1977.

Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. Наука. М., 1978.

Окунь Л.Б. Элементарное введение в физику элементарных частиц. Физматлит. М., 2006.

1.Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. т1. Элементарные функции. Наука. М. 1981.

2.Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. т2. Специальные функции. Наука. М. 1983.

3.Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. т3. Дополнительные главы. Наука. М. 1986.

1. “Природа”, №8, 1986, с. 110. Новый метод измерения постоянной Хаббла.

2. “Природа”, №2, 1989, с. 106. Нити зазеркалья.

3. “Природа”, №10, 1990, с. 104. “Великая стена” в космосе.

4. “Природа”, №4, 1995, с. 3. Спектроскопия квазаров и космология.

Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. т1. Мир. М., 1982.

Савельев И.В. Основы теоретической физики. т1. Механика и электродинамика. Наука. М., 1975.

Садбери А. Квантовая механика элементарных частиц. Мир. М., 1989.

Садовский М.В. Лекции по квантовой теории поля. ИКИ. М., 2003.

Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. Наука. 1977.

Симонов П. Сознание, подсознание, сверхсознание. “Наука и жизнь”, №12, 1975, с. 44.

Скоробогатов Г.А. Сколько у природы законов? “Химия и жизнь”, №12, 1981, с. 50.

Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. Наука. М., 1979.

Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах. Изд-во НГТУ. Новосибирск., 2011.

Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Мир. М., 1968.

Фролов В.П. Гравитация, ускорение, кванты. Знание. М. Подписная научно-популярная серия. Физика. №5, 1988.

Ханагов А.А. Существуют ли в формальной логике парадоксы? “Природа”, №10, 1978, с. 118.

Хинчин Ф.Я. Три жемчужины теории чисел. Наука. М., 1979.

Хлопов М.Ю. Вселенная – гигантский ускоритель. Знание. М. Подписная научно-популярная серия. Физика. №1, 1987, с. 35.

Чернин А.Д. Вращение галактик. Знание. М. Подписная научно-популярная серия. Космонавтика, астрономия. №3, 1990.

Чечев В.П., Крамаровский Я.М. Радиоактивность и эволюция Вселенной. Наука. М., 1978, с. 101.

Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. Наука. М., 1968.

Hardy G.H., Wright E.H. An Introduction to the theory of Numbers. Clarendon press. Oxford, 1938, p. 314.

⋆ ⋆ ⋆

Что толку от новорожденного?

Майкл Фарадей. (Из книги “Суперсила”, Пол Девис.)

А л ф а в и т н ы й   у к а з а т е л ь

Структура ссылки указателя:

часть.глава.параграф.пункт

Виктор Дмитриевич Смирнов
vicsmirnov@gmail.com

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ФИЗИКА

ООО «Свое издательство»
199004, Санкт-Петербург,
ул. Репина, 41
Телефон: (812)900-21-45
Почта: editor@isvoe.ru
Сайт: isvoe.ru
Заказ 1812
Подписан в печать 11.01.2017 г.
$70 \times 90^1/_{16}$.
Тираж 40 экз.
Издание подготовлено в пакете LaTeX
с использованием кириллических шрифтов семейства LH.

Отпечатано в собственной типографии
ООО «Свое издательство»
Печать офсетная